Лекция 1

Основы исследования операций

Вопросы лекции:

1. **Основные понятия исследования операций**
2. **Основные понятия оптимизации**

Вопрос 1. Основные понятия исследования операций

Управление любой системой, в том числе экономической, представляет собой процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Изучение закономерностей позволяет определить условия для наилучшего осуществления процесса.

> **Исследование операций** — научная дисциплина, изучающая и создающая методологию наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Исследование операций имеет место тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат. Для этого все параметры, характеризующие сам процесс и внешние условия его реализации, должны быть количественно определены. Следовательно, цель исследования операций — количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.

> **Операции** – это управляемые (человеком, или лицом, принимающим решение (ЛПР)) мероприятие (или система действий), для достижения какой то цели.

Так, принятие управленческого решения в экономике всегда является операцией.

Подробнее

Например, задача оптимальной загрузки производственной мощности строительного предприятия, выбор наилучшей схемы транспортировки материалов, задача о назначении работников на выполнение определенных видов работ. Приведенные задачи относятся к разным областям практики, но в них есть общие черты: в каждом случае речь идет о каком-то управляемом мероприятии (операции), преследующем определенную цель. В первом случае – это достаточная (без простоев), но не более имеющейся, загрузка мощностей, во втором – минимальная стоимость транспортировки, в третьем – максимальная производительность труда.

В каждой задаче заданы некоторые условия проведения этого мероприятия, в рамках которых следует принять решение, такое, чтобы мероприятие принесло определенную выгоду. Условиями проведения операции в каждой задаче оказываются средства, которыми мы располагаем: время, оборудование, денежные средства, а решение в задаче 1 заключается в выборе количественного соотношения производимых работ или выпускаемой продукции; в задаче 2 — в выборе оптимального маршрута транспортировки; в задаче 3 — в закреплении за каждым работником рабочего места.

Решение — это определённый набор зависящих от ЛПР параметров. Оптимальное решение — решение, которое по определенным критериям предпочтительнее других. Само принятие решения выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица (ЛПР). Элементы решения — параметры, совокупность которых образует решение. Если элементами решения можно распоряжаться в определённых пределах, то заданные условия (ограничения) фиксированы (например, размер имеющихся денежных средств, сроки поставки или выполнения работ и т.д.). Их совокупность формирует множество возможных решений.

Для применения количественных методов исследования требуется построить математическую модель операции. При построении модели операция, упрощается, схематизируется, и схема операции описывается с помощью того или иного математического аппарата.

Модель операции — это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата.

Подробнее

Модель - это удобное, упрощенное представление существенно важных характеристик объекта или ситуации.

Модели должны отвечать следующим требованиям:

1. Модель должна отображать характерные, существенные черты объекта.

2. Это отображение должно быть выражено в упрощенной форме.

3. Модель должна позволять менять некоторые свои параметры с целью исследования.

4. Модель должна быть более удобной для экспериментов и более дешевой в изготовлении, чем объект.

При построении экономической модели обычно выполняется ряд этапов:

1. Формулируется предмет и цели исследования.

2. В рассматриваемой экономической системе выделяются структурные или функциональные элементы и определяются их наиболее важные характеристики.

3. Дается словесное описание взаимосвязей между элементами модели.

4. Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик объекта моделирования и формализуются взаимосвязи между ними. Таким образом, строится математическая модель.

5.Проводятся расчеты по математической модели, и выполняется анализ полученного решения.

Математические модели, используемые в экономике можно разделить на классы по ряду признаков, относящимся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария:

В зависимости от типа моделируемого объекта модели бывают макро и микроэкономические.

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой ее укрупненные показатели: ВВП, инвестиции, производительность труда, занятость, процентную ставку и др. показатели.

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение одной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке, микроэкономические моделирование занимает основную часть экономико-математической теории.

В зависимости от целей моделирования могут разрабатываться теоретические и прикладные модели.

Теоретические модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов. Прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений.

В моделировании рыночной экономики особое место занимают равновесные модели, которые описывают состояние экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю, например модели равновесия спроса и предложения.

