

Лекция 6. Системы массового обслуживания

Вопросы лекции:

1. Понятие систем массового обслуживания и их классификация
2. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло

Вопрос 1. Понятие систем массового обслуживания и их классификация

Системы массового обслуживания — это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Подробнее

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

- *посты технического обслуживания автомобилей;*
- *посты ремонта автомобилей;*
- *персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;*
- *станции технического обслуживания автомобилей;*
- *аудиторские фирмы;*
- *отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;*
- *телефонные станции и т. д.*

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

- входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- дисциплина очереди;
- механизм обслуживания.

Входной поток требований. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди — это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- первым пришел — первый обслуживаешься;
- пришел последним — обслуживаешься первым;

- случайный отбор заявок;
- отбор заявок по критерию приоритетности;
- ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Подробнее

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.).

Подробнее

Прежде всего, следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое

обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Рассмотрев основные компоненты систем обслуживания, можно констатировать, что функциональные возможности любой системы массового обслуживания определяются следующими основными факторами:

- вероятностным распределением моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных или групповых);
- вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
- конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);
- количеством и производительностью обслуживающих каналов;
- дисциплиной очереди;
- мощностью источника требований.

В качестве основных критериев эффективности функционирования систем массового обслуживания в зависимости от характера решаемой задачи могут выступать:

- вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;
- вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;
- относительная и абсолютная пропускная способность системы;
- средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
- среднее время ожидания в очереди;
- средняя длина очереди;
- средний доход от функционирования системы в единицу времени и т.п.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее

функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс. По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы марковские и немарковские. В марковских системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими.

Подробнее

Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему. В случае немарковских процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают **два основных вида СМО**:

- системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;
- системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.

Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с **ограниченным ожиданием** может ограничиваться:

- длина очереди;
- время пребывания в очереди.

В системах с *неограниченным ожиданием* заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживания неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.

Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:

- одноканальные системы;
- многоканальные системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

Вопрос 2. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло

Рассмотренные аналитические методы анализа СМО исходят из предположения, что входящие и исходящие потоки требований являются простейшими. Зависимости, используемые в этих методах для определения показателей качества обслуживания, справедливы лишь для установившегося режима функционирования СМО.

Однако в реальных условиях функционирования СМО имеются переходные режимы, а входящие и исходящие потоки требований являются далеко не простейшими. В этих условиях для оценки качества функционирования систем обслуживания широко используют **метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**. Основой решения задачи исследования функционирования СМО в реальных условиях является статистическое моделирование входящего потока требований и процесса их обслуживания (исходящего потока требований).

Для решения задачи статистического моделирования функционирования СМО должны быть заданы следующие исходные данные:

- описание СМО (тип, параметры, критерии эффективности работы системы);
- параметры закона распределения периодичности поступлений требований в систему;
- параметры закона распределения времени пребывания требования в очереди (для СМО с ожиданием);
- параметры закона распределения времени обслуживания требований в системе.

Решение задачи статистического моделирования функционирования СМО складывается из следующих этапов.

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i .
2. Равномерно распределенные случайные числа преобразуют в величины с заданным законом распределения:
 - интервал времени между поступлениями требований в систему (Δt);
 - время ухода заявки из очереди (для СМО с ограниченной длиной очереди);
 - длительность времени обслуживания требования каналами (Δt_0).
3. Определяют моменты наступления событий:
 - поступление требования на обслуживание;
 - уход требования из очереди;
 - окончание обслуживания требования в каналах системы.
4. Моделируют функционирование СМО в целом и накапливают статистические данные о процессе обслуживания.
5. Устанавливают новый момент поступления требования в систему, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.
6. Определяют показатели качества функционирования СМО путем обработки результатов моделирования методами математической статистики.

Подробнее

Применение элементов теории массового обслуживания для решения экономических задач.

Обоснование эффективности вариантов строительства объекта можно производить различными методами, исходя из критерия эффективности. В данном разделе пособия предлагается выбрать наиболее эффективный вариант строительства автозаправочной станции по критерию максимальной эффективности обслуживания клиентов. Для решения такой задачи целесообразно рассмотреть автозаправочную станцию как систему массового обслуживания.

Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой *обслуживающей системы*, которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в систему *заявок*. Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в очередях в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки.

В качестве примера применения системы массового обслуживания рассмотрим задачу проектирования автозаправочной станции (АЗС). Пусть необходимо выбрать один из нескольких вариантов строительства АЗС. Автомобили прибывают на станцию случайным образом и, если не могут быть обслужены сразу, становятся в очередь. Дисциплина очереди — «первым пришел — первым обслужен». Предположим для простоты, что во всех вариантах

рассматривается только одна бензоколонка, а вариант от варианта отличается лишь ее мощностью.

Предположим, статистические наблюдения позволили получить величину среднего количества клиентов μ , обслуживаемых в единицу времени. Обратная величина $1/\mu$ определяет среднее время обслуживания одного клиента.

