Лекция 5. Модели оптимального планирования транспортного типа

Вопросы лекции:

1. Классическая транспортная задача и ее модификации
2. Производственно-транспортные модели
3. Транспортные модели с промежуточными пунктами

Вопрос 1. Классическая транспортная задача и ее модификации

Если требуется решение вопросов о выборе схемы прикрепления поставщиков и потребителей продукции, используются модели транспортного типа. Классическая транспортная задача заключается в планировании прикрепления поставщиков к потребителям продукции и формулируется следующим образом: однородный продукт, находящийся в m пунктах производства в количестве $P_1, P_2, \ldots P_m$, требуется доставить в n пунктов потребления. Потребность продукции в этих пунктах равна $S_1, S_2, \ldots S_n$.

Экономико-математическая модель задач транспортного типа:

Целевая функция - затраты на перевозку продукта должны быть минимальными:

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \max. \qquad (1)$$

Ограничения.

1. Вся продукция из предприятий поставщиков отправляется потребителям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = P_i; \quad i = \overline{1, m}. \qquad (2)$$

2.Все потребители обеспечены продукцией:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_j; \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

3. Мощность поставщиков равна потребности в продукции (условие закрытости):

$$\sum_{j=1}^{m} P_i = \sum_{j=1}^{n} S_j. \tag{4}$$

Модификации транспортной задачи позволяют учитывать особенности различных хозяйственных условий. подробнее

1. Запрет каких-либо перевозок.

Если между поставщиками и потребителями продукции не существует маршрутов (связей) или ими нельзя пользоваться, можно задать стоимость перевозки c_{ij}, намного превышающую стоимость остальных перевозок (например, 99999).

2. Ограниченность пропускных способностей коммуникаций.

Это условие учитывается введением ограничений лимитирующих наибольшее значение объема перевозки по конкретному маршруту:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \tag{5.}$$

где d_{ij} - пропускная способность транспортной линии.

3. Нарушение условия равенства производства и потребления (открытая транспортная задача).

Если не вся продукция нужна потребителям, т.е. $\sum_i P_i > \sum_j S_j$, *то ограничение на продукцию, отправляемую из пунктов производства, принимает вид:*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le P_i; \quad i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Транспортная задача сводится к классическому виду путем введения фиктивного потребителя S_{m+1} с потребностью

$$S_{m+1} = \sum_i P_i - \sum_j S_j. \quad (7)$$

В целевой функции должны учитываться затраты, связанные с хранением и с потерей излишней продукции в каждом пункте производства.

Если суммарный объем производства меньше суммарного объема потребления, необходимо учитывать не только транспортные расходы, но и ущерб от недопоставок. В этой задаче

$$\sum_i P_i \le \sum_j S_j \quad (8)$$

и ограничения на продукцию, поступающую в каждый пункт потребления, будут:

$$\sum_i \boldsymbol{\alpha}_{ij} \le S_j; \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Этот случай также сводится к классической транспортной задаче путем введения фиктивного поставщика с объемом производства

$$P_m = \sum_j S_j - \sum_i P_i. \quad (10)$$

Подробнее

Пример решения задачи по планированию перевозок.

Задача по планированию перевозок формулируется следующим образом: необходимо составить план транспортирования строительных материалов, минимизирующий затраты на перевозки и издержки, связанные с тем, что часть продукции остается у поставщиков.

Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные для расчета

Потребители	*Поставщики*			*Потребность в материалах*
	База №1	*База №2*	*База №3*	
Объект № 1	*10*	*12*	*8*	*100*
Объект № 2	*11*	*7*	*13*	*120*
Объект № 3	*15*	*13*	*9*	*200*
Объект № 4	*8*	*11*	*8*	*330*
Мощности поставщиков, т	*210*	*340*	*200*	