Оптимизационные модели в рыночной экономике обычно строятся на микро уровне, например максимизация прибыли или минимизация затрат при фирменном планировании.

В зависимости от используемого инструментария и от характера изучаемых процессов все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, дискретные и непрерывные, статические и динамические, линейные и нелинейные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

Стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса, и оцениваются средние характеристики процесса.

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, т.е. прерывистыми, состоящими из отдельных частей.

Непрерывное моделирование позволяет отобразить непрерывные процессы в системах.

По временному признаку модели могут быть статическими и динамическими. В статических моделях описывается состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени, а динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени (например, за пятилетний период).

По степени огрубления формы структурных отношений исследуемого объекта модели подразделяются на линейные и нелинейные модели. В линейных моделях все искомые переменные в моделях записаны в первой степени, а на графиках они могут быть представлены в виде прямых линий.

В зависимости от формы представления объекта можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для из физического созерцания. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного и математического.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отражающие явления и процессы, протекающие в объекте.

В основу гипотетического моделирования исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов.

Мысленный макет может применяться в тех случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию.

Символическое моделирование может быть языковым или знаковым. В основе языкового моделирования лежит некий тезаурус, т.е. словарь, очищенный от неоднозначности, присущей обычному словарю (например, слово "КЛЮЧ").

Знаковое моделирование позволяет с помощью знаков отображать набор понятий, составляя цепочки из слов и предложений и таким образом дать описание реального объекта.

Математическими моделями называют комплекты математических зависимостей, отображающие существенные характеристики изучаемого явления. Во многих случаях математические модели наиболее полно отображают моделируемый объект. В то же время математические модели более динамичны, на них лучше найти оптимальные параметры объекта. Для моделирования экономических явлений другие модели, кроме экономико-математических, как правило, использовать нельзя. Экономико-математические модели, в свою очередь, бывают двух типов: аналитические и имитационные.

Для аналитического моделирования процессы функционирования записываются в виде некоторых функциональных отношений (алгебраических, конечно-разностных и т.д.).

При имитационном моделировании имитируются элементарные явления, составляющие процесс с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Реальное моделирование является наиболее адекватным, но его возможности с учетом сложности объектов очень ограничены.

Все модели исследования операций могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операций, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов.

Следует отметить прежде всего большой класс оптимизационных моделей. Подробнее вопрос 2.

2. Основные понятия оптимизации

При решении экономических задач мы ставим перед собой определенную цель, которую желаем достичь. Задача о нахождении экстремума (целевого значения) функции при соблюдении ряда условий (ограничений) носит название задачи оптимизации.

Цель - это то, во имя чего осуществляется моделируемый производственный процесс.

Для выбора из множества возможных путей достижения цели наилучшего служит **критерий оптимальности**, т.е. признак, по которому могут сравниваться и оцениваться варианты достижения цели. Критерий оптимальности характеризует качество решения, эффективность намечаемого пути достижения цели. В качестве критерия оптимальности обычно принимают экономическую величину, экстремальное значение которой определяют в процессе решения задачи.

Подробнее

Критерий оптимальности должен иметь стоимостную, натуральную или временную размерность. Критерием оптимальности могут быть:

объем СМР, прибыль, приведенные затраты, производительность труда и т.д.

Критерий оптимальности может быть локальным и глобальным. Глобальный критерий оценивает эффективность функционирования системы или организации с учетом согласованных между собой общих интересов системы или организации и внутренних интересов ее структурных подразделений.

Понятие глобального критерия может рассматриваться применительно к народному хозяйству в целом, его отдельным отраслям и предприятиям, имеющим относительно обособленные звенья. Возможной формулировкой народно-хозяйственного критерия оптимальности служит интегральная общественная полезность благ и услуг.

Для планирования деятельности отдельных отраслей народного хозяйства необходимы локальные критерии оптимальности, отличающиеся от глобального. Для отрасли строительства это может быть максимальный ввод в эксплуатацию объектов и сооружений или приведенные затраты.

