1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Теория игр – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций. **Содержание теории игр**: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта), доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация. Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой. Все такие модели в теории игр принято называть **играми.**

Игры можно классифицировать по различным признакам: стратегические и чисто случайные, бескоалиционные и коалиционные, игры 1, 2, …, n лиц (по числу игроков), конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме и динамические, с нулевой суммой («антагонистические») и с ненулевой суммой.

Матричной игрой называется модель конфликтной ситуации, в которой участвуют два лица, называемые игроками. Игра ведётся по определённым правилам, в соответствии с которыми каждый из игроков принимает определённые действия (ходы, стратегии).

В матричной игре заданы конечные множества чистых стратегий обоих игроков Х=$\{1,\dots,m\}$ **и** У=$\{1,\dots,n\}$. Каждой чистой стратегии игрока I (первого игрока) ставится в соответствие строка матрицы, а чистой стратегии игрока II (второго игрока) – её столбец. Элемент a_{ij} этой матрицы характеризует платёж игроку I игроком II в ситуации (i, j), т.е. когда игрок I выбрал i-ю свою стратегию, а игрок II j-ю свою стратегию. Матрица $A=(a_{ij})_{m,n}$ называется поэтому платёжной матрицей игры или матрицей выигрышей игрока I. Если элемент a_{ij} положителен, то он показывает выигрыш игрока I (проигрыш игрока II) в ситуации (i, j), если же элемент a_{ij} отрицателен, то это означает проигрыш игрока I (выигрыш игрока II). Пару (x,y) называют ситуацией в игре $Г$.

Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий: $X=M=\{1,2, \dots, m\}$, $Y=N=\{1,2, \dots, n\}$. Тогда игра $Г$ полностью определяется заданием матрицы $A=(a_{ij})_{m,n}$, где $a_{ij}=\mathrm{M}(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) i, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) j (эти стратегии называют **чистыми**).

Рассмотрим пример. Матрица игры $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Цель каждого игрока – получить как можно больший выигрыш. Но 1-му игроку нет смысла выбирать стратегию $i=1$ в надежде выиграть 5 ед., так как 2-й игрок, действуя разумно, не станет выбирать стратегию $j=2$, чтобы не проиграть максимальную сумму 5 ед. Игрокам удобнее выбрать «осторожные» стратегии.

Пусть $A=(a_{ij})_{m,n}$ – платежная матрица игры $Г$. Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min_j a_{ij}$. Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max_i \min_j a_{ij}$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или максимин, соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной. Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min_j \max_i a_{ij}$, обозначим его $\overline{v}$ – верхняя цена игры, или минимакс, соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной. Схема:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\left.\begin{matrix} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \cdots \\ \min\limits_j a_{mj} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \ \cdots \quad \max_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \overline{v}}$$

Пример 1. Задана платежная матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$. Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \rightarrow \underline{v}=-3$$

$$4 \quad 4 \quad 6 \quad \rightarrow \overline{v}=4.$$

Соответствующие стратегии игроков i_0=1 (максиминная), j_0=1,2 (минимаксная). Справедливо неравенство: $\underline{v} \le \overline{v}$.

В игре Γ считать **оптимальной** нужно такую ситуацию (i,j), от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться. Ситуация (i^*,j^*) называется ***ситуацией равновесия***, или ***седловой точкой***, если для любых $i \in M, j \in N$, выполняется неравенство $a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$. Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число v называется ценой игры. Элемент $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v}=\overline{v}$ (это значение и является ценой игры v).

Например,

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \rightarrow \overline{v}=\underline{v}=4$$

$$5 \quad 5 \quad 4 \quad 20$$

(2,3) – ситуация равновесия, v=4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Игра может быть многоходовой (состоящей из многих партий). В этом случае результаты игры оцениваются средним выигрышем за одну партию, т.е. суммарный выигрыш делится на количество сыгранных партий.

Целью каждого игрока является такое поведение в игре, которое гарантирует ему наибольший ожидаемый средний выигрыш при достаточно большом количестве партий. Такое поведение игрока называется ***оптимальной стратегией***.

В многоходовой игре игроки принимают различные свои чистые стратегии, причем некоторые из них чаще (в большем числе партий), другие – реже. Поведение игрока, при котором он с определённой частотой или вероятностью случайно чередует все свои чистые стратегии, называется ***смешанной стратегией***.

Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1, 2, \ldots, m$.

Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Множества всех смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков будем обозначать соответственно Sm и Sn.

Чистые стратегии можно рассматривать как частный случай смешанных стратегий. Пару смешанных стратегий (x,y) называют **ситуацией** в смешанных стратегиях.

Функция выигрыша $M(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$: $M(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$.

Если для некоторых $x^* \in S_m$ и $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ выполняется неравенство $M(x,y^*) \leq M(x^*,y^*) \leq M(x^*,y)$, то x^*, y^* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков, число $v = M(x^*,y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x^*, y^*) – **стратегической седловой точкой**, а тройка x^*, y^*, v – **решением игры**.

Основная теорема теории матричных игр (теорема о минимаксе).

Если $A=(a_{ij})_{m,n}$ – матрица игры $Г$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ $M(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, то величины $\max_{x\in S_m}\min_{y\in S_n} M(x,y)$ и $\min_{y\in S_n}\max_{x\in S_m} M(x,y)$ существуют и равны между собой (эта величина и является ценой игры v).

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

2. ИГРЫ (2 x 2)

Простейшей матричной игрой является игра, в которой каждый из игроков имеет по две чистых стратегии. Платежная матрица А такой игры имеет порядок (2х2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Легко показать, что матрица А не имеет седловой точки тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) $a_{11} < a_{12}$, $a_{11} < a_{21}$, $a_{22} < a_{12}$, $a_{22} < a_{21}$

2) $a_{11} > a_{12}$, $a_{11} > a_{21}$, $a_{22} > a_{12}$, $a_{22} > a_{21}$

Эти соотношения означают, что элементы, принадлежащие главной диагонали матрицы, должны быть меньше (или больше) каждого из двух элементов побочной диагонали.

Если платежная матрица (любого порядка) имеет седловую точку, т.е. содержит элемент $a_{i_0 j_0}$, который одновременно является минимальным в строке i_0 и максимальным в столбце j_0, то матричная игра полностью определена. В этом случае каждый игрок применяет свою оптимальную стратегию:

для *I* игрока: «выбрать строку, содержащую $a_{i_0 j_0}$»

для *II* игрока: «выбрать столбец, содержащий $a_{i_0 j_0}$»

Ценой игры $\mathcal{V}$ будет элемент $a_{i_0 j_0}$

Решение игры, матрица, которой имеет седловую точку, находится так легко, потому что каждый игрок знает оптимальную стратегию своего противника и, следовательно, знает, что ему делать. Возникает вопрос, как следует играть в случае, когда матрица игры не содержит седловой точки? Для выяснения этого вопроса рассмотрим пример: по данному сигналу каждый из двух игроков одновременно показывает один или два пальца; если общее число показанных пальцев четно, то *I* игрок получает сумму очков равную этому числу, а если нечетно, то *II* игрок получает сумму очков равную этому числу.

Постановку изложенной задачи можно записать в виде следующей таблицы.

		Выбор *II* игрока	
	Число пальцев	1	2
Выбор	1	2	-3
I игрока	2	-3	4

Таким образом, условия игры полностью определяются матрицей, строки которой соответствуют возможным выборам (стратегиям) игрока *I*, а столбцы – возможным выборам (стратегиям) игрока *II*: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Как только первый игрок выбирает строку, а второй игрок – столбец, партия заканчивается, и *I* игрок выигрывает число очков, стоящих на пересечении выбранных строки и столбца (или проигрывает, если это число отрицательное, т.е. выигрывает *II* игрок).

Пусть задана платежная матрица игры: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Если она **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры Г можно найти следующими способами:

1) Составить и решить системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

2) Используя формулы:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \; x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \; (\text{или } x_2 = 1 - x_1);$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \; y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \; (\text{или } y_2 = 1 - y_1);$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

3) В матричной форме:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T}, \qquad y^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}, \qquad v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, $A*$ – присоединенная к A матрица, $J = (1)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, J^T и y^T – транспонированные матрицы J и y.

Найдем решение игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, которая **не имеет седловой точки**.

1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v \\ 2y_1 + 4y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v \\ -x_1 + 4x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решив системы, получим: $y_1 = \frac{5}{6}$, $y_2 = \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $v = \frac{7}{3}$.

Значит, решение игры $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $v = \frac{7}{3}$.

2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \; x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6}; \; y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}; \; v = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

3) Найдем решение в матричной форме:

$$|A| = 12 + 2 = 14, \; A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; JA^* = (1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 4),$$

$$JA^*J^T = (2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6, \qquad A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot (2 \quad 4) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Решая задачу любым способом, результат получаем одинаковым.

