

Лекция 7. Элементы теории игр

Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории игр
2. Игры двух лиц с нулевой суммой
3. Смешанные стратегии
4. Игры с ненулевой суммой и кооперативные игры
5. Игры с природой

Пример решения экономической задачи методами теории игр

Вопрос 1. Основные понятия теории игр

Предметом теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия.

Классическими примерами являются ситуации, где, с одной стороны имеется один покупатель, а с другой – продавец (ситуация монополия-монопсония), когда на рынок выходят несколько производителей (олигополия, дуополия). Более сложные ситуации возникают, если имеются объединения или коалиции лиц, участвующих в столкновении интересов.

Подробнее

Прикладная теория матричных игр впервые была систематически изложена Дж. фон Нейманом и О. Монгерштерном в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-х годах. Эта книга содержала, главным образом, экономические примеры, но в период второй мировой войны она самым серьезным образом заинтересовала военных, которые увидели в этой теории оригинальный метод исследования стратегических решений. Затем главное внимание снова стало уделяться экономическим проблемам.

В итоге, всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему черты конфликта, т.е. описывать:

- 1) множество заинтересованных сторон (игроков, субъектов, участников, сторон, лиц);*
- 2) возможные действия каждой из сторон, именуемые также стратегиями или ходами;*
- 3) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков*

Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его экономическую модель, которая называется игрой.

Теория игр — это математическая дисциплина, исследующая ситуации, в которых принятие решений зависит от нескольких участников.

Интересы участников могут быть как антагонистические (полностью противоположные), так и неантагонистические. В последнем случае может исследоваться вопрос о наиболее эффективных совместных действиях (кооперативные игры).

Игра — это упрощенная формализованная модель реальной ситуации, описывающая действия двух или более участников.

Предполагается, что известны варианты действий сторон (стратегии), исход игры для каждого участника в случае выбора конкретных действий всеми участниками, степень и порядок информированности каждого участника игры о поведении всех других участников.

Подробнее

В теории игр предполагается, что каждый игрок знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков, и в соответствии с этой информацией организует свое поведение.

Приведем **классификацию игр** в зависимости от различных параметров.



Рисунок 1 **Классификация игр** в зависимости от различных параметров

Кроме этого выделяются различные классы игр по иным признакам (статистические, дифференциальные и многие другие).

Подробнее

В частности рассматриваются так называемые «игры с природой», т.е. игры, когда в качестве второго игрока выступает не игрок с противоположными интересами, а некоторая сторона с «неопределенными» интересами (природа). В этом случае для поиска оптимальных стратегий используются наряду с принципом гарантированного результата и другие

критерии, например Максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица, которые рассматриваются далее.

Вопрос 2 Игры двух лиц с нулевой суммой

Игра двух лиц с нулевой суммой задается следующими условиями:

- имеются два игрока, стратегии одного из которых расположены по строкам (первый игрок), а другого по столбцам (второй игрок);
- каждый игрок выбирает одну из своих стратегий независимо от другого: первый одну из m стратегий, второй одну из n ;
- если первый игрок выбирает стратегию i , а второй стратегию j , то первый игрок получает выигрыш a_{ij} , который интерпретируется как платеж от второго игрока.

Такая игра называется игрой двух лиц с нулевой суммой и представляется в виде матрицы игры (табл. 1), которая содержит выигрыши первого игрока (или, как отмечалось, проигрыши второго игрока).

Таблица 1 – Пример матрицы игры

	Стратегия 1 Игрока 2	Стратегия 2 Игрока 2		Стратегия n Игрока 2
Стратегия 1 Игрока 1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
Стратегия 2 Игрока 1	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.....				
Стратегия m Игрока 1	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Подробнее

В табл. 2 приведена некоторая конкретная матрица игры, согласно которой выигрыш первого игрока составит 2 единицы, если первый игрок выберет свою вторую стратегию, а второй игрок свою первую стратегию.

Таблица 2

	Стратегия 1	Стратегия 2	Стратегия 3	Стратегия 4
Стратегия 1	1	2	3	-1
Стратегия 2	2	1	-2	0

В игре с нулевой суммой сумма выигрышей игроков всегда равна нулю. Как уже отмечалось, плательщиком выигрыша первого игрока является второй игрок. Таким образом, какая-либо кооперация между ними невозможна.

Предполагается, что каждый из игроков знает стратегию своего противника и платежную матрицу игры.

Подробнее

Рассмотрим с этой точки зрения некоторую конкретную игру (табл.3).

