

Лекция 2. Задачи линейного программирования

Вопросы лекции:

1. Постановка задачи линейного программирования
2. Решение задач линейного программирования
3. Задачи целочисленного программирования

Вопрос 1. Постановка задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования называется оптимизационная задача, в которой критерий эффективности и ограничения представляют линейные функции.

Математическая модель задачи линейного программирования включает себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и (или) неравенств;
- требование неотрицательности переменных вектора решения.

Общая постановка задачи формулируется следующим образом: необходимо найти такое решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы (являющееся оптимальным решением, или оптимальным планом), обеспечивающие достижение экстремума (максимума или минимума) целевой функции (линейной формы, функции цели) задачи.

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (1)$$

и удовлетворяющие системе ограничений (уравнений и неравенств)

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \dots, l \\ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, & i = l + 1, l + 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

В общем случае задача линейного программирования может быть записана в виде:

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max (\min) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = b_l \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + ... + a_{(l+1)n}x_n \leq b_{l+1} \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right. \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (5)$$

Данная запись означает следующее: найти оптимальное значение целевой функции (3) и соответствующий ему вектор переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений (4) и условиям (5)

Допустимым решением задачи линейного программирования называется любой n – мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений задачи образует **область допустимых решений (ОДР)**.

Если система ограничений (4) состоит только из неравенств — задача линейного программирования называется **стандартной**; если система ограничений состоит из одних уравнений, то задача называется **канонической**, если в системе ограничений имеются как уравнения, та и неравенства, то задача называется **общей**.

Подробнее

Например, задача об оптимальном использовании ресурсов является стандартной :

Найти максимум функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при ограничениях

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (7)$$

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется

двойственной или сопряженной. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары. Прямая и двойственная задачи связаны между собой теоремами двойственности

Вопрос 2. Решение задач линейного программирования

Самым простым и наглядным методом решения задачи линейного программирования является **графический метод**.

Он применяется при решении стандартной задачи с двумя переменными, или канонической задачи с несколькими переменными, если соблюдается условие:

$$n - r \leq 2 \quad (11)$$

где n – число неизвестных системы ограничений; r – ранг системы векторов условий.

Метод исходит из следующих предпосылок:

Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым (то есть вместе с любыми двумя точками множества ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий их).

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек множества допустимых решений.

Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений и наоборот.

Подробнее

Алгоритм решения состоит из двух этапов: построение области допустимых решений и определение оптимального решения из этой области.

Прямая, уравнение которой получено из целевой функции задачи, при равенстве ее постоянной величине, называется **линией уровня**. Линия уровня, имеющая общие точки с областью допустимых решений, если при этом область допустимых решений целиком находится в одной из полуплоскостей, называется **опорной прямой**. Решением задачи является такая угловая точка (набор точек), принадлежащая области допустимых решений, на которой достигается самая верхняя (или нижняя) линия уровня.

Если ограничения задачи противоречивы и ОДР не существует, то задача не имеет решения.

Если ОДР задачи представляет замкнутый выпуклый N-угольник, то задача имеет либо единственное решение в вершине ОДР, либо несколько решений, в точках, принадлежащих стороне ОДР.

Если ОДР задачи представляет незамкнутый выпуклый N-угольник, то задача имеет либо единственное решение в вершине ОДР, либо не имеет решения, когда ОДР не ограничена в области возрастания (убывания) целевой функции.

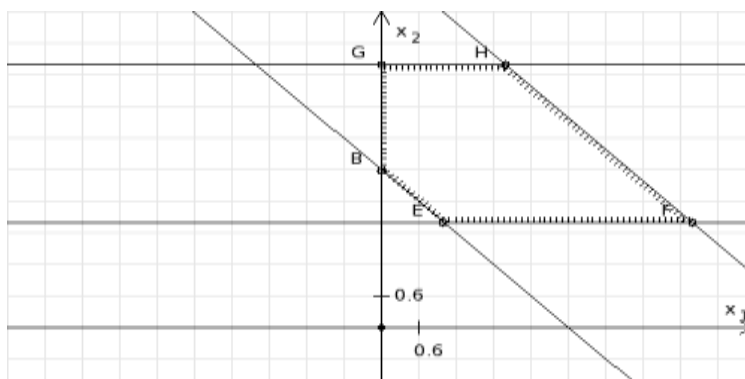


Рисунок 1 - Пример решения задачи графическим методом

Основным методом решения задач линейного программирования является **симплекс-метод**.

