14. Волновое движение
14.1. Распространение волн в упругой среде

Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v. Процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени называется волной.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t, называется фронтом волны (или волновым фронтом). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положения равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — множество концентрических сфер.

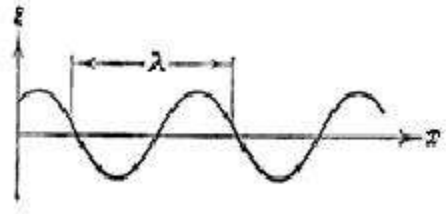


Рис. 14.1.1.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x. Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но различные значения координат y и z), колеблются в одинаковой фазе. На рис. 14.1.1 изображена кривая, которая дает смещение из положения равновесия точек с различными x в некоторый момент времени. Не следует воспринимать этот рисунок как зримое изображение волны. На рисунке показан график функции ξ (x, t) для некоторого фиксированного момента времени t. Такой график можно строить как для продольной, так и для поперечной волны.

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. Очевидно, что:

$$\lambda = vT, \qquad (14.1.1)$$

где v — скорость волны, T — период колебаний. Длину волны λ можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π (см. рис. 14.1.1).

Заменив в соотношении (14.1.1) T через 1/ν (ν - частота колебаний), получим:

$$\lambda\nu = v. \qquad (14.1.2)$$

14.2. Уравнение бегущей волны

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат x, y, z и времени t:

$$\xi=\xi\,(x, y, z; t) \qquad (14.2.1)$$

(имеются в виду координаты равновесного положения частицы).

Эта функция должна быть периодической как относительно времени t, так и относительно координат x, y, z. Периодичность по времени вытекает из того, что ξ описывает колебания частицы с координатами x, y, z. Периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние λ, колеблются одинаковым образом.

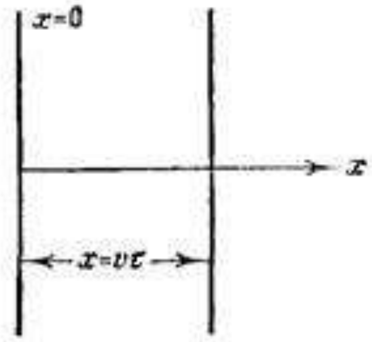


Рис.14.2.1.

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось x совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси x и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t: ξ = ξ (x, t). Пусть колебания точек, лежащих в плоскости x = 0 (рис. 14.2.1), имеют вид:

$$\xi(0,t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости x = 0 до этой плоскости, волне требуется время τ = x/v (v — скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости x = 0, т. е. будут иметь вид:

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega(t-\tau)+\alpha] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]$$

Итак, уравнение плоской волны (и продольной, и поперечной), распространяющейся в направлении оси x, выглядит следующим образом:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right] \qquad (14.2.2)$$

Величина A представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны α определяется выбором начал отсчета x и t. При рассмотрении одной волны начала отсчета времени и координаты обычно выбираются так, чтобы α была равной нулю.

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (14.2.2), положив:

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha = const. \qquad (14.2.3)$$

Это выражение определяет связь между временем t и тем местом x, в котором фаза имеет зафиксированное значение. Вытекающее из него значение dx/dt дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (14.2.3), получим:

$$dt - \frac{1}{v}dx = 0,$$

откуда:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Таким образом, скорость распространения волны v в уравнении (14.2.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем, ее называют фазовой скоростью.

Согласно (14.2.4) dx/dt > 0. Следовательно, уравнение (14.2.2) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания x. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] \qquad (14.2.4)$$

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad (14.2.5)$$

которая называется волновым числом. Умножив числитель и знаменатель выражения (14.2.5) на частоту ν, можно представить волновое число в виде:

$$k = \frac{\omega}{v} \qquad (14.2.6)$$

Раскрыв в (14.2.2) круглые скобки и приняв во внимание (14.2.6), придем к следующему уравнению плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \alpha] \qquad (14.2.7)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, отличается от (14.2.7) только знаком при члене kx.