Таблица 3 – Матрица игры

	Стратегия 1	Стратегия 2	Стратегия 3	Минимум по строкам
Стратегия 1	4	4	10	4
Стратегия 2	2	3	1	1
Стратегия 3	6	5	7	5
Максимум по столбцам	6	5	10	

Как должен играть первый игрок? Если первый игрок выберет свою первую стратегию, то второй игрок, очевидно, выберет первую или вторую, поскольку в этом случае его потери будут минимальными - 4 единицы. Значение «4» является минимальным в первой строке. Рассуждая аналогично, легко видеть, что если первый игрок выбирает свою третью стратегию, то второй выбирает 3-ю, проигрывая при этом 1. Если первый игрок выбирает стратегию 2, то второй стратегию 2 с проигрышем 5. В крайнем правом столбце таблицы записаны минимумы по строкам. Логично предположить, что первый игрок будет выбирать стратегию, обеспечивающую ему выигрыш максимального из этих значений.

Мы доказали, что первый игрок может гарантированно выиграть, по крайней мере, 5 единиц. Он понимает, что на большее он рассчитывать не может, так как, выбирая стратегию 2, второй игрок обеспечивает выигрыш первого не более 5.

Матрица удовлетворяет **условию седловой точки** в том случае, если: **max (минимумы по строкам) = min (максимум по столбцам)** или

$$v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \quad (1)$$

Величина $v = \max_i \min_j a_{ij}$, называется нижней ценой игры, или максимальным гарантированным выигрышем первого игрока (**максимином**).

Величина $v = \min_j \max_i a_{ij}$, называется верхней ценой игры, или максимальным гарантированным проигрышем второго игрока (**минимаксом**).

Матрица, которую мы рассматриваем, удовлетворяет условию седловой точки (1):

$$\max (\text{минимумы по строкам}) = \min (\text{максимум по столбцам}) \quad (2)$$

Говорят, что если выполнено условие (1), то игра имеет седловую точку.

Если игра имеет седловую точку, то первый игрок может выбирать любую стратегию, для которой реализуется максимум в левой части соотношения (1) (максиминная стратегия), а второй игрок может выбрать любую стратегию, на которой реализуется минимум в правой части соотношения (1) (минимаксная стратегия). Если игра имеет седловую точку, то общее значение v , которое достигается слева и справа в соотношении (1), называется **ценой** игры.

Подробнее

Седловая точка может рассматриваться как точка равновесия в том смысле, что отклонение от нее для каждого из игроков невыгодно. Действительно, в нашем примере если первый игрок сменит свою оптимальную стратегию 2 на 1 или 3, то выигрыш первого (соответственно проигрыш второго) увеличится.

В итоге будет разумно ожидать, что в описанной выше игре противники будут придерживаться избранных стратегий.

Матричная антагонистическая игра, для которой $\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij}$ называется вполне определенной, или игрой, имеющей решение в **чистых стратегиях**.

Вопрос 3. Смешанные стратегии

Однако далеко не все матричные антагонистические игры являются вполне определенными, и в общем случае игры, в которых выполняется строгое неравенство, называются *не полностью определенными* играми (или *не имеющими решения в чистых стратегиях* играми). Подробнее

Следующая матрица представляет пример подобной игры:

	Стратегия 1	Стратегия 2
Стратегия 1	50000	-22000
Стратегия 2	-235000	44000

Для этой игры $\max \min a_{ij} = -22000 < 44000 = \min \max a_{ij}$. По всей видимости, в играх такого типа принцип решения в чистых стратегиях оказывается непригодным.

В описанной ситуации игрокам становится важно, чтобы противник не угадал, какую стратегию он будет использовать. Для осуществления этого плана игрокам следует пользоваться так называемой смешанной стратегией. Смешанная стратегия игрока представляет собой схему случайного выбора чистой стратегии. Математически ее можно представить как вероятностное распределение на множестве чистых стратегий данного игрока.

Мы будем предполагать использование игроками их смешанных стратегий независимым, так что вероятность, с которой Игрок 1 выбирает i -тую стратегию, а Игрок 2 - j -тую, равна $x_i y_j$. В этом случае платеж равен a_{ij} .

Для случая игры со смешанными стратегиями платежная матрица принимает следующий вид (табл. 4).

Таблица 4 – Матрица игры

	y_1	y_2		y_n
x_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.....				
x_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nn}

Подробнее

Подход к определению решения игры при смешанных стратегиях также основывается на критерии минимакса. Единственная разница заключается в том, что первый игрок выбирает x_i так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам, тогда как второй игрок выбирает y_j с целью минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш по строкам.

Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Первый игрок выбирает стратегию, обеспечивающую

$$\max_{x_i} \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i, \quad (3)$$

где переменные x и y удовлетворяют соотношениям

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (4)$$

$$y_j \geq 0, j=1, \dots, n, \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad (5)$$

а второй игрок выбирает стратегию, обеспечивающую

$$\min_{y_j} \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (6)$$

Эти величины определяются соответственно как среднеожидаемые максиминные и среднеожидаемые минимаксные платежи.

Если x^*_i и y^*_j — оптимальные решения для обоих игроков, каждому элементу платежной матрицы a_{ij} соответствует вероятность $x^*_i y^*_j$.

Следовательно, оптимальное ожидаемое значение игры $v^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x^*_i y^*_j$.

Как и в случае чистых стратегий, выполняется соотношение:

минимаксный ожидаемый проигрыш $\geq$ максиминный ожидаемый выигрыш.

Когда x_i и y_j соответствуют оптимальным решениям, выполняется строгое равенство, и результирующее значение равно ожидаемому (оптимальному) значению игры. Это утверждение следует из теоремы о минимаксе.

Вопрос 4. Игры с ненулевой суммой и кооперативные игры

В игре с ненулевой суммой уже становится необязательно, чтобы один из участников выигрывал, а другой проигрывал; напротив, они могут и выигрывать, и проигрывать одновременно. Поскольку интересы игроков теперь не являются полностью противоположными, их поведение становится более разнообразным. Так, например, если в игре с нулевой суммой каждому игроку невыгодно было сообщать другому свою стратегию (это могло уменьшить его выигрыш), то в игре с ненулевой суммой становится желательным как-то координировать свои действия с партнером или каким-либо способом влиять на его действия.

Игры с ненулевой суммой могут быть *кооперативными* и *некооперативными*. В некооперативных играх игроки принимают решения независимо друг от друга либо потому, что осуществление соглашения невозможно, либо потому, что оно запрещено правилами игры.

Один из подходов к решению некооперативных игр состоит в определении *точек равновесия* игры. В общем случае пара стратегий X, Y для Игрока 1 и Игрока 2 называется *точкой равновесия по Нэшу*, если ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей стратегии в одиночку, если выигрыш при этом не увеличивается.

Подробнее

Рассмотрим пример, когда матрица выигрышей игры имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} (4;1) & (0;0) \\ (0;0) & (1;4) \end{vmatrix} \quad (7)$$

Легко видеть, что в данной игре пары стратегий $x = (1, 0)$, $y = (1, 0)$ и $x = (0, 1)$, $y = (0, 1)$ являются равновесными, т.е. Игроку 2 (1) не выгодно отклоняться от 1-й (2-й) стратегии, если Игрок 1 (2) придерживается 1-й (2-й) стратегии. Отметим также, что выигрыши в равновесных точках различны.

Кооперативной игрой называется игра с ненулевой суммой, в которой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях, т.е. игроки могут образовывать коалиции. Основная задача в кооперативной игре состоит в дележе общего выигрыша между членами коалиции.

В случае игры двух лиц предполагается, что два игрока не могут воздействовать друг на друга, пока не придут к некоторому соглашению.

*На множестве возможных выигрышей выделяется множество *Парето-оптимальных решений*, т.е. множество точек, принадлежащих некоторому множеству S , для которых увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша его партнера.*

Вопрос 5. Игры с природой

В реальных экономических условиях чаще всего приходится решать задачи при ограниченности, неточности исходной информации о самом объекте или внешней среде, в которой он функционирует. При принятии управленческих решений о деятельности экономического объекта необходимо учитывать важную характеристику внешней среды – неопределенность

Подробнее

В условиях рыночной экономики существует множество источников возникновения неопределенности для различных экономических объектов. К ним, в первую очередь, можно отнести:

- недостаточность полноты информации об объекте, процессе, явлении, ограниченность в сборе информации, постоянная ее изменчивость;
- наличие противоборствующих тенденций, столкновение противоречивых интересов;
- невозможность однозначной оценки объекта в силу влияния внешнеэкономических факторов;
- влияние других экономических объектов на данный объект и т.д.

Неопределенность обуславливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода (решения). Среди различных видов ситуаций, с которыми в процессе производства сталкиваются предприятия, особое место занимают ситуации риска. Обычно, ей сопутствуют три условия:

- наличие неопределенности;
- необходимость выбора альтернативы;
- возможность оценки вероятности осуществления (оптимальности) выбираемых альтернатив.

