1. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из определенного количества элементов.

Формулы комбинаторики часто используют при непосредственном вычислении вероятностей.

1.1. Перестановки

Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же **n** различных элементов, отличающиеся только порядком их расположения;
обозначаются $\mathbf{P_n}$ (перестановки из **n** элементов)

Число всех возможных перестановок: $\mathbf{P_n = n!}$

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр **1, 2, 3**, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение: $\mathbf{P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6}$

1.2. Размещения

Размещения - комбинации, составленные из **n** различных элементов по **m** элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком;

обозначаются A_n^m

Число всех возможных комбинаций:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-m+1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример: Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение: $A_6^2 = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = 5\times6 = 30$

1.3. Сочетания

Сочетания - комбинации, составленные из **n** различных элементов по **m** элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом;

обозначаются C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Пример: Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение: $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = 45$

Правило суммы	Если объект **A** может быть выбран из совокупности объектов **m** способами, а другой объект **B** может быть выбран **n** способами, то выбрать либо **A**, либо **B** можно **m+ n** способами
Правило произведения	Если объект **A** можно выбрать из совокупности объектов **m** способами и после каждого такого выбора объект **B** можно выбрать **n** способами, то пара объектов **(A,B)** в указанном порядке может быть выбрана **m×n** способами

Пример.Сколько шестизначных чисел , кратных 5 , можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что в числе цифры не повторяются?
Решение. Цифра 5 должна стоять на последнем месте.Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке.Следовательно,искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов ,т.е. 5!$=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120.$
Пример.Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?
Решение. Число матчей равно числу неупорядоченных выборок объема 2 из множества , содержащего 16 элементов , т.е. равно C_{16}^{2} **. По формуле находим**

$$C_{16}^{2}=\frac{16\cdot15}{2}=120.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр **1, 2, 3, 4** при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

2. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр **1, 2, 3, 4** ?

3. Из цифр **0, 1, 2, 3** составлены все возможные 4-х значные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр.
Сколько получилось чисел?

4. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: **1. зебра, 2. баран, 3. водород, 4 абракадабра**?

5. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть 5 уроков: **алгебра, геометрия, история, география, литература**, причем, алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

6. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом?
Шары одного цвета не отличимы друг от друга.

7. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим 5 львов и 4 тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так, чтобы никакие 2 тигра не шли непосредственно друг за другом?

8. На 5 сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:
    - все путевки различны;
    - все путевки одинаковы?

9. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:
   - один из них должен быть старшим;
   - старшего быть не должно?

10. В почтовом ящике 38 отделений. Сколькими способами можно положить в ящик 35 одинаковых открыток так, чтобы в каждом отделении было не более одной открытки?

11. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

12. В шахматном турнире, где участники встречаются между собой один раз, два шахматиста выбыли по болезни, успев сыграть только по три партии каждый. Сколько шахматистов начали турнир, если всего было сыграно 84 партии?

13. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник?

14. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определите число точек пересечения диагоналей.

15. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

16. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор точек и тире. Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если:
   - буква не должна содержать более четырех знаков;
   - буква не должна содержать более пяти знаков?

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия

Совместные события	-	события, которые могут происходить одновременно
Несовместные события	-	исключающие друг друга события
Независимые события	-	события, которые могут происходить независимо друг от друга

1.2. Обозначения

A	-	событие
a; $\bar{A}$	-	событие, противоположное событию A
P(A)	-	вероятность наступления события A
m	-	число случаев, благоприятствующих событию
n	-	общее число случаев
AB; $(A \cap B)$	-	совместное осуществление событий A и B
(A+B); $(A \cup B)$	-	любое сочетание событий: или A или B или одновременно A и B
x	-	Условие
P(A/*x*)	-	условная вероятность (вероятность события A при условии события ***x***

2. ПРЯМОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$P(A) = \frac{m}{n}$ - математическая вероятность наступления события А, определяющаяся из условий проведения испытаний

$P^*(A) = \frac{m}{n}$ - статистическая вероятность (частотная), определяющаяся из статистики результатов множества предыдущих испытаний

Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Вероятность зависит от наличия информации о событиях, а не от объективной действительности.