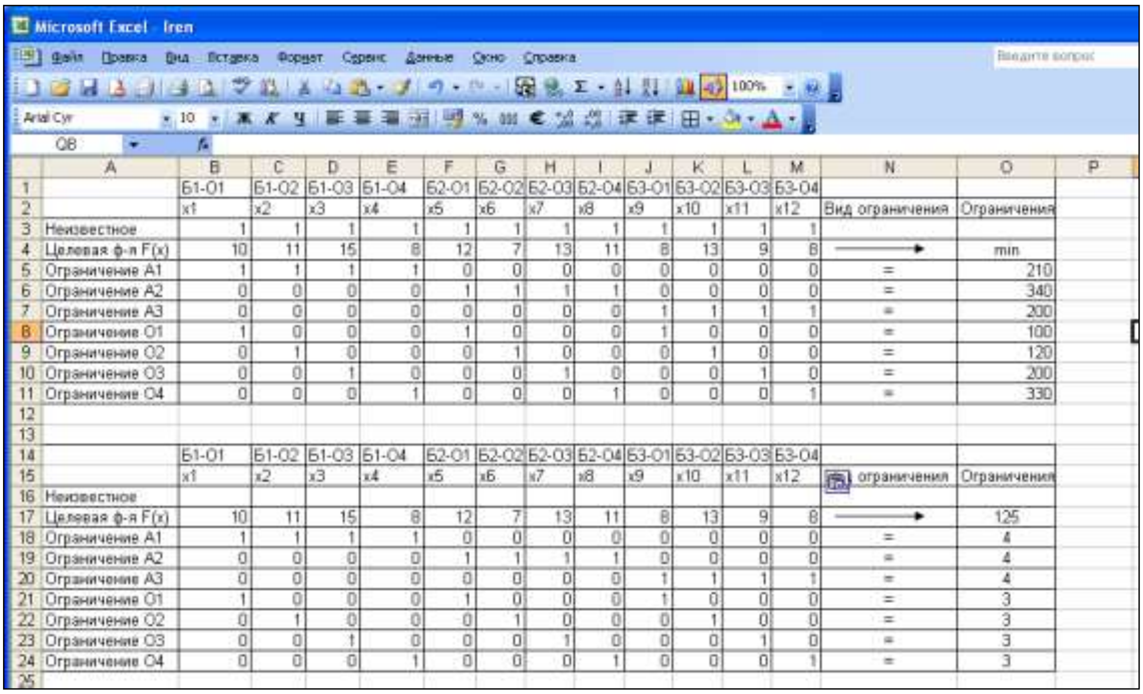
В соответствующих клетках таблицы задана стоимость перевозок 1 тонны груза от поставщиков к потребителям - c_{ij}, тыс.р. за 1 тонну. Потери, связанные с хранением продукции у поставщиков составляют: 5, 7, и 4 тыс. р. за 1 тонну для базы N 1, 2 и 3 соответственно.

Так как суммарная мощность поставщиков равна суммарной потребности потребителей, задача является закрытой.

Решим задачу с использованием программы симплекс-метода. Размерность задачи составляет $3 \times 4 = 12$ *переменных.*

Симплекс-матрица представлена на рис. 1.

Необходимо представить симплекс-матрицу в виде формул.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		Б1-О1	Б1-О2	Б1-О3	Б1-О4	Б2-О1	Б2-О2	Б2-О3	Б2-О4	Б3-О1	Б3-О2	Б3-О3	Б3-О4			
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	Вид ограничения	Ограничения	
3	Неизвестное	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
4	Целевая ф-я F(x)	10	11	15	8	12	7	13	11	8	13	9	8	→	min	
5	Ограничение А1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	210	
6	Ограничение А2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	=	340	
7	Ограничение А3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	=	200	
8	Ограничение О1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	=	100	
9	Ограничение О2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	=	120	
10	Ограничение О3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	=	200	
11	Ограничение О4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	=	330	
12																
13																
14		Б1-О1	Б1-О2	Б1-О3	Б1-О4	Б2-О1	Б2-О2	Б2-О3	Б2-О4	Б3-О1	Б3-О2	Б3-О3	Б3-О4			
15		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	ограничения	Ограничения	
16	Неизвестное															
17	Целевая ф-я F(x)	10	11	15	8	12	7	13	11	8	13	9	8	→	125	
18	Ограничение А1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	4	
19	Ограничение А2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	=	4	
20	Ограничение А3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	=	4	
21	Ограничение О1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	=	3	
22	Ограничение О2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	=	3	
23	Ограничение О3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	=	3	
24	Ограничение О4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	=	3	
25																

Рисунок 1 – Симплекс-матрица транспортной задачи

Решение задачи в системе электронных таблиц EXCEL осуществляется с помощью пункта меню «Сервис», «Поиск решения».

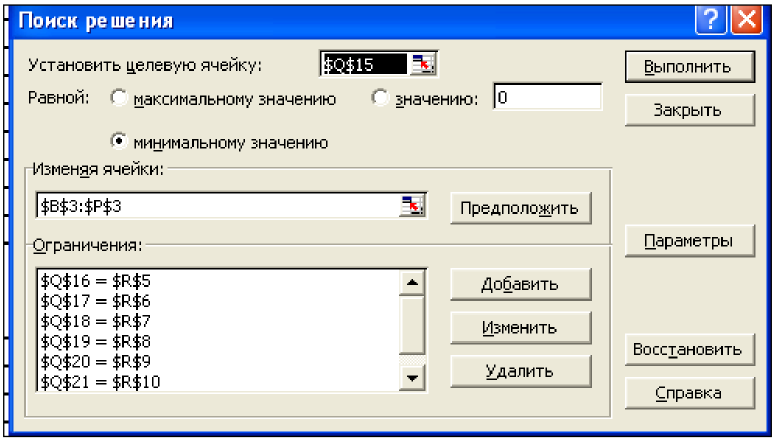


Рисунок 2 – Диалоговое окно «Поиск решения»