Ситуации, при которой нам либо ничего не известно об интересах второй стороны (или сторон), либо эти интересы действительно отсутствуют (второй игрок — «природа»), характеризуются как ситуации принятия решений в условиях полной неопределенности (или игры с «природой»). Естественно, что термин «природа» употребляется здесь в некотором символическом смысле как обозначение некой действительности, мотивы проявления которой нам неизвестны.

Необходимо рассмотреть несколько иные критерии, чем, например, принцип минимакса для антагонистической игры (игры с нулевой суммой) двух лиц.

Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей первого игрока (матрица выигрышей первого игрока размера $m \times n$) — $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$.

1. *Максиминный критерий Вальда.* Он отражает «принцип гарантированного результата», то есть мы откладываемся на самый неблагоприятный для нас случай и пытаемся выбрать такую стратегию,

которая максимизировала бы наш выигрыш в самой неблагоприятной ситуации. В математическом виде критерий записывается как

$$V = \max_i \min_j a_{ij} \quad (8)$$

В качестве оптимальной выбирается стратегия, на которой достигается значение $\max$. Иногда этот критерий называют критерием «крайнего пессимизма».

2. *Критерий максимакса.* Этот критерий является в определенном смысле противоположным по своему смыслу предыдущему критерию. Выбирается в качестве оптимальной такая стратегия, для которой этот самый благоприятный случай дает самый большой выигрыш. В математическом виде критерий записывается как

$$V = \max_i \max_j a_{ij} \quad (9)$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается значение $\max$. Иногда этот критерий называют критерием «крайнего оптимизма».

3. *Критерий Гурвица.* Этот критерий является своего рода обобщением двух предыдущих критериев. Он представляет из себя целое семейство критериев, зависящих от некоторого параметра α , смысл которого — в определении баланса между подходами «крайнего пессимизма» и «крайнего оптимизма». В математическом виде критерий записывается как

$$V = \max_i \left[\alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij} \right] \quad (10)$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается значение $\max$. Значение параметра выбирается из интервала $0 < \alpha < 1$. Критерий Вальда получается как частный случай при $\alpha = 0$, а критерий максимакса при $\alpha = 1$. Выбор конкретного значения параметра определяется скорее субъективными факторами, например склонностью к риску ЛПР (лица принимающего решение).

4. *Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска).* Согласно этому критерию, для каждой стратегии второго игрока определяется выигрыш в наиболее благоприятном случае (при наиболее правильном выборе стратегии первым игроком для данной ситуации), а далее вычисляются величины «недополученных» выигрышей для всех остальных стратегий первого игрока. Элементы матрицы $R = \|r_{ij}\|_{m \times n}$, которая обычно называется матрицей риска, рассчитывают как $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$. Далее к матрице рисков применяется минимаксный подход, а именно:

$$R = \min_i \max_j r_{ij} \quad (11)$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается $\min$. Тем самым выбираем такую стратегию, для которой наибольшее значение «недополучения» будет иметь наименьшее значение.

5. *Критерий Лапласа.* Смысл данного критерия — максимизация ожидаемого выигрыша в предположении о равновероятности применения вторым игроком своих стратегий.

Тогда критерий можно записать как

$$V = \max_i \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right] \quad (12)$$

Подробнее

Пример решения экономической задачи методами теории игр

Предположим, необходимо определить наиболее оптимальный вариант организации страховой защиты инвестиционного проекта. Инвестором проведен конкурс по выбору наиболее надежной страховой организации. Однако, более полной защитой для крупного проекта будет являться страховка не одной компанией-победителем, а двумя компаниями — лидерами рейтинга конкурса (сострахование или страховой пул). Но

стоимость страхования (страховой тариф), предлагаемый пулом, выше, чем у компании-победителя конкурса.

Трудно определить целесообразность для инвестора заключения договора страхования с пулом по более высоким тарифам, чем предложенные в заявке организации-победителя. Важным моментом при принятии такого решения является возможность ошибки при определении компании-победителя. Данная процедура выбора страховой компании, как и любая другая, может содержать ошибочные данные и привести к неправильным выводам. Вероятность наступления такого события (возникновения ошибки) не определена, что приводит к возникновению рисков для инвестора ситуации. Традиционно методом решения таких задач являются игры с природой теории матричных игр.

Формально решение задач методом матричных игр с природой должно начинаться с определения вариантов решения, условий, требующих рассмотрения, и построения платежной матрицы, или матрицы игры.