Симплекс – метод представляет собой процедуру направленного перебора опорных решений с продвижением к оптимальному плану (обеспечивающему достижение оптимума функции цели).

Вычисления, которые обеспечивают вычисление целевой функции и переменных, называют итерацией. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма, если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему.

Подробнее

Например, имеется задача линейного программирования :

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \rightarrow \max (\min) \quad (12)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (13)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall j, \quad b_i \geq 0, \quad \forall i \quad (14)$$

Составляется симплекс-матрица задачи (таб.)

Таблица 1 – Симплекс-матрица задачи

B	$C_{\bar{0}}$	A_0	A_1	$\dots$	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	$\dots$	A_s
A_{n+1}	c_{n+1}	b_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0
A_{n+2}	c_{n+2}	b_2	a_{21}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
A_s	c_s	b_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1
A_k		A_0	A_1	$\dots$	A_n	0	0	$\dots$	0

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$, для которого векторы условий $A_1, A_2, \dots, A_m$ (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений), соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m , то решение называется **невырожденным**, в противном случае (меньше m) – **вырожденным**.

Начальное опорное решение проверяется на оптимальность, далее переходят к другому опорному решению таким образом, чтобы значение целевой функции увеличивалось (уменьшалось) в соответствии с критерием оптимальности.

Подробнее

Пример оптимизации прибыли при ограничениях на используемые ресурсы

Задача по оптимизации прибыли предприятия может быть решена с применением методов линейного программирования исходя из наличия ресурсов, необходимых для выполнения работ.

Постановка задачи:

Необходимо определить оптимальный план выпуска продукции, максимизирующий суммарную прибыль предприятия. Планируется выпустить два вида продукции. Прибыль от реализации единицы продукции первого вида составит 6 руб., от реализации единицы продукции второго вида – 4 руб. Для производства единицы продукции первого вида требуется 12 кг сырья первого вида, 4 кг сырья второго вида и 2 кг сырья третьего вида. Для производства единицы продукции второго вида требуется 3 кг сырья первого вида, 6 кг сырья второго вида и 14 кг сырья третьего вида. Наличие сырья первого вида на складе предприятия – 264 кг, сырья второго вида – 148 кг, третьего – 280 кг.

Экономико-математическая модель (ЭММ):

Целевая функция: планируемая прибыль должна быть максимальной

$$F = \sum_{j=1}^n p_j \times x_j \rightarrow \max \quad (15)$$

где p_j - прибыль от реализации одного изделия j -го вида;

x_j - планируемый выпуск изделий j -го вида.

В нашем случае целевая функция примет вид:

$$F = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \rightarrow \max \quad (16)$$

Ограничения:

1) Имеющихся на предприятии ресурсов достаточно для выполнения производственной программы:

$$\sum_{j=1}^n t_{k,j} \times x_j \leq \Phi_k, \quad k = 1, \dots, r \quad (17)$$

где $t_{k,j}$ - норматив затрат ресурсов k -го вида на одно изделие j -го вида;

Φ_k - годовой фонд k -го вида ресурса.

В нашем случае имеем систему ограничений:

$$12x_1 + 3x_2 \leq 264 \quad (18)$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 148 \quad (20)$$

$$2x_1 + 14x_2 \leq 280 \quad (21)$$

2) Необходимо включить в план выпуска оба вида изделий:

$$x_j \geq 0 \quad (22)$$

Расчет можно произвести с помощью окна «Поиск решения» из пункта меню «Сервис» процессора электронных таблиц EXCEL. Исходные данные представлены на рисунке.