Понятие "истинной" вероятности не имеет смысла.

Примеры:

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная, причем, на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

   Решение

   На выпавшей грани первой игральной кости может появиться одно очко, два, три очка … шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании второй кости. Каждый из исходов бросания первой кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй кости.

Общее число возможных элементарных исходов равно 6×6=36

Благоприятствующими интересующему нас событию является следующие пять исходов:

Число выпавших очков		Сумма очков
1-я кость	2-я кость	
6	2	8
6	4	10
6	6	12
2	6	8
4	6	10

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных исходов:

P=5/36=0,13

2. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и , помня лишь ,что эти цифры различны , набрал их наудачу.Какова вероятность того , что номер набран правильно?

Решение.

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию А будет только один способ.Поэтому $P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}$.

3. Среди 100 электроламп 5 испорченных.Какова вероятность того , что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

Решение.

Из 100 электроламп 3 лампы можно выбрать C_{100}^{3} способами.Три исправных лампы из общего числа 95 исправных ламп можно выбрать C_{95}^{3} способами. Следовательно , искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_{95}^{3}}{C_{100}^{3}} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}86.$$

4. В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того , что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

Решение.

Число возможных способов взять m изделий из n изделий равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи , когда из общего числа k бракованных изделий взято l , а остальные m-l изделий небракованные , т.е. они взяты из общего числа n-k. Поэтому число длагоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность будет

$$P = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:
   - случайно названное двузначное число
   - случайно названное двузначное число, цифры которого различны

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:
   - сумма выпавших очков равна семи
   - сумма выпавших очков равна восьми, а разность - четырем
   - сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем
   - сумма выпавших очков равна пяти, а произведение - четырем

3. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб

4. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке

5. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

6. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная

7. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей:
   - нет бракованных
   - нет годных

8. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы

10. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры

11. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. ПО табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины

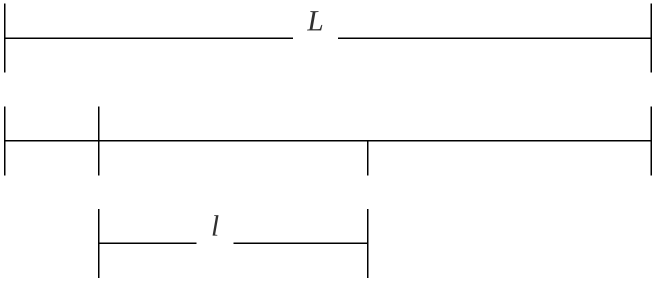
12. На складе имеется 15 кинескопов, причем, 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода

13. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников

14. При игре в “спортлото” на специальной карточке отмечаются 6 номеров из 49. Во время тиража определяются 6 выигравших номеров. Какова вероятность угадать ровно 3 “счастливых” номера?

Геометрические вероятности

Дан отрезок:

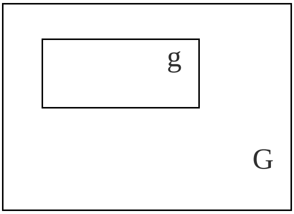


L - длина отрезка
l - часть отрезка

На отрезок *L* наугад наносится точка.
Вероятность попадания в отрезок *l* :

$$P = \frac{l}{L}$$

Дана плоская фигура:



G - площадь всей фигуры
g - площадь части фигуры

$$P = \frac{g}{G}$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру.

$$P = \frac{v}{V}$$

где: V- объем всей фигуры

v- объем части фигуры

Пример. На отрезке L=16 см помещен отрезок l=4 см. Найти вероятность того , что наугад поставленная на отрезок L точка попадет в отрезок l.

Решение.

Искомая вероятность равна $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. На отрезке **L** = 20 см помещен отрезок ***l*** = 10 см.
   Найти вероятность того, что наугад поставленная на отрезок L точка попадет в отрезок *l*.

2. В круге радиусом **R** есть круг радиуса **r**.
   Найти вероятность того, что наугад брошенная в большой круг точка попадет в малый круг.