14.3. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются когерентными. При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях:

$$\xi_1(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \alpha_1]$$
$$\xi_2(x,t) = A\cos[\omega t + kx + \alpha_2]$$

Преобразовав сумму этих выражений по формуле для суммы косинусов, придем к уравнению стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \qquad (14.3.1)$$

Чтобы упростить уравнение, выберем начало отсчета x так, чтобы разность $\alpha_2 - \alpha_1$ стала равной нулю, а начало отсчета так, чтобы оказалась равной нулю сумма $\alpha_2 + \alpha_1$. Кроме того, заменим волновое число k его значением $2\pi/\lambda$. Тогда уравнение стоячей волны примет вид:

$$\xi = \left(2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t \qquad (14.3.2)$$

Из уравнения (14.3.2) видно, что в каждой точке стоячей волны совершаются гармонические колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от x:

$$\text{амплитуда} = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (14.3.3)$$

амплитуда колебаний максимальна. Эти точки называются ***пучностями стоячей волны***. Координаты пучностей:

$$x_{пучн} = \pm n\lambda/2. \qquad (14.3.4)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (14.3.5)$$

амплитуда равна нулю. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов:

$$x_{узл} = \pm(n+1/2)\lambda/2. \qquad (14.3.6)$$

Узел, как и пучность, представляет собой не точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x, определяемые формулой либо (14.3.4), либо (14.3.6).

Из формул (14.3.4) и (14.3.6) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно λ/2. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

Множитель $2A\cos 2\pi x/\lambda$ при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π. Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе).

Примеры решения задач

Задача 1. Точка совершает колебания по закону $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, где $A = 2см$. Определить начальную фазу φ_0, если

$$x(0) = -\sqrt{3}\ см$$

и

$$\frac{dx(0)}{dt} < 0.$$

Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

Решение:

Из закона движения точки выражаем ее смещение в момент t=0 через начальную фазу:

$$x(0) = A\cos\varphi_0.$$

Из начального условия находим:

$$\cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Этому значению косинуса соответствуют два угла:

$$\varphi_0 = \pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Чтобы сделать выбор между этими значениями, найдем скорость точки:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

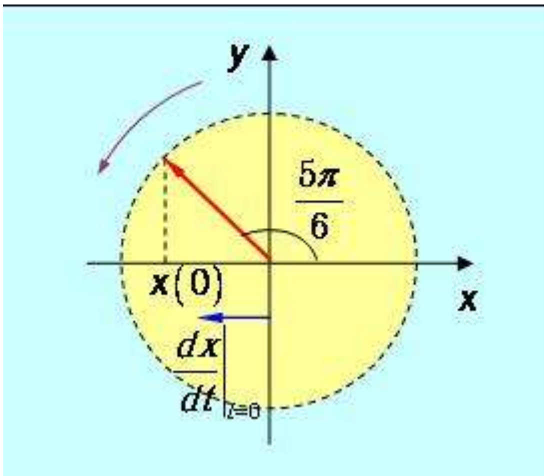
Откуда:

$$\frac{dx(0)}{dt} = -A\omega\sin\varphi_0.$$

начальная скорость отрицательна при положительном значении синуса, что бывает при углах $0<\varphi_0<\pi$. Стало быть, решением нашей задачи является угол:

$$\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Векторная диаграмма для $t=0$ изображена на рис.



Задача 2. Материальная точка массой *m = 5 г* совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0.5$*Гц*. Амплитуда колебаний *A = 3 см*. Определить: 1) скорость точки в момент времени t_0, когда ее смещение *x=1.5 см*; 2) максимальную силу, действующую на точку; 3) полную энергию колеблющейся точки.

Решение:

Закон движения точки имеет вид:

$$x = A\cos\left(2\pi\nu t + \varphi_0\right). \qquad (1)$$

Закон изменения скорости точки получаем дифференцированием (1):

$$v = \frac{dx}{dt} = -2\pi\nu A\sin\left(2\pi\nu t + \varphi_0\right). \qquad (2)$$

Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона *F = ma*, где выражение для ускорения получается дифференцированием (2):

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\left(2\pi\nu\right)^2\cos\left(2\pi\nu t + \varphi_0\right). \qquad (3)$$

Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетический и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2 второе на $A^2(2\pi\nu)^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\left(2\pi\nu\right)^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем:

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$v = \pm 8.2\ \frac{см}{с}.$$

Знак «плюс» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак «минус» – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