Локальный критерий оптимальности конкретизирует требования глобального таким образом, чтобы интересы каждого предприятия и его звеньев совпадали с интересами народного хозяйства в целом.

В свою очередь критерий оптимальности функционирования отрасли, если рассматривать ее как относительно обособленную систему, является глобальным по отношению к локальным критериям функционирования предприятий и организаций отрасли.

Искомыми параметрами являются переменные, обеспечивающие достижение цели при экстремальном значении критерия оптимальности. Подробнее *Такими переменными могут быть: набор объектов, этапов и комплексов работ, максимизирующий программу работ строительной организации; распределение объемов выполняемых работ по способам производства, минимизирующее приведенные затраты на их выполнение и т.д.*

Математическая интерпретация критерия оптимальности задач в виде функции многих переменных носит название целевой функции. Целевая функция обычно имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j \times X_j \to \min(\max). \qquad (1)$$

Коэффициенты C_j при искомых переменных X_j представляют собой величину критерия оптимальности в расчете на единицу соответствующей переменной.

Система ограничений задачи представляет собой совокупность равенств или неравенств, с помощью которых устанавливают связь между искомыми переменными модели и определяют допустимые границы их изменения. Ограничения имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} \times X_j \le B_i \qquad i = \overline{1, m}. \qquad (2)$$

Подробнее

Ограничения могут быть по выпускаемым изделиям и потребляемым материалам, основным и оборотным фондам, трудовым ресурсам, способам выполнения работ, срокам и т.д. Строгое равенство используют для реализации ограничений по потребностям, величина которых жестко фиксирована: объемы работ, количество ресурсов и т.д.

Неравенства вида ≤ записывают по лимитированным ресурсам: машинам, рабочим, капитальным вложениям и т.д.

Неравенства вида ≥ характеризуют ограничения по нелимитированным ресурсам и определяют минимально необходимый объем работ, минимальный выпуск продукции и т.д.

Если система ограничений содержит равенства и неравенства, то она может оказаться несовместной, т.е. неразрешимой.

Несовместность системы ограничений, как правило, может быть установлена только в процессе решения задачи.

Потребность в трудовых и материально-технических ресурсах на единицу искомой переменной X_j-Q_{ij} задается в виде коэффициента при переменных в ограничениях.

Модель с формально математических позиций представляет собой задачу, в которой необходимо определить значение неизвестных переменных обращающих в минимум или максимум величину целевой функции при соблюдении ограничений, принятых при решении данной задачи.

В тех случаях, когда целевая функция и ограничения задачи хотя бы дважды дифференцируемы, можно применять **классические методы оптимизации**. Подробнее пример 1 далее

Если глобальный экстремум функции находится на границе области решений или множество допустимых значений аргумента дискретно, для решения применяют **методы математического программирования.** Подробнее пример 2 этой лекции

Если критерий эффективности и ограничения представляет линейную функцию, то такая задача является **задачей линейного программирования**. Подробнее лекция 2

Если решения должны быть целыми числами, то эта задача **целочисленного линейного программирования**. Подробнее лекция 2 вопрос 3

Если критерий эффективности и (или) система ограничений задаются нелинейными функциями, то получается задача **нелинейного программирования**. Подробнее лекция 4 вопрос 1

Если целевая функция и (или) ограничения зависят от параметров, то получаем **задачу параметрического программирования**, Подробнее лекция 3 вопрос 1 если эти функции носят случайный характер — **задачу стохастического программирования**. Подробнее лекция 3 вопрос 2.

Наибольший вклад в формирование и развитие теории исследования операций внесли Р.Акоф, Р. Беллман, Дж.Данциг, Г.Кун, Т. Саати, А.Кофман, Л.В.Канторович и другие ученые.