3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии **2a**. На плоскость наудачу брошена монета радиусом **r < a**.
   Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

4. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной **a** наудачу брошена монета радиусом **r < a/2.**
   Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из сторон квадрата:

5. На плоскости начерчены две концентрические окружности с радиусами 5 см и 10 см.
   Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями.

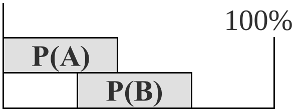
3. КОСВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Основные понятия

№№ пп	События	Сущность Событий	Обозначения
1.	Несовместные	Одно из двух	(A+B)
2.	Противоположные		(A+B)
3.	Совместные:		
	- независимые	- совместное наступление	(AB)
		- хотя бы одно из 2-х	A+B
	- зависимые	- совместное наступление	(AB)
4.	Условная вероятность	вероятность события А при условии события ***x***	P(A/x)

3.2. Основные теоремы теории вероятностей

Название теоремы	Трактовка теоремы	Обозначения
Теорема сложения вероятностей не-совместных собы-тий	Вероятность наступления одного из 2-х несов-местных событий равна сумме вероятностей этих событий.	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
Теорема умножения вероятностей	Вероятность совместного наступления 2-х независимых событий равна произведению их вероятностей	$P(AB) = P(A) * P(B$

Название теоремы	Трактовка теоремы	Обозначения
Теорема сложения вероятностей сов-местных событий	Вероятность наступления хотя бы одного из 2-х совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.	P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) Графически это можно пояснить так:  Часть вероятности наступления каждого события совпадает с вероятностью их совместного наступления.

Примеры:

1. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть оков?

   Решение
   Введем обозначения событий”:

A - ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков;

A_i – на выпавшей грани i-той кости (i = 1, 2, 3, … , n) не появится 6 очков.

Интересующее нас событие A состоит в совмещении событий A_1, A_2, A_3, … A_n, т.е. $A=A_1\ A_2, \dots A_n$.

Вероятность того, что на любой выпавшей грани появится число очков, не равное шести, равна $P(A_i) = 5/6$

События A_i независимы в совокупности, поэтому применима теорема умножения:

$$\mathbf{P(A) = P(A_1\ A_1, \dots A_n) = P(A_1)\ P(A_2) \dots P(A_n) = (5/6)^n}$$

По условию $(5/6)^n < 0{,}3$. Следовательно, $n \ln (5/6) < \ln 0{,}3$.

Отсюда, учитывая, что $\ln (5/6) < 0$, найдем: $n>6{,}6$.

Т.о. искомое число игральных костей $n \geq 7$.

2. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение

Введем обозначения событий”:

A - первый взятый учебник имеет переплет;

B – второй учебник имеет переплет.

Вероятность того, что первый учебник имеет переплет:

$$\mathbf{P(A) = 3/6 = 1/2}$$

Вероятность того, что второй учебник имеет переплет при условии, что первый взятый учебник был в переплете, т.е. условная вероятность события B:

$$\mathbf{P_A(B) = 2/5}$$

Искомая вероятность того, что оба учебника имеют переплет, по теореме умножения вероятностей равна:

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B) = 1/2 \cdot 2/5 = 0{,}2.$$

3. Разрыв электрической цепи происходит в том случае , когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того , что не будет разрыва цепи , если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3 , 0,4 и 0,6. Как изменится искомая вероятность , если первый элемент не выходит из строя?

Решение.

Искомая вероятность равна вероятности того , что не выйдут из строя все три элемента. Пусть событие A_k означает , что k-й элемент не выйдет из строя (k=1,2,3). Тогда p=P($A_1 A_2 A_3$) . Так как события независимы , то

$$p = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}168.$$

Если первый элемент не выходит из строя , то

$$p = P(A_2 A_3) = 0{,}24.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно

будут работать:

- только один элемент
- только два элемента
- все три элемента

2. Вероьность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

3. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

4. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

5. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают одну. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

3.3. Вероятность наступления хотя бы одного из множества событий

Вероятность наступления события А, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_2, … A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A) = 1 - a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n .$$

Примеры:

1. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны:

   $P_1=0,1$
   $P_2=0,15$
   $P_{3=}$ 0,2

   Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

   Решение

   Элементы включены последовательно, поэтому тока в цепи не будет (событие А), если откажет хотя бы один элемент.