Закон изменения получим, подставляя (3) во второй закон Ньютона:

$$F = -mA\left(2\pi\nu\right)^2 \cos\left(2\pi\nu t + \varphi_0\right),$$

так что максимальное значение силы равно:

$$F = mA\left(2\pi\nu\right)^2.$$

Подставив сюда значения величин: ν, m, A, найдем:

$$F_{MAX} = 1.5\ мН.$$

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому, полная энергия E колеблющейся точки, равна максимальной кинетической энергии:

$$K_{MAX} = \frac{mv_{MAX}^2}{2}.$$

Максимальную скорость мы знаем из формулы (2):

$$v_{MAX} = 2\pi\nu A.$$

Тогда:

$$W = 2\pi^2\nu^2 mA^2 = 22\ мкДж.$$

Задача 3. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1 cos\omega\ (t+\tau_1)$ и $x_2 = A_2 cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1 = 1см$,

$A_2 = 2$ *см*, $\tau_1 = 0.167$ *с*, $\tau_2 = 0.5$ *с*, $\omega = \pi\ c^{-1}$. Найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

Решение:

Преобразуем заданные колебания к стандартному виду:

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi), \quad i = 1,\ 2,$$

где начальные фазы

$$\varphi_i = \omega \tau_i,$$

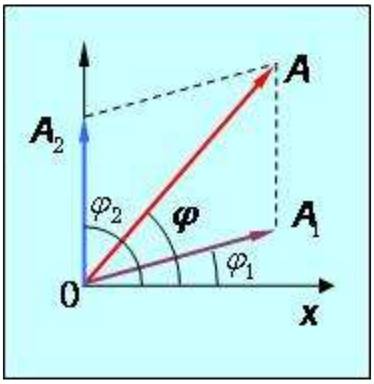
Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

и

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Для определения амплитуды A и начальной фазы результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис.



С течением времени все три вектора A_1, A_2, A вращаются как единое целое против часовой стрелки с угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебаний.

Согласно теореме косинусов, получаем:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Подставляя численные значения, находим амплитуду результирующего колебания:

$$A = \sqrt{7} \approx 2.65 \text{ см.}$$

Формула для тангенса начальной фазы результирующего колебания:

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

также следует из приведенного выше рис. Подставим значения: A_1, A_2, φ_1, φ_2 и произведем вычисления:

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда:

$$\varphi = arctg\,\frac{5}{\sqrt{3}} \approx 70^\circ.$$

Поскольку складываются колебания одинаковой частоты, результирующее колебание будет иметь ту же частоту:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Задача 4. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t); \\ y &= A_2 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right). \end{aligned} \qquad (1)$$

где A_1=1 см, A_2=2 см, $\omega = \pi\ c^{-1}$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Решение:

Чтобы найти уравнение траектории точки, надо исключить время t из заданных уравнений (1).

Чтобы исключить время t, воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

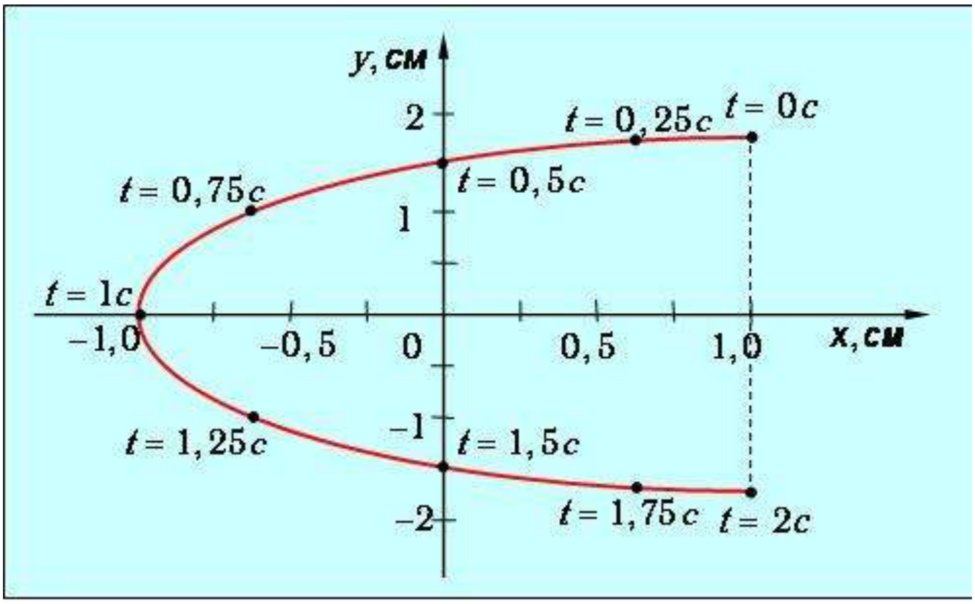
при

$$\alpha = \frac{\omega t}{2},$$

Находим тогда уравнение траектории:

$$x = \frac{2A_1}{A_2^2}y^2 - A_1. \tag{2}$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью *0x*. Из уравнений (1) и (2) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от $-A_1$ до $+A_1$ по оси *0x* и от $-A_2$ до $+A_2$ по оси *0y*. График траектории показан на рис.