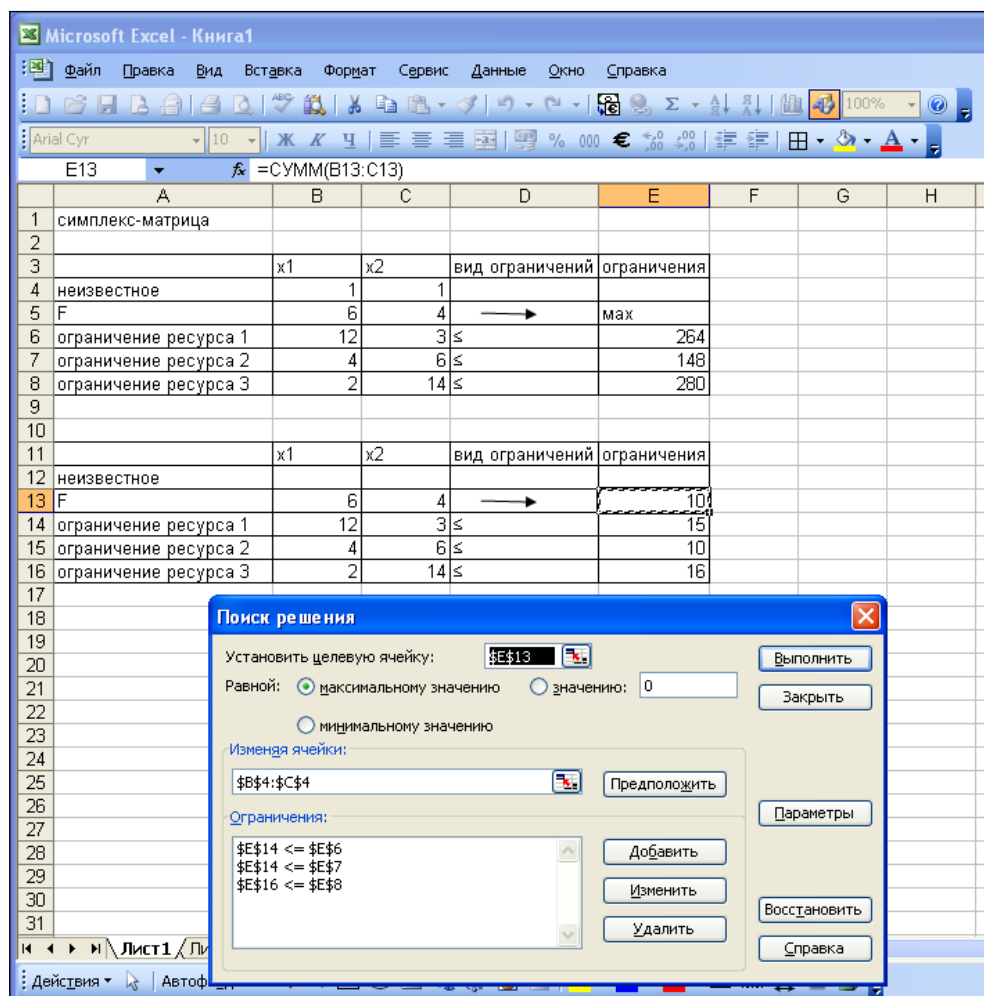


Рисунок 2 – Исходные данные для решения задачи

В результате решения задачи получим следующие результаты (рис.3)

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

А1 С1 =СУММ(B13:C13)

	A	B	C	D	E	F
1	симплекс-матрица					
2						
3		x1	x2	вид ограничений	ограничения	
4	неизвестное	19	12			
5	F	6	4	→	max	
6	ограничение ресурса 1	12	3	≤	264	
7	ограничение ресурса 2	4	6	≤	148	
8	ограничение ресурса 3	2	14	≤	280	
9						
10						
11		x1	x2	вид ограничений	ограничения	
12	неизвестное					
13	F	114	48	→	162	
14	ограничение ресурса 1	228	36	≤	264	
15	ограничение ресурса 2	76	72	≤	148	
16	ограничение ресурса 3	38	168	≤	206	
17						

Рисунок 3 – Результаты решения задачи

Таким образом, предприятие получит максимальную прибыль в 162 руб., если примет план по выпуску 19 единиц изделий первого вида и 12

единиц изделий второго вида. При этом останется неизрасходованным сырье третьего вида в количестве 194 кг.