   Искомая вероятность:

   $$P(A) = 1 - (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}2) = 0{,}388.$$

2. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем, каждый делает по две попытки. Выполняющий упражнение первым получает приз.

   Найти вероятность получения приза спортсменами.

Решение

Для вручения приза достаточно, чтобы хотя бы одна из четырех попыток была успешной. Вероятность успешной попытки равна P = 0,5, а неуспешной - 1 – 0,5 = 0,5.

Искомая вероятность равна:

$$\mathbf{P = 1 - a^4 = 0{,}9375.}$$

3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875.
   Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение

Вероятность попадания в мишень хотя бы при одном из трех выстрелов (событие А) равна:

$$\mathbf{P(A) = 1 - a^3},$$

где **a** – вероятность промаха.

По условию P(A) = 0,975. Следовательно:

$$\mathbf{0{,}875 = 1 - a^3}$$

или

$$\mathbf{a^3 = 1 - 0{,}875 = 0{,}125}$$

Отсюда **a =** $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

Вероятность: **P = 1- a = 1 – 0,5 = 0,5**

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08.
   Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

2. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы.
   Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7

3. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2.
   Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

4. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз.
   Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

5. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984.
   Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3.4. Формула полной вероятности

Вероятность события А, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, … B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:

$$\mathbf{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)}$$ - формула полной вероятности

Где $\mathbf{P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1}$

Примеры:

1. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение

Обозначим: **A** – извлечен белый шар

B_1 - белых шаров первоначально не было

B_2 – первоначально был один белый шар

B_3 – первоначально было два белых шара

.

Все три гипотезы равновероятны.. сумма вероятностей гипотез равна единице. Вероятность каждой гипотезы равна:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Условная вероятность извлечения белого шара

Первоначальные условия	Условная вероятность
Белых шаров не было	$\mathbf{P_{B1}(A) = 1/3}$
Первоначально был один белый шар	$\mathbf{P_{B2}(A) = 2/3}$
Первоначально было два белых шара	$\mathbf{P_{B3}(A) = 3/3=1}$

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A) =}$$
$$\mathbf{= 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.}$$

2. В магазин для продажи поступает продукция трех фабрик , относительные доли которых есть : 1 -50% , 2 – 30% и 3 – 20%. Для продукции фабрик брак соответственно составляет : 1 – 2% , 2 – 3% и 3 – 5%. Какова вероятность того , что изделие этой продукции , случайно приобретенное в магазине , окажется доброкачественным (событие А).

Решение.

Здесь возможны следующие три гипотезы:
H_1, H_2, H_3 – приобретенная вещь выработана соответственно на 1, 2, и 3 фабриках ; очевидно , система этих гипотез полная , причем их вероятности

$$P(H_1) = 0{,}5, P(H_2) = 0{,}3, P(H_3) = 0{,}2.$$

Соответствующие условные вероятности события А равны

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98, P_{h_2}(A) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97, P_{H_3}(A) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}97 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 = 0{,}971.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на машине, выбранной наугад.
   Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразить мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7.
   Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет выстрел из винтовки, выбранной наугад.

3. В ящике 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9.
   Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

4. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад взят один шар.
   Найти вероятность того, что взят белый шар.

5. Вероятность того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5.Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9.
   Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

6. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты.
   Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым?

3.5. Формула Бейеса

Допустим, событие **A** может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие **A** уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{Bi}(A)}{P(A)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

где: $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$

Примеры:

1. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

Обозначим: **A** – деталь отличного качества

Можно сделать два предположения (гипотезы):

B_1 – деталь произведена первым автоматом, причем, $P(B_1) = 2/3$

B_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$

.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена:

- первым автоматом **$P_{B1}(A) = 0{,}6$**

- вторым автоматом **$P_{B2}(A) = 0{,}84$**

Вероятность того, что наугад взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

3. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустить ошибку, равна 0,05; для второй перфораторщицны эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица. (Предполагается, что оба перфоратора исправны).

4. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% - с заболеванием L, 20% - с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7; для болезней L и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

5. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведом. Вероятность того, что изделие попадает к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым - 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

3.6. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми относительно события А.***

Вероятность того, что в ***n*** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна ***p(0<p<1),*** событие наступит ровно ***k*** раз (безразлично, в какой последовательности), равно

$$\mathbf{P_n(k) = C^k_n\, p^k\, q^{n-k}}$$

или

$$\mathbf{P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k}}$$

где: $\mathbf{q = 1 - p}$

Вероятность того, что в **n** испытаниях событие наступит:

а) менее **k** раз $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$

б) более **k** раз $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$

в) не менее **k** раз $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$

г) не более **k** раз $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$

Примеры:

1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

   Решение
   Вероятность выигрыша у равносильных шахматистов ***p = 1/2***
   Вероятность проигрыша q ***= 1/2***

Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Вероятность того, что будут выиграны партии:

а) две из четырех: $\mathbf{P_4(2) = C^2{}_4\, p^2\, q^2 = 4{\cdot}3/(1{\cdot}2)\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2 = 6/16}$

б) три из шести:

$$\mathbf{P_6(3) = C^3{}_6\, p^3\, q^3 =} \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{5}{16}.$$

Так как $\mathbf{P_4(2) > P_6(3)}$, то вероятнее выиграть две партии из четырех

.

2. Найти вероятность того , что при 10- кратном бросании монеты герб выпадет ровно 5 раз.

Решение.
Здесь вероятность выпадения герба при одиночном испытании $p=\frac{1}{2}$, отсюда $q=1-p=\frac{1}{2}$.

По формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5)=C_{10}^{5}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}25.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:
   а) выиграть одну партию из двух или две из четырех?
   б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?
   Ничьи во внимание не принимаются.

2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:
   а) менее двух раз.
   б) не менее двух раз.

3. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей:
   а) два мальчика.
   б) не более двух мальчиков
   в) более двух мальчиков
   г) не менее двух и не более трех мальчиков.

Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

3.7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

3.7.1 Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что в **_n_** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна ***p(0 < p <1)***, событие наступит ровно **_k_** раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \text{где}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции **φ(*x*)** для положительных значений ***x*** приведена в приложении 1; для отрицательных зничений пользуются этой же таблицей [функция **φ(*x*)** четная, следовательно, **φ(-*x*) = φ(*x*)].**

3.7.2 Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна **_p_(0 < _p_ < 1)**, событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна:

$$P(k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

где:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz -$$ функция Лапласа.

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений ***x*(0≤*x*≤5)** приведена в приложении 2; для значений ***x*>5** полагают Φ(*x*) = 0,5. Для отрицательных значений ***x*** используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная

[ф(-*x*)= - ф(*x*)]

Примеры:

1. Найти вероятность того, что событие **А** наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

   Решение

   По условию: ***n* = 243**

   ***k* = 70**

   ***p* = 0,25**

   ***q* = 0,75**

   Так как ***n* = 243** – достаточно большое число, воспользуемся локально теоремой Лапласа:

Найдем значение x

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

φ (1,37) = 0,1561

P_{243} (70) = $\frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8.
   Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,51.
   Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

3. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна ***p = 0,8.***
   Найти вероятность того, что событие появится:
   а) не менее 75 раз и не более 90 раз
   б) не менее 75 раз
   в) не более 74 раз

4. Вероятность появления события в каждом их независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Законы биномиальный и Пуассона

Дискретная величина - случайная величина, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями, без промежуточных значений между ними;
число возможных значений дискретной случайной величины может быть:
- конечным
- бесконечным (множество всех возможных значений называют счетным)

Закон распределения дискретной случайной величины - перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей;
закон распределения **X** может быть задан:
1. в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_1	. . .	x_n
p	p_1	p_2	. . .	p_n

если множество возможных значений **X** бесконечно (счетно), то ряд p_1 p_2 .