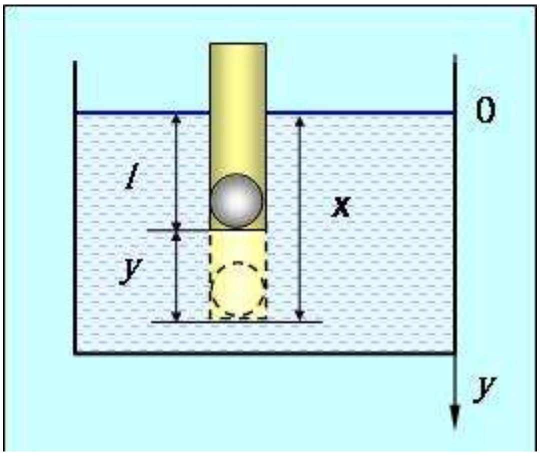


Период результирующего колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega}{2}\right)} = 4\ c.$$

На графике показаны положения колеблющейся точки через *1/16* периода. Точка начинает колебание в момент $t = 0$, для которого находим из (1) $x = 1$ *см*, $y = 2$ *см* (положение *A*). Через четверть периода ($t = 1$ *c*) координаты точки равны $x = -1$, $y = 0$ (вершина параболы). Через половину периода ($t = 2$ *c*) точка находится в положении *B* ($x = 1$, $y = -2$), после чего начинает движение в обратном направлении вдоль той же параболы, и в момент $t = 4\,с$ снова оказывается в начальном положении A.

Задача 5. Груз на дне цилиндрической пробирки с площадью поперечного сечения $0{,}5\ см^2$ при погружении пробирки в воду удерживает ее в вертикальном положении. После погружения пробирки на некоторую глубину она начинает колебаться относительно положения равновесия. Масса пробирки с грузом равна $10\ г$. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить период колебаний пробирки.



Решение:

В данном случае роль квазиупругой силы играет сила Архимеда. Необходимо записать закон движения пробирки и свести его к дифференциальному уравнению гармонического осциллятора.

Направим ось $0x$ вертикально вниз, выбрав за начало отсчета ее пересечение с поверхностью жидкости. Пусть x – координата дна пробирки (см. рис.). Сила Архимеда равна:

$$F_A = -Sx\rho g$$

(знак выбран так, что когда дно пробирки находится ниже уровня жидкости ($x>0$), сила Архимеда отрицательна, то есть направлена вверх). Кроме этого, на пробирку действует сила тяжести:

$$P = mg.$$

Поэтому уравнение движения записывается в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - Sx\rho g.$$

Таким образом, «коэффициент жесткости» системы (то есть коэффициент при смещении при выражении для квазиупругой силы) равен:

$$k = \rho S g.$$

В положении равновесия (x = l) обе силы уравновешивают друг друга:

$$mg = Sl\rho g,$$

Откуда:

$$l = \frac{m}{\rho S}.$$

Обозначим через y отклонение дна пробирки от равновесного положения $x = l + y$. Подставляя это представление в уравнение колебаний, получаем:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + Sy\rho g = 0,$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}.$$

Частоту колебаний можно также выразить через глубину погружения в состоянии равновесия:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l},$$

что формально совпадает с частотой колебаний математического маятника длиной l. Теперь легко находится и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.01}{0.5\cdot 10^{-4}\cdot 10^3\cdot 9.8}} = 0.9\ c.$$

Задача 6. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью v = 15 м/с. Период T колебаний точек шнура равен *1,2 с*, амплитуда *A = 2 см*. Определить длину волны; смещение точки, отстоящей на расстояние x

= *45 м* от источника волн в момент $t = 4\ c$ и разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20\ м$ и $x_2 = 30\ м$.

Решение:

Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения:

$$\lambda = vT. \qquad (1)$$

Запишем уравнение волны:

$$u(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (2)$$

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (3)$$

где учтено, что:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение волны (2) значения амплитуды A и фазы φ.