Таблица 5.3 - Результаты решения

Номер строки	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	*Правая часть ограничения*
F	*0*	*0*	*0*	*1680*	*0*	*840*	*1300*	*1320*	*800*	*0*	*900*	*0*	*6840*
1	*0*	*0*	*0*	*210*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*210*
2	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*120*	*100*	*120*	*0*	*0*	*0*	*0*	*340*
3	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100*	*0*	*100*	*0*	*200*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100*	*0*	*0*	*0*	*100*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*120*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*120*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100*	*0*	*0*	*0*	*100*	*0*	*200*
7	*0*	*0*	*0*	*210*	*0*	*0*	*0*	*120*	*0*	*0*	*0*	*0*	*330*

По результатам расчета можно сделать следующие выводы. Возможная минимальная стоимость всех перевозок составит 6840 руб.

При этом на объект N 1 продукция доставляется с базы N 3 в объеме 100 тонн; на объект N 2 - с базы N 2 в объеме 120 тонн; на объект N 3 - с базы N 2 в объеме 100 тонн и с базы N 3 в объеме 100 тонн; на объект N 4 - с базы N 1 в объеме 210 тонн и с базы N 4 в объеме 120 тонн.

Вопрос 2. Производственно-транспортные модели

Общий вид модели планирования производства и перевозок относится к классу производственно-транспортных задач. Задачами такого вида являются задачи по определению оптимальной мощности предприятий стройиндустрии. Здесь транспортные затраты определяют затраты на доставку сырья на заводы (щебня, песка, цемента и др. материалов) и затраты на доставку готовой продукции на объекты строительства. Производственные затраты определяют капитальные затраты и удельные затраты на выпуск продукции на предприятиях стройиндустрии. Такая задача может быть выражена в терминах классической транспортной задачи, но при этом объемы производства рассматриваются как переменные величины. Если принять $x_1, x_2, \ldots x_m$ - неизвестные объемы производства в 1,2,...m пунктах производства, то эту модель можно представить также, как и классическую транспортную задачу: целевая функция: общая сумма затрат на производство и транспортирование продукции должна быть минимальной:

$$F = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i) \times x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \min. \qquad (11)$$

Затраты $c_i(x_i)$ могут включать удельные капитальные вложения в развитие производства, удельные текущие производственные затраты или эти затраты вместе.

Ограничения:

1. Продукция, отправляемая из пунктов производства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i; \quad i = \overline{1,m}. \qquad (12)$$

2. Продукция, поступающая в пункты потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = S_j; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (13)$$

Подробнее *Нередко в задачах планирования производства и перевозок речь идет об увеличении производства и введении дополнительных перевозок.*

В таких хозяйственных ситуациях требуется определить дополнительные задания пунктам производства и план дополнительных перевозок с учетом ограниченных возможностей увеличения производства в *отдельных пунктах и ограничений пропускной способности транспортной сети при минимальных общих затратах.*

Вопрос 3. Транспортные модели с промежуточными пунктами

В этих задачах рассматривают производственно-транспортные сети, в которых между пунктами производства, находящимися в истоках сети и пунктах потребления конечного продукта имеются пункты промежуточной обработки продукции.

Подробнее

Например, обогатительные фабрики, заводы ЖБИ, бетонно-растворные узлы и др. Такая же схема охватывает случаи, когда некоторые промежуточные пункты служат для перевалки грузов.

Рассмотрим решение транспортной задачи с промежуточными пунктами на примере проектирования оптимальной сети внутрихозяйственных дорог. Суть задачи заключается в определении такого планирования дорожной сети в хозяйстве, при котором все пункты-производители продукции (склады, базы, фермы, участки) связаны с потребителями продукции как внутри хозяйства, так и вне его. В случае связей вне хозяйства планируют выход на дорожную сеть общего пользования или на аналогичную сеть соседних хозяйств.