. . p_n сходится и его сумма равна единице.

2. графически

а) в прямоугольной системе координат

- строят точки:

$$M_1(x_1;p_1),\ M_2(x_2;p_2),\ ...\ M_1(x_n;p_n)$$

x_i - возможные значения **X**

p_i - соответствующие вероятности

б) соединяют эти точки отрезками прямых

Полученная фигура называется ***многоугольник распределения***

Биномиальный закон - закон распределения дискретной случайной величины **X** – числа появлений события в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна ***p;*** вероятность возможного значения **X=k** (числа **k** появлений события) вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C^k_n \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Если число испытаний велико, а вероятность ***p*** появления событий в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу:

$$P_n(k) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda}/k!$$

где:

k – число появлений

события в n испытаниях

$\lambda = n \cdot p$ – среднее число появлений события в n испытаниях (случайная величина распределена по закону **Пуассона**)

Пример: Дискретная случайная величи-на **X** задана законом распре-деления:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить прямоугольник распределения

Решение: Построим прямоугольную систему координат, причем, по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие вероят-ности p_i.

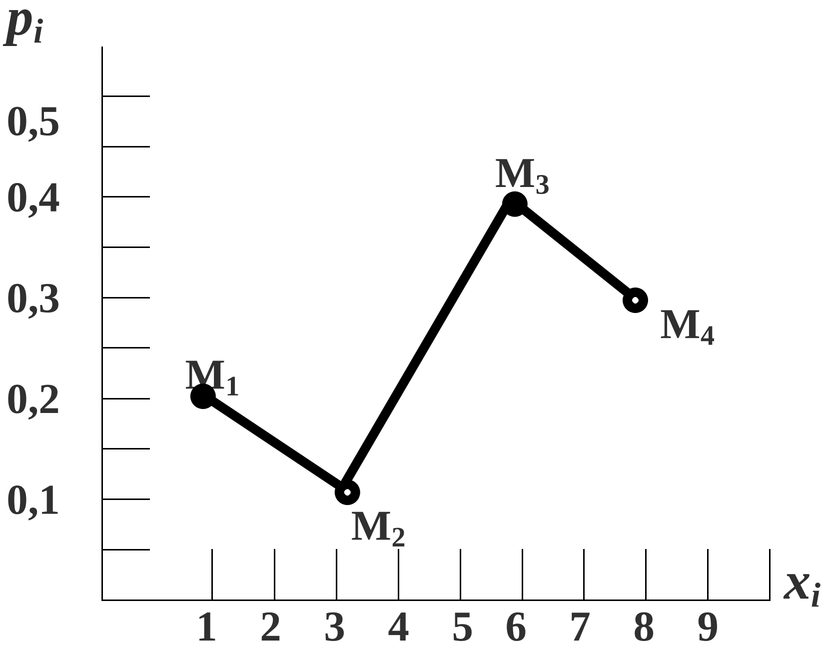
Построим точки : $\mathbf{M_1(1;0,2)}$

$\mathbf{M_2(3;0,1)}$

$\mathbf{M_3(6;0,4)}$

$\mathbf{M_4(8;0,3)}$

Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения



Пример.При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0б01ю Какова вероятность , что в партии из 100 изделий этой продукции 2 изделия будут нестандартными?
Решениею Здесь вероятность p=0,01 мала , а число n=100 велико , причем λ=np=1.
Используя закон Пуассона для искомой вероятности , получаем следующее значение:

$$P_{100}(2) \approx \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Дискретная случайная величина ***X*** задана законом распределения:

а)

X	**2**	**4**	**5**	**6**
p	**0,3**	**0,1**	**0,2**	**0,4**

б)

X	**10**	**15**	**20**
p	**0,1**	**0,7**	**0,2**

   Построить многоугольник распределения.

2. Устройство состоит из 3-х независимо работающих элементов.
   Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1
   Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

3. В партии 10% нестандартных деталей.
   Наудачу отобраны 4 детали.
   Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ***X*** – числа нестандартных деталей среди 4-х отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

4. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ***X*** – числа появлений “герба” при двух бросаниях монеты.