Подробнее

Важная роль в создании современного математического аппарата и развития многих направлений исследования операций принадлежит нашим соотечественникам Б. В. Гнеденко, М. П. Бусленко, В. С. Михалевичу, Н. Н. Моисееву, Ю. М. Ермолаеву, Н. З. Шору и др. особенно хочется отметить выдающегося ученого Л. В. Канторовича, который сформулировал новый класс условно-экстремальных задач и предложил универсальный метод их решения, положив начало новому направлению прикладной математики — линейному программированию. За выдающийся вклад в разработку теории оптимального использрвания ресурсов в экономике Л. В. Канторовичу вместе с профессором Т. Купмансом в 1975 году присвоена Нобелевская премия в области экономики.

Подробнее

Пример. Оптимизация прибыли предприятия методом предельного анализа

Объем производства продукции, цена продукта и издержки (затраты на производство продукции) находятся в определенной функциональной зависимости друг от друга. Поэтому получение максимальной прибыли, возможно, при определенных сочетаниях между этими величинами. При принятии решений, нацеленных на увеличение прибыли предприятия, необходимо учитывать предполагаемые величины предельного дохода и предельных издержек. Предельный доход - это прирост выручки от реализации на единицу прироста количества производимого продукта. Соответственно предельные издержки равны приросту затрат на производство продукции, приходящемуся на единицу прироста количества. Чтобы прибыль была максимальной, необходимо равенство предельных издержек и предельного дохода.

Введем следующие условные обозначения:

Q - количество товара (продукта);

P - цена единицы товара;

$P \times Q$ - выручка от реализации товара;

C - издержки производства (затраты);

R - прибыль от реализации.

Тогда стремление получить максимум прибыли может быть представлено в формальном виде следующей функцией:

$$R = (P \times Q) - C \rightarrow \max. \qquad (3)$$

Применение предельного подхода к этой функции дает следующее отношение:

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{d(P \times Q)}{dQ} - \frac{dC}{dQ} = 0; \quad \frac{d(P \times Q)}{dQ} = \frac{dC}{dQ}, \qquad (4)$$

где $\frac{dC}{dQ}$ - предельные издержки;

$\frac{d(P \times Q)}{dQ}$ - предельный доход.

Отсюда следует: чтобы прибыль была максимальна, необходимо равенство предельных издержек и предельных доходов. Это соотношение позволяет найти оптимальный размер объема производства при известных (или заданных) функциях спроса P=f(Q) и издержек C=g(Q).

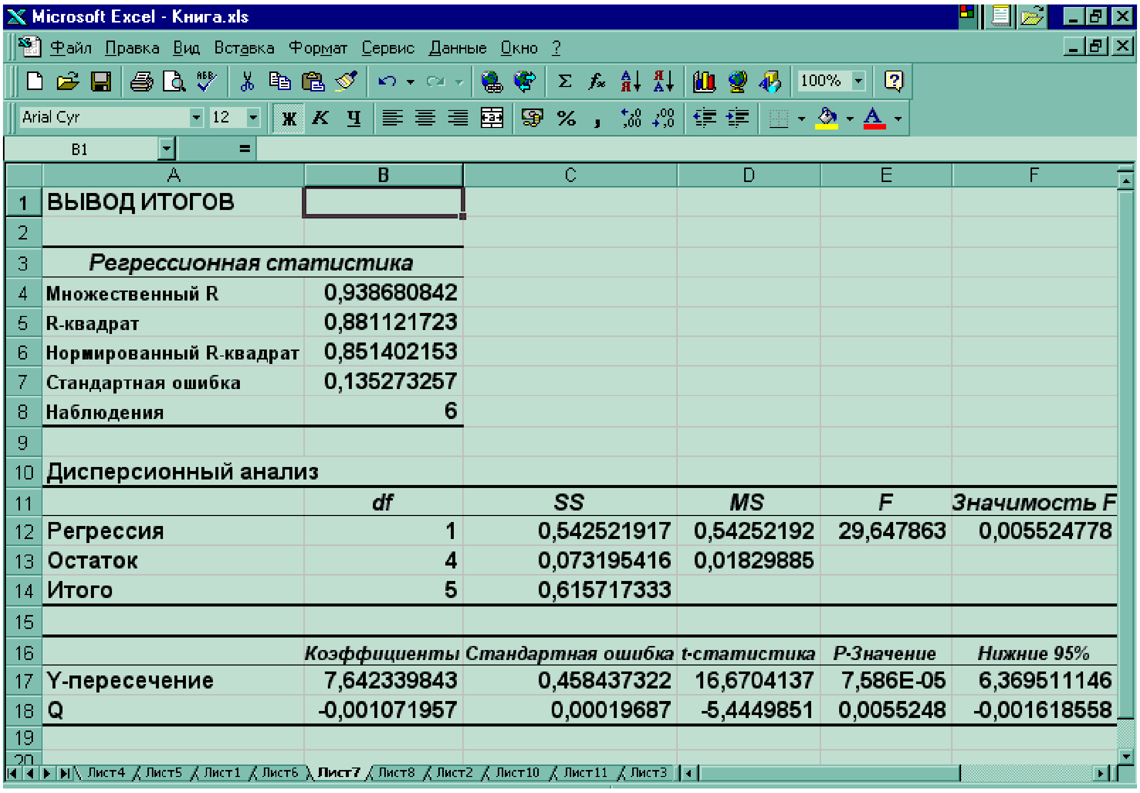
Таблица 1 - Исходные данные для предельного анализа