3. Игры $(2\text{x}n)$ и $(n\text{x}2)$

Пример 2.1. Рассмотрим игру с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Если 1-й игрок применит смешанную стратегию $x^* = (x, 1 - x)$, а 2-й игрок – чистую стратегию $j = 1$, то

$$M(x^*,1) = 2x + 4(1-x) \quad (1)$$

Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий $j = 2, j = 3, \; j = 4$

$$M(x^*,2) = 3x + 1(1-x) \quad (2)$$

$$M(x^*,3) = 1x + 6(1-x) \quad (3)$$

$$M(x^*,4) = 5x + 0(1-x) \quad (4)$$

Построим прямые (1), (2), (3), (4) по двум точкам, придавая x значения 0 и 1. Оптимальная стратегия 1-го игрока – его максиминая стратегия, которая соответствует самой высокой точке А, выделенной на рис.1 нижней границы. Абсцисса этой точки – искомое значение *x,* ордината этой точки – значение *v*.

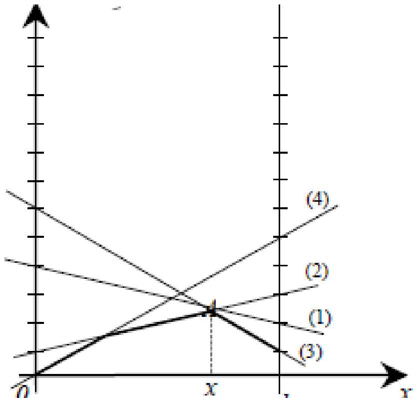

Рис.1

Точка А является точкой пересечения прямых (2), (3), поэтому решение исходной системы можно найти из $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

По формулам решения игры (2х2) получим:

$$x_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}, \; x_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7};$$

$$y_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}, \; y_2 = \frac{2}{7}; \; v = \frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot 1}{3+6-1-1} = \frac{17}{7}.$$

Тогда решение исходной игры имеет вид $x^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $y^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$, (номерами столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые координаты вектора y^*), $v = \frac{17}{7}$.

Пример 2.2. Рассмотрим игру с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Если 2-й игрок применит смешанную стратегию $y^* = (y, 1-y)$, а 1-й игрок – чистую стратегию $j = 1,2,3$, то

$$M(1, y^*) = 3y + 2(1-y) \quad (1)$$

$$M(2, y^*) = 1y + 5(1-y) \quad (2)$$

$$M(3, y^*) = 4y + 1(1-y) \quad (3)$$

Построим прямые (1), (2), (3) по двум точкам, придавая *y* значения 0 и 1. Оптимальная стратегия 2-го игрока – его мминимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке В, выделенной на рис.2 нижней границы. Абсцисса этой точки – искомое значение *y,* ордината этой точки – значение *v*.

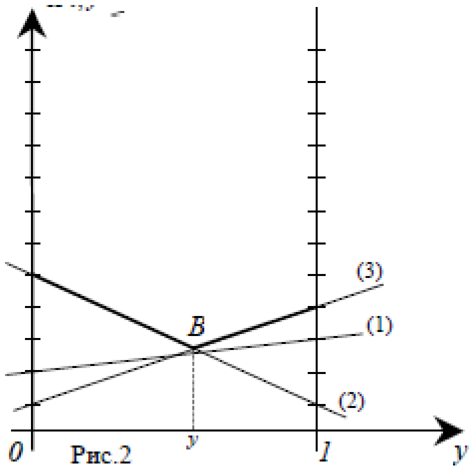

Рис.2

Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$x_1 = \frac{1-4}{1+1-4-5} = \frac{3}{7},$$
$$x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7};$$
$$y_1 = \frac{1-5}{1+1-4-5} = \frac{4}{7}, \qquad y_2 = \frac{3}{7};$$
$$v = \frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{1+1-4-5} = \frac{19}{7}.$$

Тогда решение исходной игры:

$$x^* = \left(0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right), \; y^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \; v = \frac{19}{7}.$$

Пример 2.3. Платежная матрица игры $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Построим прямые (1), (2), (3) рис.3. На выделенной нижней границе есть горизонтальный участок AB, все точки которого имеют одну и ту же максимальную ординату.