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных.
   Наудачу отобраны 2 детали.
   Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

6. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных.
   Наудачу отобраны 3 детали.

Составить закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа стандартных деталей среди отобранных.

7. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле равна 0,8.
   Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется.
   Требуется:
   а) составить закон распределения дискретной случайной величины $\boldsymbol{X}$ – числа патронов, выданных стрелку
   б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

8. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров.
   Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.
   Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

9. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого.
   Вероятность отказа любого элемента в течение времени $\boldsymbol{T}$ равна 0,002.
   Найти вероятность того, что за время $\boldsymbol{T}$ откажут ровно 3 элемента.

10. Станок-автомат штампует детали.
    Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01.
    Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

11. Завод отправил на базу 500 изделий.
    Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002.
    Найти вероятности того, что в пути будет повреждено

изделий:
а) равно три;
б) менее трех;
в) более трех;
г) хотя бы одно.

13. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, равна 0,003.
Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок:
а) ровно две;
б) менее двух;
в) более двух;
г) хотя бы одну.

1.2. Простейший поток событий

Поток событий	-	последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени
Простейший (пуассоновский) поток событий	-	поток событий, который обладает тремя свойствами: - Стационарность - “Отсутствие последействия” - Ординарность
стационарность	-	вероятность появле-ния **k** событий в любом промежутке времени зависит только от числа **k** и от длительности промежутка времени и не зависит от начала его отсчета
“отсутствие последействия”	-	вероятность появле-ния **k** событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события перед рассматриваемым промежутком времени
ординарность	-	появление 2-х или более событий за малый промежуток времени практически невозможно
Интенсивность потока λ	-	среднее число событий, появляющееся в единицу времени

Если **λ** известна, то вероятность появления **k** событий простейшего потока за время **t** определяется формулой Пуассона:

$$\mathbf{P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}}$$

Замечание Поток, обладающий свойством стационарности, называется **стационарным**, в противном случае **- не стационарным**

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3.
   Найти вероятность того, что за 2 мин поступи:
   - а) 4 вызова
   - б) менее 4-х вызовов
   - в) не менее 4-х вызовов

2. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 минуту, равно 2.
   Найти вероятность того, что за 4 мин поступит:
   - а) 3 вызова
   - б) менее 3-х вызовов
   - в) не менее 3-х вызовов

   поток вызовов предполагается простейшим.

3. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток.
   Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит:
   - а) хотя бы одну опечатку
   - б) ровно 2 опечатки
   - в) не менее 2-х опечаток

2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание - Сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$\mathbf{M(X)} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то:

$$\mathbf{M(X)} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot p_i$$

2.1.1. Свойства математического ожидания

1. Мат. ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$\mathbf{M(C) = C}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак мат. ожидания:

$$\mathbf{M(CX)=CM(X)}$$

3. Мат. ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$\mathbf{M(X_1 \cdot X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)}$$

4. Мат. ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np$$

2.2. Дисперсия

Дисперсия - Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M[X-M(X)]^2$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

2.2.1. Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n) = D(X_1) + D(X_2) +\ldots+D(X_n)$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины - Квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОРАБОТКИ

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

2. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины **X** - числа нестандартных деталей среди 2-х отобранных.

3. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины **X,** заданной законом распределения:

X	**-5**	**2**	**3**	**4**
P	**0,4**	**0,3**	**0,1**	**0,2**

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0, 3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0, 2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518

1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0949	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции Φ(x)