Подставив в (1) значения величин v и T, получим $\lambda = 15 \cdot 1.2 = 18\ м.$

Смещение точки находим, подставив в (2) значения амплитуды A и фазы φ:

$$u = 2\cos\frac{2\pi}{1.2}\left(4 - \frac{45}{15}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1\ см.$$

С помощью (3) находим разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны, которая связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{Tv}(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{2\pi}{1.2\cdot 15}(30 - 20) = \frac{10\pi}{9} = 3.49 рад = 200^0.$$

Задача 7. Левому концу длинной горизонтальной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебательное движение с частотой $\nu = 250$ *Гц* и амплитудой $A = 2{,}6$ *см*. Сила натяжения струны равна $T = 140$ *Н*; а линейная плотность $\rho_л = 0{,}12$ *кг/м*. При $t = 0$ конец струны смещен вверх на $u(0, 0) = 1{,}6$ *см* и движется вверх. Вычислить длину образующейся бегущей волны и найти фазу колебаний в момент времени $t = 3$ *с* в точке, удаленной от левого конца на расстояние $x = 50$ *см*.

Решение:

Скорость волны в натянутой струне равна:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_Л}}. \qquad (1)$$

Длина волны равна:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \qquad (2)$$

Пусть левый конец струны имеет координату $x=0$. В данном случае мы не знаем начальной фазы φ_0 волны, так что волну, движущуюся вправо, можно записать в общем виде:

$$u(x, t) = A\cos(2\pi\nu t - kx + \varphi_0).$$

В нашем случае амплитуда $A=2.6$ *см*, а при $t=0$ и $x=0$ мы имеем $u(0, 0)=A\cos\varphi_0=1.6$ *см*. Следовательно, для начальной фазы получаем уравнение:

$$\cos\varphi_0 = \frac{u(0, 0)}{A}. \qquad (3)$$

Уравнение бегущей волны имеет вид:

$$u(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (4)$$

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t будет:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 2\pi\nu t - kx + \varphi_0 = 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0, \qquad (5)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Подставляя (1) в (2), находим длину волны в струне:

$$\lambda = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{T}{\rho_Л}} = \frac{1}{250}\cdot\sqrt{\frac{140}{0.12}} = 0.137\ м.$$

Решая уравнение (3), получаем:

$$\varphi_0 = arc\cos\frac{u(0,\,0)}{A} = arc\cos\frac{1.6}{2.6} = arc\cos 0.615.$$

Отсюда следуют два решения:

$$\varphi_0 = arc\cos 0.615 = \pm 0.908\ рад.$$

Выбрать одно из них поможет условие, что в начальный момент времени скорость левого конца положительна. Дифференцируя уравнение волны (4) по времени, получаем для скорости:

$$\frac{du(x,\,t)}{dt} = -2\pi\nu A\sin(2\pi\nu - kx + \varphi_0).$$

В начальный момент:

$$\frac{du(0,\,0)}{dt} = -2\pi\nu A\sin\varphi_0 > 0,$$

так что:

$$\sin\varphi_0 < 0.$$

Таким образом, из двух найденных решений остается одно:

$$\varphi_0 = -0.908\ рад.$$

Тогда из (5) получаем фазу колебаний в момент времени $t = 3\ с$ в точке, удаленной от левого конца на расстояние $x = 50\ см$:

$$\varphi = 2\pi \cdot 250 \cdot 0.03 - \frac{2\pi}{0.137} \cdot 0.5 - 0.908 = 2.94 \text{ } \textit{рад}.$$

Задача 8. На расстоянии *l=4 м* от источника плоской волны частотой *ν=440 Гц* перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояния от источника волн до точек, в которых будут ближайшие к источнику узел и пучность стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость волны считать равной *340 м/с*.

Решение:

Выберем систему координат так, чтобы ось *x* была направлена на источник волны, а начало координат совпадало с точкой, где волна падает на стенку.