Далее допускается стандартное предположение, что вероятность того, что обслуживание одного клиента, находящегося в процессе обслуживания в момент t , будет завершено в малом промежутке времени $[t, t + \tau]$, приблизительно равна $\mu\tau$, где $\mu > 0$. Вероятность того, что обслуживание не закончится, считается приблизительно равной $1 - \mu\tau$, а вероятность того, что будет закончено обслуживание двух или более клиентов, — пренебрежимо малой величиной. Тогда плотность распределения времени обслуживания имеет экспоненциальное распределение:

$$F(t) = \mu \exp(-\mu t), t \geq 0 \quad (1)$$

Далее, исходя из того что клиенты прибывают на АЗС случайно, предполагается, что вероятность прибытия одного клиента за любой малый промежуток времени $[t, t + \tau]$, начинающийся в произвольный момент времени t и имеющий длину τ , с точностью до пренебрежимо малых величин пропорциональна τ с некоторым коэффициентом пропорциональности $\lambda > 0$. Величина λ интерпретируется как среднее число клиентов, появляющихся в АЗС за единицу времени, а обратная ей величина $1/\lambda$ — как среднее время появления одного клиента. Вероятность того, что за этот промежуток времени не прибудет ни одного клиента, считается приблизительно равной $1 - \lambda \tau$, а вероятность прибытия двух или более клиентов — пренебрежимо малой величиной по сравнению со значением $\lambda\tau$. Из выдвинутых предположений в теории вероятностей делаются следующие выводы. Во-первых, промежутки времени τ между двумя последовательными появлениями клиентов удовлетворяют экспоненциальному распределению:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t \geq 0 \quad (2)$$

Во-вторых, вероятность того, что за любой, уже не малый период времени T придет n клиентов, подсчитывается по формуле

$$P(n) = (\lambda T)^n \exp(-\lambda T) / n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

т. е. входной поток заявок является пуассоновским. Отметим, что в отличие от среднего количества автомобилей, прибывающих в единицу времени на АЗС, т. е. величины λ , величина μ зависит от выбранного нами варианта строительства АЗС. Поэтому имеет смысл рассматривать те проекты АЗС, для которых среднее время обслуживания $1/\mu$ меньше среднего промежутка времени $1/\lambda$ между прибытием клиентов, ибо в противном случае очередь будет постоянно расти. В том же случае, когда $1/\mu < 1/\lambda$, через некоторое время после начала работы система перейдет в *стационарный режим*, т. е. ее показатели не будут зависеть от времени.

Обозначив отношение $1/\mu$ через p , можно показать, что стационарный режим устанавливается при $p < 1$. Величину p называют *нагрузкой системы*. Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по формулам:

◆ *коэффициент простоя системы*

$$E_1 = 1 - p \quad (4)$$

◆ *среднее число клиентов в системе*

$$E_2 = \frac{p}{1 - p} \quad (5)$$

◆ *средняя длина очереди*

$$E_3 = \frac{p^2}{1 - p} \quad (6)$$

◆ *среднее время пребывания клиента в системе*

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (7)$$

◆ *время пребывания клиента в очереди*

$$E_5 = \frac{p}{\mu - \lambda} \quad (8)$$

На основе анализа значений приведенной системы показателей, характеризующих систему массового обслуживания, делается вывод о целесообразности выбора варианта строительства АЗС.

Например, для общих условий постановки задачи по проектированию АЗС известны следующие данные: средний интервал между прибытиями автомобилей составляет 4 минуты. Варианты строительства АЗС имеют следующие средние времена обслуживания автомобилей: 5 мин, 3,5 мин, 2 мин, 1 мин, 0,5 мин. Результаты расчетов по исследованию различных вариантов строительства АЗС сведены в таблицу.

Таблица 9.1 – Значение характеристик по вариантам строительства

Характеристики СМО	1	2	3	4	5
$1/\lambda$	4 мин	4 мин	4 мин	4 мин	4 мин
λ	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
$1/\mu$	5 мин	3,5 мин	2 мин	1 мин	0,5 мин
μ	0,2	0,286	0,5	1	2
ρ	1,25	0,875	0,5	0,25	0,125
E_1	-0,25	0,125	0,5	0,75	0,875
E_2	-5	7	1	0,333	0,143
E_3	-6,25	6,125	0,5	0,083	0,018
E_4	-20	27,477	4	1,333	0,571
E_5	-25	24,305	2	0,333	0,071

Из анализа результатов расчетов следует.

Первый вариант строительства АЗС не годен из-за того, что очередь в этом случае будет расти до бесконечности.

Второй вариант хорош по показателю загруженности оборудования $\rho = 0,875$ и, следовательно, малой средней доли простоя оборудования $E_1 = 0,125$, но при этом варианте возникают большие очереди и,

следовательно, большие средние времена простоя автомобилей $E_4 = 27$ мин 48 с.

Третий вариант приводит к тому, что оборудование в среднем половину времени простаивает, но среднее число автомобилей в системе равно только 1,

а средние потери времени равны 4 мин при среднем времени обслуживания 2 мин.

В остальных вариантах очереди практически нет, но большую часть времени оборудование простаивает, поэтому эти варианты целесообразно отбросить как неэффективные.

Окончательный выбор варианта проекта АЗС, очевидно, принадлежит лицу, принимающему решение (ЛПР), но предварительная рекомендация по результатам анализа может состоять в предложении третьего варианта, если исходить из того, что наблюдается постоянная тенденция роста автомобильного парка в стране.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое система массового обслуживания, каковы ее основные элементы?
2. Классифицируйте системы массового обслуживания.
3. В чем особенность применения метода Монте-Карло для моделирования систем?