Годы	Количество товара(Q), шт.	Цена единицы Продукта (P), тыс.р.	Себестоимость (C), тыс.р.	Выручка (P×Q) тыс.р.	Прибыль (R), тыс.р.
1	1974	5.375	8342	10610	2268
2	2002	5.506	8412	11023	2611
3	2177	5.513	9650	12002	2352
4	2417	5.068	9870	12249	2379
5	2605	4.76	9944	12400	2456
6	2695	4.764	10137	12839	2702

Для анализа зависимости между ценой продукта и его количеством динамике построим регрессионные уравнения, устанавливающие взаимосвязи между искомыми показателями.

Для построения аналитических зависимостей с применением ПК используем одну из версий электронных таблиц EXCEL

В случае линейной зависимости цены единицы продукции и количеством реализованного товара, результаты регрессионного анализа выглядят следующим образом:



	A	B	C	D	E	F
1	ВЫВОД ИТОГОВ					
2						
3	*Регрессионная статистика*					
4	Множественный R	0,938680842				
5	R-квадрат	0,881121723				
6	Нормированный R-квадрат	0,851402153				
7	Стандартная ошибка	0,135273257				
8	Наблюдения	6				
9						
10	Дисперсионный анализ					
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
12	Регрессия	1	0,542521917	0,54252192	29,647863	0,005524778
13	Остаток	4	0,073195416	0,01829885		
14	Итого	5	0,615717333			
15						
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*
17	Y-пересечение	7,642339843	0,458437322	16,6704137	7,586E-05	6,369511146
18	Q	-0,001071957	0,00019687	-5,4449851	0,0055248	-0,001618558
19						