Для решения задачи необходимо воспользоваться уравнением стоячей волны:

$$u(x,t) = u_{MAX} \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\omega \frac{x}{v}\right) = = u_{MAX} \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right). \qquad (1)$$

Узлы стоячей волны соответствуют точкам, когда синус в (1) обращается в ноль:

$$\sin\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right) = 0,$$

откуда:

$$x_{n,УЗЕЛ} = n\frac{v}{2\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ближайший к источнику узел будет, когда *n=0*. Получаем тогда:

$$x_{0,УЗЕЛ} = 0 \text{ } \textit{м}.$$

Соответственно, расстояние:

$$l_{0,УЗЕЛ} = l - x_{0,УЗЕЛ}$$

от источника до ближайшего узла равно:

$$l_{0,УЗЕЛ} = 4\ м.$$

Первые три пучности стоячей волны соответствуют точкам, когда синус в (1) по модулю равен *1*:

$$\sin\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right) = \pm 1,$$

откуда:

$$x_{n,ПУЧН} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Получаем тогда $x_{0,ПУЧН} = 0.19\ м.$ Соответственно, расстояние $l_{0,ПУЧН} = l - x_{0,ПУЧН}$ от источника до ближайшей пучности равно:

$$l_{0,ПУЧН} = 4 - 0.19 = 3.81\ м.$$

Задача 9. Температура T_0 воздуха у поверхности Земли равна *300 K*; при увеличении высоты она понижается со скоростью:

$$\frac{dT}{dx} = 7\ \frac{мК}{м}.$$

За какое время звук, распространяясь по поверхности Земли, достигнет высоты $h = 8$ *км*?

Решение:

На высоте *x*, температура воздуха описывается соотношением:

$$T(x) = T_0 - \frac{dT}{dx}x. \qquad (1)$$

С учетом (1) скорость звука на этой высоте находится по формуле:

$$v(x) = \sqrt{\gamma\frac{RT(x)}{M}} = v_0\sqrt{1 - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{x}{T}}, \qquad (2)$$

где:

$$v_0 = \sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}} \qquad (3)$$

- скорость звука у поверхности Земли.

Скорость распространение волнового фронта на высоте *x* согласно (2) равна *v(x)*, то есть за время *dt* фронт пройдет расстояние:

$$dx = v(x)dt.$$

Записывая это соотношение в виде:

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \qquad (4)$$

и интегрируя обе части (по времени от *0* до искомого *t*, по высоте от x = 0 до x = h), получаем искомое время, за которое звук достигнет высоты *h*.

Подставляя численные данные в (3), находим $v_0 = 347$ *м/с*. Подставляя найденные выражения в (4) и интегрируя, получаем:

$$t = \frac{1}{v_0}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{dT}{dx}\cdot\frac{x}{T}}} = \frac{2T_0}{v_0\frac{dT}{dx}}\left(1-\sqrt{1-\frac{dT}{dx}\cdot\frac{h}{T_0}}\right).$$

Подставляя сюда численные данные, находим:

$$t = \frac{2\cdot 300}{347\cdot 0.007}\left(1-\sqrt{1-\frac{7\cdot 8}{300}}\right) = 24.2\ c.$$

Величина

$$v_h = \sqrt{\gamma\frac{R\left(T_0-\frac{dT}{dx}h\right)}{M}} = v_0\sqrt{1-\frac{dT}{dx}\cdot\frac{h}{T_0}}$$

– это скорость звука на высоте *h*. Выражая отсюда комбинацию:

$$\frac{dT}{dx}\cdot\frac{h}{T_0}$$

через отношение v_h/v_0, наш результат можно представить в виде:

$$t = \frac{h}{\langle v\rangle},$$

где

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v_h}{2}$$

есть среднее арифметическое скоростей звука у поверхности и на высоте h. Поскольку температура на высоте h равна $T_h = 300 – 0.007 \cdot 8000/300 = 244\ K$, то можно найти скорость звука $v_h = 313$ *м/с*. Значит, средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{347 + 313}{2} = 330\ \frac{м}{с},$$

и мы приходим к тому же результату: $t = 8000/330 = 24.2$ *с*.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Что собой представляет математический маятник, физический маятник?
3. Какие силы называются квазиупругими?
4. В каких положениях колеблющейся системы кинетическая энергия будет максимальной?
5. В каких положениях колеблющейся системы потенциальная энергия будет максимальной?
6. Какой процесс называется волной?
7. Какие волны называются продольными, а какие поперечными?
8. Что такое волновой фронт и волновая поверхность? Чем они отличаются?
9. Что собой представляет сферическая волна? плоская волна?
10. Что такое длина волны?
11. Что показывает скорость волны?
12. Какие основные признаки когерентности волн?
13. Что называется пучностью стоячей волны? узлом стоячей волны?