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0, 0000	0,20	0,0793	0,40	0,1554	0,60	0,2257
0,01	0, 0040	0,21	0,0832	0,41	0,1591	0,61	0,2291
0,02	0, 0080	0,22	0,0871	0,42	0,1628	0,62	0,2324
0,03	0, 0120	0,23	0,0910	0,43	0,1664	0,63	0,2357
0,04	0, 0160	0,24	0,0948	0,44	0,1700	0,64	0,2389
0,05	0, 0199	0,25	0,0987	0,45	0,1736	0,65	0,2422
0,06	0, 0239	0,26	0,1026	0,46	0,1772	0,66	0,2454
0,07	0, 0279	0,27	0,1064	0,47	0,1808	0,67	0,2486
0,08	0, 0319	0,28	0,1103	0,48	0,1844	0,68	0,2517
0,09	0, 0359	0,29	0,1141	0,49	0,1879	0,69	0,2549
1,00	0, 0398	0,30	0,1179	0,50	0,1915	0,70	0,2580
0,11	0, 0438	0,31	0,1217	0,51	0,1950	0,71	0,2611
0,12	0, 0478	0,32	0,1255	0,52	0,1985	0,72	0,2642
0,13	0, 0517	0,33	0,1293	0,53	0,2019	0,73	0,2673

0,14	0, 0557	0,34	0,1331	0,54	0,2054	0,74	0,2703
0,15	0, 0596	0,35	0,1368	0,55	0,2088	0,75	0,2734
0,16	0, 0636	0,36	0,1406	0,56	0,2123	0,76	0,2764
0,17	0, 0675	0,37	0,1443	0,57	0,2157	0,77	0,2794
0,18	0, 0714	0,38	0,1480	0,58	0,2190	0,78	0,2823
0,19	0, 0753	0,39	0,1517	0,59	0,2224	0,79	0,2852

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,80	0, 2881	1,03	0,3485	1,26	0,3962	1,49	0,4319
0,81	0, 2910	1,04	0,3508	1,27	0,3980	1,50	0,4332
0,82	0, 2939	1,05	0,3531	1,28	0,3887	1,51	0,4345
0,83	0, 2967	1,06	0,3554	1,29	0,4015	1,52	0,4357
0,84	0, 2995	1,07	0,3577	1,30	0,4032	1,53	0,4370
0,85	0, 3023	1,08	0,3599	1,31	0,4049	1,54	0,4382
0,86	0, 3051	1,09	0,3621	1,32	0, 4066	1,55	0,4394
0,87	0, 3078	1,10	0,3643	0,33	0,4082	1,56	0,4406
0,88	0, 3106	1,11	0,3665	0,34	0,4099	1,57	0,4418
0,89	0, 3133	1,12	0,3686	0,35	0,4115	1,58	0,4429
0,90	0, 3159	1,13	0,3708	0,36	0,4131	1,59	0,4441
0,91	0, 3186	1,14	0,3729	0,37	0,4147	1,60	0,4452
0,92	0, 3212	1,15	0,3749	0,38	0,4162	1,61	0,4463
0,93	0, 3238	1,16	0,3770	0,39	0,4177	1,62	0,4474
0,94	0, 3264	1,17	0,3790	1,40	0,4192	1,63	0, 4484
0,95	0, 3289	1,18	0,3810	1,41	0,42007	1,64	0, 4495

0,96	0, 3315	1,19	0,3830	1,42	0,4222	1,65	0, 4505
0,97	0, 3340	1,20	0,3849	1,43	0,4236	1,66	0, 4515
0,98	0, 3365	1,21	0,3869	1,44	0,4251	1,67	0, 4525
0,99	0, 3389	1,22	0,3883	1,45	0,4265	1,68	0, 4535
1,00	0, 3413	1,23	0,3907	1,46	0,4279	1,69	0, 4545
1,01	0, 0,3438	1,24	0,3925	1,47	0,4292	1,70	0, 4554
1,02	0, 0,3461	1,25	0,3944	1,48	0,4306	1,71	0, 4564

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,72	0, 4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0, 4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0, 4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0, 4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0, 4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0, 4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0, 4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0, 4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0, 4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0, 4649	2,08	0, 4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0, 4656	2,10	0, 4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0, 4664	2,12	0, 4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0, 4671	2,14	0, 4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0, 4678	2,16	0, 4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928

1,86	0, 4686	2,18	0, 4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0, 4693	2,20	0, 4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0, 4699	2,22	0, 4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0, 4607	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0, 4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		
1,91	0, 4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969		
1,92	0 4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971		
1,93	0 4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973		
1,94	0 4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974		