Вопрос 3. Задачи целочисленного программирования

Задача о назначениях - это одна из задач целочисленного программирования, которая предназначена для оптимального подбора n "предложений" к n "потребностям", например, для назначения вида работы машине, назначения вида работы производственному отделу, назначения человека на должность и т.д. целочисленной называется задача линейного программирования, в которой все компоненты плана x – целые числа.

Метод назначений применяется при решении задач, имеющих следующие характеристики:

1. Имеется n "предметов", которые должны быть распределены по n "пунктам назначения".

2. Каждый "предмет" должен быть назначен единственному "пункту назначения". В понятие "предмет" и "пункт назначения" может вкладываться различное смысловое значение, определяемое конкретной задачей менеджмента. Так в качестве предмета может выступать определенный вид деятельности (работы), должность, человек и т.д.

3. Оптимальный подбор назначений должен быть достигнут за счет максимизации или минимизации определенной меры эффективности назначения: прибыли или стоимости. Для каждого потенциального назначения оценивается мера эффективности. Если мерой эффективности является прибыль, то в процессе решения задачи о назначениях она максимизируется, если мерой эффективности является стоимость, она минимизируется.

В этих задачах задается матрица эффективности (или затрат) действий j -го элемента на i -том объекте. Принимая целочисленные переменные x_{ij} равными: $x_{ij}=1$, если j -й элемент действует на i -том объекте, и $x_{ij}=0$ во всех

остальных случаях, можно построить для решения задачи следующую модель.

Целевая функция:

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \max. \quad (23)$$

где c_{ij} – эффективность действий j -го элемента на i -том объекте.

Ограничения.

1. На каждый объект может быть назначен только один элемент:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (24)$$

2. Каждый элемент может быть назначен только на один объект:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (25)$$

3.

$$x_{ij}(x_{ij} - 1) = 0 \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Подробнее

Например, пусть имеется трое рабочих и три производственные операции. Необходимо построить модель расстановки рабочих на участке при условии, что каждый из трех рабочих может выполнять любую из трех операций, и их выработка по операциям характеризуется следующим образом (табл. 2)

Таблица 2- Матрица назначений работников на должности

		Рабочие		
Опера- ции		1	2	3
	1	5	4	6
	2	7	8	5
	3	3	6	5

Обозначим x_{ij} занятость j -го рабочего на i -той операции. Модель задачи максимизации общей производительности труда будет следующей:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 7x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 3x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} \rightarrow \max$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$

$$x_{ij}(x_{ij}-1)=0 \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (27)$$

Далее задача может быть решена с использованием диалогового окна «Поиск решения» системы электронных таблиц.

Подробнее

Оптимальное планирование портфеля инвестиций можно выполнить с применением методов линейного программирования. Для этого необходимо сформировать экономико-математическую модель.

Целевая функция: чистая текущая стоимость проектов, включаемых в инвестиционный портфель, должна быть максимальной.

$$F = \sum_{j=1}^n NPV_j \times X_j \rightarrow \max, \quad (28)$$

где X_j - целочисленная переменная, принимающая 2 значения:

- 0, если j проект не включается в план инвестиций;
- 1, если j проект включается в план инвестиций.

Ограничения на целевую функцию:

1. Каждая переменная X_j может принимать только дискретные значения (0 или 1), что предполагает или полное финансирование проекта, или отказ от его включения в план.

$$X_j = 0, 1. \quad (29)$$

2. Стоимость инвестиционного портфеля не должна превышать величины выделенных средств.

$$\sum_{j=1}^n I_j \times X_j \leq I_n, \quad (30)$$

где I_j - величина инвестиций по j проекту;

I_n - наличие средств на инвестиционные цели.

Сформулированная задача также может быть решена с применением методов целочисленного программирования.

Вопросы для самопроверки:

1. Приведите пример общей и канонической задач линейного программирования
2. Что является элементами симплекс-матрицы?
3. В чем суть графического метода решения задач линейного программирования и когда он применяется?