Экономико-математическая модель оптимизации сети внутрихозяйственных дорог включает все наиболее важные элементы ее развития: затраты на строительство, реконструкцию, ремонт и содержание дорог, транспортные расходы, потери от дорожно-транспортных происшествий, от бездорожья, от изъятия земель. Целевой функцией задачи является минимизация суммарных приведенных затрат:

$$F = \sum_{p=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_{kpij} + C_{rpij} + C_{tpij} + C_{npij}) \times X_{pij} \rightarrow \min, \qquad (14)$$

где C_{kpij} - удельные на 1 тыс. тонн грузов приведенные затраты на строительство дороги на P участке, связывающем i поставщика c_j потребителем;

C_{rpi} - удельные на 1 тыс. тонн грузов приведенные затраты на ремонт и содержание дороги на P участке, связывающем i поставщика c_j потребителем;

C_{tpij} - удельные на 1 тыс. тонн грузов приведенные затраты на перевозку грузов на P участке, связывающем i поставщика c_j потребителем;

C_{npij} - удельные на 1 тыс. тонн грузов потери в сфере сельского хозяйства, принятые со знаком "минус", поскольку капитальные вложения в строительство дорог снижают эти потери;

X_{pij} - объем грузов, перевозимых по участку P, связывающему i поставщика c_j потребителем, тыс. тонн.

Ограничения

1. *Все грузы поставщиков вывезены:*

$$\sum_{p=1}^{1}\sum_{j=1}^{n} x_{pijz} = A_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{15}$$

где A_{ij} - объем грузов у $_i$ поставщика.

2. Все потребители обеспечены грузами:

$$\sum_{p=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} x_{pij} = B_j; \quad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

где B_{ij} - объем грузов у$_j$ потребителя.

3. Потребители, не являющиеся конечными пунктами сети, обеспечивают транзитные перевозки:

$$\sum_{p=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} x_{pijz} - \sum_{p=1}^{1}\sum_{j=1}^{n} x_{pijz} = B_{jz}; \quad jz = \overline{1,nz}, \tag{17}$$

где B_{jz}- объем грузов, получаемых пунктом jz.

Здесь первое слагаемое определяют сумму грузов, прибывших в пункт jz, а второе слагаемое определяет сумму грузов, отправляемых из пункта jz.

4. В транзитных точках обеспечен баланс между прибытием и отправлением грузов:

$$\sum_{p=1}^{1т}\sum_{i=1}^{m} x_{pijz} - \sum_{p=1}^{1т}\sum_{j=1}^{n} x_{pijz} = 0; \quad jт = \overline{1, nт}. \qquad (18)$$

Число таких ограничений равно числу транзитных пунктов сети.

5. По некоторым участкам сети возможно задание фиксированной величины перевозок:

$$x_{pфij} = A_{pф}; \quad pф = \overline{1, 1ф}. \qquad (19)$$

Из анализа целевой функции видно, что суммарные приведенные затраты слагаются из единовременных и текущих затрат по всем участкам сети. При этом в пределах категории дорого текущие затраты, транспортные и эксплуатационные, - на перевозку грузов, ремонт и содержание дорог, различные потери - можно считать пропорциональными объемам перевозимых грузов, а затраты единовременные - не строительство и реконструкцию дорог - не зависящими от объемов перевозимых грузов. Поэтому единовременные затраты можно считать дискретными, зависящими лишь от категории строящейся дороги. Их величина определяется по аналогам, по нормативам удельных капитальных вложений с учетом рельефа местности, числа искусственных сооружений, стоимости занимаемых земель и т.д.

Задачи такого класса, в которых затраты непропорционально зависят от объемов перевозимых грузов, называют неоднородными транспортными задачами. Для решения таких задач предложен метод, заключающийся в сведении их к классической транспортной задаче заменой непропорциональных затрат на пропорциональные и решении задач за несколько итераций.

Подробнее *При этом на первой итерации затраты на строительство относят ко всему возможному объему перевозок на каждом участке. В результате решения задачи получают оптимальное распределение перевозимых грузов по участкам сети. На следующей итерации при определении пропорциональных (удельных) затрат строительные затраты относят к объему перевозок на участке, который получен в результате решения на предшествующей итерации. Если величина перевозок на участке равна нулю, то за величину удельных затрат принимают заведомо большое число. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока решение на двух итерациях будут достаточно близкими или равными друг другу:*

$$\left|F_{i+1} - F_i\right| \le \xi, \qquad (20)$$

где F_{i+1}, F_i *- значения целевой функции на i+1 и i итерации;*

ξ *- точность решения.*

Исходя из структуры целевой функции и ограничений, полученную экономико-математическую модель можно определить как неоднородную транспортную задачу с промежуточными пунктами, решение которой осуществляют итерационным путем по стандартной программе симплекс-метода.

Вопросы для самопроверки:

1. В чем специфика транспортной задачи?
2. Какими методами можно решит транспортную задачу?
3. Поясните модификации транспортной задачи