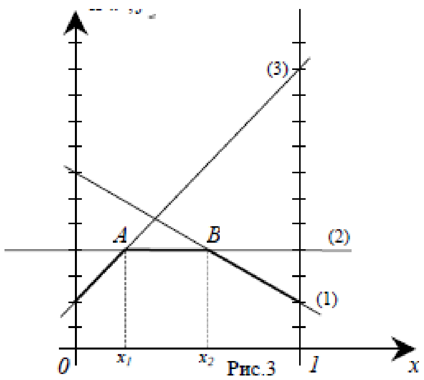

Рис.3

Точка пересечения A является пересечением прямых (2) и (3), ее асциссу найдем составив матрицу $A' = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Откуда $x_1 = \frac{2-4}{4+2-4-11} = \frac{2}{9}$.

Точка B – это точка пересечения прямых (1) и (2), ее абсциссу найдем, решив игру $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. А значит, $x_2 = \frac{4-7}{2+4-7-4} = \frac{3}{5}$.

Решение исходной игры: $x^* = (x, 1-x)$, где $x \in [\frac{2}{9}, \frac{3}{5}]$, $y^* = (0,1,0)$, $v = 4$.

Что означает – 1-ый игрок имеет множество оптимальных страрегий, 2-ой игрок – единственную оптимальную стратегию (чистая стратегия $j = 2$, т.к. только она участвует в образовании отрезка АВ), цена игры – ордината точек отрезка АВ.

Значения v и y^* можно получить и используя формулы решения игр 2х2 для матриц A' и A''.

4. ДОМИНИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ

Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Например, в игре с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1-му игроку не стоит выбирать стратегию *i*=3, т.к. здесь выигрыш минимальный – 1, лучше выбрать *i*=2 (какую бы стратегию ни выбрал 2-й игрок), а 2-ому игроку не стоит выбирать *j*=3 (т.к. проигрыш будет максимальный – 9), лучше выбрать *j*=1. В результате вместо игры матрицей *A* можно рассмотреть игру A' с матрицей $A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. Решение игры в этом случае будет: $x^* = \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$, $v = \frac{53}{11}$. Можно предположить, что решение игры, заданной матрицей *A* будет иметь вид: $x^* = \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}, 0\right)$, $v = \frac{53}{11}$.

Говорят, что i-я стратегия 1-го игрока доминирует его k-ю стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \in N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$. В этом случае говорят также, что i-я стратегия (или строка) – доминирующая, *k*-я – доминируемая.

Говорят, что *j*-я стратегия 2-го игрока доминирует его *l*-ю стратегию, если для всех $i \in M$ $a_{ij} \leq a_{kl}$ и хотя бы для одного i $a_{ij} < a_{kl}$. В этом случае *j*-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, *l*-ю – доминируемой.

В предыдущем примере 2-я стратегия 1-го игрока доминирует его 3-ю стратегию, 1-я стратегия 2-го игрока доминирует его 3-ю стратегию.
Доминируемые стратегии исключаются из матрицы игры.

Стратегия может доминироваться также выпуклой линейной комбинацией других стратегий. Так, i-я стратегия 1-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \leq \sum_{k \neq i} \alpha_k a_{kj}$; j-я стратегия 2-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \geq \sum_{l \neq j} \alpha_l a_{il}$.

Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 3-я строка строго доминируется выпуклой линейной комбинацией 1-ой и 2-ой строк с коэффициентами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$; $a_3 < \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{4}a_2$, поэтому вместо игры с матрицей А можно рассмотреть игру

$$A' = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдя ее решение, получим решение игры А: $x^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $v = 6$.

Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in S_k$ – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на i-ом месте будем называть стратегию вида $\overline{x_i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_1, \dots, x_k) \in S_{k+1}$.

Справедлива **теорема**: пусть Γ_A – $(m \times n)$ – игра, в которой i-я строка доминируема, $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей *A'* , полученной из *A* вычеркиванием i-ой строки. Тогда

1) $v_A = v_{A'}$

2) всякая оптимальная стратегия 2-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$ является оптимальной и в игре Γ_A
3) если x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$, , то $\overline{x_i^*}$ – его оптимальная стратегия в игре Γ_A.

Аналогичная теорема имеет место для доминируемого столбца.

5. МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Множества оптимальных стратегий 1-го и 2-го игроков (T_1 и T_2) – непустые ограниченные выпуклые и замкнутые подмножества соответственно m-мерного и n-мерного пространств. Из выпуклости следует, что если T_1 (T_2) имеет более одного элемента, то оно имеет бесконечное число элементов, то есть матричная игра имеет либо только одно, либо бесконечное множество решений.

Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей A, нужно рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы A. Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры. Множество всех решений каждого игрока является выпуклой линейной комбинацией найденных решений.

Решение игры, заданной **квадратной** подматрицей B, можно найти в матричном виде по формулам $v = \frac{|B|}{JB^*J^T}$; $x = \frac{JB^*}{JB^*J^T}$; $y^T = \frac{B^*J^T}{JB^*J^T}$.

Найдем множество всех решений игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Подматрицы (1×1) не дадут решений, так как матрица A не имеет седловых точек. Рассмотрим подматрицы: (2×2):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для B: $v_B = 1,\ x_B = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right),\ y_B = (0; 1)$. Тогда решением исходной игры (убеждаемся в этом проверкой) является $v_A = 1,\ x_A = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right),\ y_A = (0; 1;\ 0)$.

Для C: $v_C = 1,\ x_C = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right),\ y_C = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. И решением исходной игры является $v_A = 1,\ x_A = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right),\ y_A = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Для D получим такое же решение, как для B.

Таким образом, в заданной игре 1-й игрок имеет единственную оптималь- ную стратегию $x^* = \left(\frac{1}{2,}, \frac{1}{2}\right)$, 2-й игрок имеет множество оптимальных стратегий

$y^* = \alpha_1(0; 1; 0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2; \alpha_1; \frac{1}{2}\alpha_2\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Цена игры $v = 1$.

6. СВЕДЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$M = M(x, y)$ – функция выигрыша, $v \in R$, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$.
Тогда по свойству 2 оптимальных стратегий для любых $i \in M, j \in N$ должно выполняться условие $M(i, y^*) \le v \le M(x^*, j)$, то есть

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le v, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le v, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \\ y_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge v, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge v, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Разделив все уравнения и неравенства обеих систем на v, обозначим $\frac{x_i}{v} = p_i$, $\frac{y_i}{v} = q_j$. Заметим, что цена игры v при этом должна быть положительна, в противном случае нужно предварительно к матрице A применить лемму о масштабе. Учитывая, что цель 1-го игрока – максимизировать, а цель 2-го – минимизировать величину v, приходим к двойственной задаче линейного программирования с целевой функцией $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1, \\ q_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \frac{1}{v} \to \max \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{1}{v} \to \min$$

Решив задачу симплексным методом и вернувшись к переменным x и y, получим решение матричной игры.

Пример. Найти решение игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Перейдем к положительной матрице, прибавив 3 ко всем элементам матрицы А: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Составим двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \le 1 \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \le 1 \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \le 1 \\ q_j \ge 0, \ j = 1,2,3; \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \le 1 \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \le 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \le 1 \\ p_i \ge 0, \ i = 1,2,3; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to max \qquad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{v} \to min$$

Решим задачу симплекс-методом:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 + q_4 = 1 \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_5 = 1 \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_6 = 1 \\ q_j \ge 0, \qquad j = 1,2,3,4,5,6; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to max$$

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я итерация	q_4	0	1	1	1	3	1	0	0
	q_5	0	1	1	3	2	0	1	0
	q_6	0	1	3	2	2	0	0	1
			0	-1*	-1	-1	0	0	0
2-я итерация	q_4	0	2/3	0	1/3	7/3	1	0	-1/3
	q_5	0	2/3	0	7/3	4/3	0	1	-1/3
	q_1	1	1/3	1	2/3	2/3	0	0	1/3
			1/3	0	-1/3*	-1/3	0	0	1/3
3-я итерация	q_4	0	4/7	0	0	15/7	1	-1/7	-2/7
	q_2	1	2/7	0	1	4/7	0	3/7	-1/7
	q_1	1	1/7	1	0	2/7	0	-2/7	3/7
			3/7	0	0	-1/7*	0	1/7	2/7
4-я итерация	q_3	1	4/15	0	0	1	7/15	-1/15	-2/15
	q_2	1	2/15	0	1	0	-4/15	7/15	-1/15
	q_1	1	1/15	1	0	0	-2/15	-4/15	7/15
			7/15	0	0	0	1/15	2/15	4/15

Решение двойственной задачи $p = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}\right)$, $q = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}\right)$, $\frac{1}{v} = \frac{15}{7}$.

Решение исходной игры $x^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $v = -\frac{6}{7}$.