В нашем случае варианты решения таковы:

A_1 – заключение договора страхования с компанией-победителем конкурсного отбора, по предлагаемым ею тарифам;

A_2 – заключение договора страхования со страховым пулом по завышенным тарифам;

A_3 – отказ от заключения договора страхования.

Условия, требующие рассмотрения, следующие:

P_1 – решения о надежности победителя конкурса принято верно, то есть методика не содержит ошибку;

P_2 – решение о победителе неверно, неверна последовательность ранжирования компаний, но в целом компании, набравшие большее количество баллов, надежны;

P_3 – решение о победителе неверно, методика содержит ошибку, все компании ненадежны.

Для построения платежной матрицы необходимо выбрать критерий определения правильности решений. В качестве критерия выберем эффективность страхования. Под эффективностью страхования будем понимать разницу между страховой суммой (суммой, на которую застрахован объект) и страховым взносом (платой за страхование). Проведем анализ принятия решения на примере страхования строительства 1 километра автодороги второй категории по полному пакету рисков. Примем нормативную стоимость строительства такой автомобильной дороги 17000 тыс. руб.

Страховой тариф при страховании по схеме A_1 равен 2,05. Тогда страховой взнос составит $17000 \cdot 2,05\% = 348,5$ тыс. рублей, а искомый показатель – эффективность страхования – составит $17000 - 348,5 = 16651,5$ тыс. руб. это значение верно при условии правильности выбора победителя – условия P_1 . При условии P_2 и P_3 появляется возможность банкротства компании и, как следствие, невыплата страхователю страхового возмещения. Вероятность банкротства равна 0,5, тогда эффективность страхования составит 8325,75 тыс. руб.

Страховой тариф при принятии решения A_2 составит 2,12%. Определим страховой взнос: $17000 \cdot 2,12\% = 360,4$ тыс. руб. Тогда эффект страхования при условии P_1 равен $17000 - 360,4 = 16639,6$ тыс.руб. При условии P_3 (ошибка определения финансовой устойчивости компаний) риск банкротства членов страхового пула имеет вероятность 0,5, следовательно, эффективность страхования становится равной 8319,8 тыс. руб. однако, если ошибка произошла лишь при распределении верхних строк рейтинга оферт, вероятность получения страхователем возмещения возрастает до 0,75, тогда эффект составит 12479,7 тыс.руб.

Если страховщик не заключает договор страхования вообще, то при условии P_1 он не получает ни эффекта, ни затрат. Однако, при условии P_2 выигрыш страхователя составит 348,5 тыс. рублей (то есть величину

уплаченного страхового взноса), а при условии P_3 – соответственно, 360,4 тыс.руб.

Платежная матрица выглядит следующим образом (таблица 5).

Таблица 5 - Матрица игры

	P_1	P_2	P_3
A_1	16651,5	8325,75	8325,75
A_2	16639,6	12479,7	8319,8
A_3	0	348,5	360,4

Рассмотрим варианты решения задачи с использованием классических критериев.

1. Критерий минимакса (максиминный критерий Вальда). Это позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. Для совершения выбора матрица решений дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов построчно. Необходимо выбрать максимальное значение этого столбца. Таким образом, выбранные решения полностью исключают риск. Решения с использованием данного критерия применяются, когда возможность проявления внешних состояний P неизвестна.

Решение задачи данным методом показано в таблице 6.

Таблица 6 - Решение игры по критерию минимакса

	P_1	P_2	P_3	Min a_{ij}
A_1	16651,5	8325,75	8325,75	8325,75
A_2	16639,6	12479,7	8319,8	8319,8
A_3	0	348,5	360,4	0

Максимальный элемент добавленного столбца – 8325,75 – принадлежит строке A_1 . То есть по критерию минимакса оптимальной является первая стратегия – заключить договор страхования с компанией «Энергогарант». Такое решение позволит при неопределенной вероятности ошибки определения победителя получить максимальный эффект.

2. Критерий Сэвиджа (критерий наименьшего сожаления). Применяется при неизвестной вероятности проявления состояний природы.

Игрок руководствуется не матрицей выигрышей, а матрицей рисков. На первом этапе вычисляются величины:

$$e_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}, \quad (13)$$

$$W = \min_j \max_i e_{ij}, \quad (14)$$

где a_{ij} – элементы платежной матрицы;

e_{ij} – риски; W – решение задачи.

Правило выбора соответственно критерию Сэвиджа трактуется следующим образом:

- каждый элемент матрицы решений $\|a_{ij}\|$ вычитается из наибольшего результата $\max a_{ij}$ соответствующего столбца,

- разности e_{ij} образуют матрицу остатков. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей. Выбирают вариант, в строках которого стоят минимальный элемент данного столбца.

Согласно критерию Сэвиджа, построим матрицу рисков и найдем оптимальное решение.

Таблица 7 - Решение игры по критерию Сэвиджа

	P_1	P_2	P_3	$\max e_{ij}$
A_1	0	4153,95	0	4153,95
A_2	11,9	0	5,95	11,9
A_3	16651,5	12131,2	7965,35	16651,5

Минимальная сумма остатков (рисков) равна 11,9 и является элементом строки A_2 , что свидетельствует о целесообразности выбора второй стратегии.

3. Критерий Байеса-Лапласа. Данный критерий используется, когда вероятности появления условий P известны и не зависят от времени. В нашем случае решение, принятое с применением данного критерия, является более приемлемым, чем предыдущие.

Так как применяемая методика оценки конкурсных заявок основана на богатом теоретическом и практическом материале и использует не только субъективные оценки, но и математический инструментальный, возможно

предположение о распределении вероятности появления ошибки. Положим, вероятность абсолютно правильного выбора, то есть условия P_1 , равна q_1 и равна 0,4. Вероятность условия P_2 равна q_2 и равна 0,5. Вероятность события P_3 равна q_3 и равна 0,1.

Соответствующее правило выбора можно выразить следующим образом: матрица решений $\|a_{ij}\|$ дополняется столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются варианты, в строках которых стоит наибольшее значение математического ожидания.

Таблица 8 - Решение игры по критерию Байеса-Лапласа

	P_1	P_2	P_3	m_i
A_1	16651,5	8325,75	8325,75	11656,05
A_2	16639,6	12479,7	8319,8	13727,67
A_3	0	348,5	360,4	210,29

Как видим, максимум математического ожидания выигрыша равен 13727,67 и находится в строке A_2 . Таким образом, при соответствующей вероятности ошибки в выборе победителя оптимальной для страхователя является стратегия заключения договора с участниками страхового пула, даже при завышении пулом страховых тарифов.

4. Критерий Ходжа-Лемана. Данный критерий опирается на критерии минимакса и Байеса-Лапласа. С помощью параметра v выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Байеса-Лапласа, иначе - минимаксный критерий.

$$W = \left\{ v \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + (1-v) \min_j a_{ij} \right\}, \quad (15)$$

где $0 \leq v \leq 1$.

Правило выбора согласно критерию Ходжа-Лемана формулируется так: матрица решений $\|a_{ij}\|$ дополняется столбцом, составленным из средневзвешенных (с весом $v = \text{const}$) математических ожиданий и

наименьшего результата каждой строки (соответственно формуле(7.14)).
Отбираются варианты решений с максимальным значением элемента этого столбца.

В нашем случае для решения задачи выбора варианта наиболее целесообразным является использование критерия Ходжа-Лемана, так как предположение о вероятности ошибки определения победителя возможно сделать лишь с определенной степенью доверия. Примем $v=0,95$. Решение задачи представлено в таблице 9.

Таблица 9 - Решение игры по критерию Ходжа-Лемана

	P_1	P_2	P_3	m_i	$V \cdot m_i$	$(1-v) \cdot \min a_{ij}$	W
A_1	16651,5	8325,75	8325,75	11656,05	11073,3	416,3	11489,6
A_2	16639,6	12479,7	8319,8	13727,7	13041,3	415,99	13457,3
A_3	0	348,5	360,4	210,29	199,8	0	199,8

По критерию Ходжа-Лемана наиболее выгодная для страхователя альтернатива – заключение договора страхования с участниками страхового пула.

Небольшое превышение страхового тарифа пула по сравнению с тарифами компании-победителя конкурса не несут больших финансовых убытков инвестору.

Вопрос 6. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Рассмотрим игру, платежная матрица которой имеет размерность

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Матрица не содержит седловой точки, поэтому решение игры представлено в смешанных стратегиях:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (17)$$

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n). \quad (18)$$

При оптимальной стратегии игрока А выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \times x_j \geq V; \quad j = \overline{1, m}, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times y_j \geq V; \quad j = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Можно рассмотреть задачу оптимальной стратегии игрока А, для которой имеют место следующие ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} \times x_1 + a_{21} \times x_2 + a_{m1} \times x_m \geq V, \\ a_{12} \times x_1 + a_{22} \times x_2 + a_{m2} \times x_m \geq V, \\ \vdots \\ a_{1n} \times x_1 + a_{2n} \times x_2 + a_{mn} \times x_m \geq V. \end{cases} \quad (21)$$

Величина V (цена игры) неизвестна, но можно считать $V > 0$ имея в виду, что элементы матрицы А неотрицательны. Этого всегда можно добиться, прибавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число. Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенства на величину V. В результате получим:

$$\begin{cases} a_{11} \times t_1 + a_{21} \times t_2 + a_{m1} \times t_m \geq 1, \\ a_{12} \times t_1 + a_{22} \times t_2 + a_{m2} \times t_m \geq 1, \\ \vdots \\ a_{1n} \times t_1 + a_{2n} \times t_2 + a_{mn} \times t_m \geq 1, \end{cases} \quad (22)$$

где $t_i = x_i / V; \quad i = \overline{1, m}$.

Из условия $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ следует, что $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1/V$.

Решение игры должно максимизировать значение V , следовательно, функция

$$Z = \sum_{i=1}^m t_i \quad (23)$$

должна принимать минимальное значение. Таким образом, получена задача линейного программирования:

$$Z = \sum_{i=1}^m t_i \rightarrow \min \quad (24)$$

при ограничениях типа (7.20) и условиях неотрицательности:

$$t_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Решая ее, находим значение t_i и величину $1/V$, затем определяем

значения

$$x_i = V \times t_i. \quad (26)$$

Для определения стратегии игрока В запишем следующие условия:

$$\begin{cases} a_{11} \times y_1 + a_{12} \times y_2 + \dots + a_{1n} \times y_n \leq V, \\ a_{21} \times y_1 + a_{22} \times y_2 + \dots + a_{2n} \times y_n \leq V, \\ \dots \\ a_{m1} \times y_1 + a_{m2} \times y_2 + \dots + a_{mn} \times y_n \leq V. \end{cases} \quad (27)$$

Разделив все члены неравенства на V , получим:

$$\begin{cases} a_{11} \times U_1 + a_{12} \times U_2 + \dots + a_{1n} \times U_n \leq 1, \\ a_{21} \times U_1 + a_{22} \times U_2 + \dots + a_{2n} \times U_n \leq 1, \\ \vdots \\ a_{m1} \times U_1 + a_{m2} \times U_2 + \dots + a_{mn} \times U_n \leq 1. \end{cases} \quad (28)$$

где $U_j = Y_j / V; \quad j = \overline{1, n}$.

Переменные U_j должны быть определены таким образом, чтобы выполнялось условие (7.26) и достигался максимум функции

$$W = \sum_{j=1}^n U_j \rightarrow \max. \quad (29)$$

Таким образом, получим пару симметричных двойственных задач линейного программирования. Используя свойство симметричности, можно решить одну из них, а решение второй найти на основании оптимального плана двойственной.

Подробнее

Рассмотрим пример выбора оптимального варианта реализации инвестиционного проекта. Примем за целевой эффект получение требуемой надежности реализации проекта.

Заказчик (игрок А) имеет 4 возможных метода получения целевого эффекта (4 чистых стратегии):

- 1.- Снижение стоимости реализации проекта;
- 2.- Повышение научно-технического уровня проекта;
- 3.- Приглашение к участию в проекте других инвесторов;
- 4.- Поэтапная реализация проекта.

У подрядчика (игрок В) две чистые стратегии:

- 5.- Привлечение субподрядчиков к работе над проектом;
- 6.- Получение кредитов под модернизацию и расширение производства.

Предполагается идентичность методов и средств в том смысле, что реализация каждого из них обеспечивает достижение целевого эффекта - заданной надежности реализации проекта. Однако, получаемый при разных методах экономический эффект различен, что связано с неодинаковыми затратами на реализацию проекта.

Представим условия игры в виде матрицы игры (платежной матрицы), записанной в таблице 10.

Таблица 10– Матрица игры

Чистая стратегия		Игрок В	
		5	6
Игрок А	I	-20	20
	II	-10	30
	III	10	20
	IV	9	8

Для поиска оптимальной пары стратегий игроков необходимо применить максиминную стратегию для заказчика, гарантирующую для него выигрыш не меньше некоторого значения, называемого ценой игры:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-20; -10; 10; 8) = 10 \quad (30)$$

Оптимальной для заказчика будет стратегия III - приглашение к участию в проекте других инвесторов.

Для подрядчика оптимальной будет минимаксная стратегия, для которой проигрыш будет не больше некоторого значения, называемого верхней ценой игры:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (10; 30) = 10 \quad (31)$$

Оптимальной для подрядчика будет 5-я стратегия.

Поскольку платежная матрица имеет седловую точку, игра решается в чистых стратегиях. В этом случае заказчик всегда должен применять свою III чистую стратегию, т.е. приглашать к участию в проекте других инвесторов. В свою очередь подрядчик должен всегда применять свою 5-ю чистую стратегию, т.е. привлекать субподрядчиков к работе над проектом.

Не всегда решение игры можно найти в чистых стратегиях. Например, для тех же условий, что и принятые выше, платежная матрица имеет вид, представленный в таблице 11.

Таблица 11 - Платежная матрица

Чистая стратегия		Подрядчик	
		5	6
Игрок А	I	-20	20
	II	-10	30
	III	10	20
	IV	15	8

Максиминная стратегия заказчика:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-20; -10; 10; 8) = 10 \quad (32)$$

Минимаксная стратегия подрядчика:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (15; 30) = 15 \quad (33)$$

Отсюда $10 < 15$, и, следовательно, решение игры не определяется в чистых стратегиях. Для решения игры в смешанных стратегиях необходимо определить вероятности, с которыми игроки А и В должны применять свои чистые стратегии. В этом случае возможно сведение игры к задаче линейного программирования (34, 35).

В нашем примере целевая функция имеет вид (34):

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \rightarrow \min$$

при ограничениях (35):

$$\begin{aligned} -20 \times t_1 - 10 \times t_2 + 10 \times t_3 + 15 \times t_4 &\geq 1, \\ 20 \times t_1 + 30 \times t_2 + 20 \times t_3 + 8 \times t_4 &\geq 1. \end{aligned}$$

Симплекс-матрица для решения задачи на ЭВМ имеет вид, представленный в таблице 12.

Таблица 12 - Симплекс - матрица

№	t_1	t_2	t_3	t_4	вид связи	b_i
F	1	1	1	1	$\rightarrow$	Min
1	-20	-10	10	15	$\geq$	1
2	20	30	20	8	$\geq$	1

В результате решения задачи значение целевой функции: 0.077.

Значение искомых переменных:

$$t_1=0; t_2=0; t_3=0.028; t_4=0.049.$$

Поскольку значение целевой функции

$$F=1/V=0.077, \text{ цена игры } V=1/0.077=13.$$

$$x_3=V \times t_3=0.028 \times 13=0.36;$$

$$x_4=V \times t_4=0.049 \times 13=0.64;$$

$$x_3+x_4=0.36+0.64=1.$$

Таким образом, игрок А с вероятностью 0.36 применяет свою 3-ю стратегию, и с вероятностью 0.64 - 4-ю стратегию, recommending повышение научно-технического уровня проекта. Стратегия 1 и 2 являются пассивными (вероятность их применения равна нулю).

Для определения оптимальных смешанных стратегий подрядчика сформулируем следующую задачу линейного программирования (7.27, 7.26):

$$U_1 + U_2 \rightarrow \max:$$

$$-20 + 20 \leq 1,$$

$$-10 + 30 \leq 1,$$

$$10 + 20 \leq 1,$$

$$15 + 8 \leq 1.$$

Получим симплекс-матрицу, записанную в таблице 13.

Таблица 13 – Симплекс-матрица

№	U_1	U_2	Вид связи	b_j
F	1	1	$\rightarrow$	max
1	20	20	$\leq$	1
2	10	30	$\leq$	1
3	10	20	$\leq$	1
4	15	8	$\leq$	1

В решении задачи получим значение целевой функции: 0.077 (так же, как и для двойственной задачи).

Значения искоемых переменных:

$$U_1=0.053, U_2=0.024$$

Значение целевой функции $W=1/V=13$

$$y_1=V \times U_1=0.053 \times 13=0.69$$

$$y_2=V \times U_2=0.024 \times 13=0.31$$

$$y_1+y_2=0.69+0.31=1$$

Подрядчик с вероятностью 0.69 применяет свою 1-ю стратегию, т.е. привлекает субподрядчиков к работе над проектом; и с вероятностью 0.31 - 2-ю стратегию, рекомендуящую ему получение кредитов под модернизацию и расширение производства.

Вопросы для самопроверки:

1. Классифицируйте игры.
2. Каким образом определяется, решается ли матричная игра в чистых стратегиях?
3. Покажите алгоритм решения матричной игры в смешанных стратегиях.

4. В чем особенность игр с природой?
5. Что такое игра n лиц, кооперативная игра?
6. Приведите примеры применения теории игр для решения экономических задач.