Рисунок 1 - Результаты регрессионного анализа

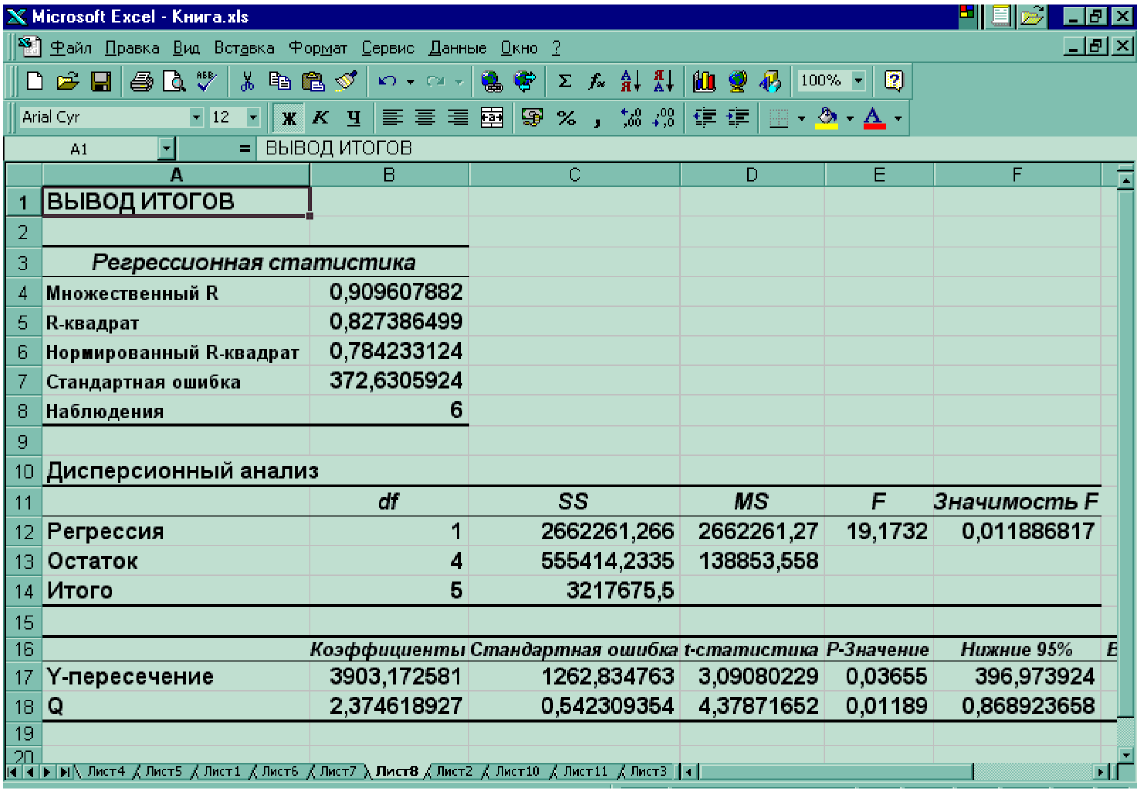
Расчетный коэффициент корреляции Rp = 0.88; исправленный R= 0.85.

В результате расчета получили линейную функцию, определяющую зависимость между ценой продукта и количеством произведенной продукции.

$$P = 7.642 - 0.001 \times Q. \quad (5)$$

Найдем линейную зависимость между издержками производства и количеством выпускаемой продукции в динамике.

Регрессионное уравнение можно построить по результатам расчета:



	A	B	C	D	E	F
1	ВЫВОД ИТОГОВ					
2						
3	*Регрессионная статистика*					
4	Множественный R	0,909607882				
5	R-квадрат	0,827386499				
6	Нормированный R-квадрат	0,784233124				
7	Стандартная ошибка	372,6305924				
8	Наблюдения	6				
9						
10	Дисперсионный анализ					
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
12	Регрессия	1	2662261,266	2662261,27	19,1732	0,011886817
13	Остаток	4	555414,2335	138853,558		
14	Итого	5	3217675,5			
15						
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*
17	Y-пересечение	3903,172581	1262,834763	3,09080229	0,03655	396,973924
18	Q	2,374618927	0,542309354	4,37871652	0,01189	0,868923658

Рисунок 2 - Результаты регрессионного анализа

Расчетный коэффициент корреляции Rр= 0.83, исправленный Ru=0.78.

В результате расчетов получили линейную функцию зависимости издержек от объема произведенной продукции:

$$C = 3903.17 + 2.375 \times Q. \tag{6}$$

Приравнивая предельный доход и предельные издержки, найдем величину оптимального выпуска продукции для случая линейных зависимостей исследуемых показателей:

$$P = 7.624 - 0.001 \times Q; \tag{7}$$

$$C = 3903.173 + 2.375 \times Q; \tag{8}$$

$$P \times Q = 7.642 \times Q - 0.001 \times Q^2; \tag{9}$$

$$\frac{d(P \times Q)}{dQ} = 7.642 - 0.002 \times Q; \quad \frac{dC}{dQ} = 2.375; \tag{10}$$

$$7.642 - 0.002 \times Q = 2.375, \text{т.е} Q = 2633.5. \qquad (11)$$

Оптимальный объем выпуска продукции составляет 2634 шт. Зная размер выпуска, можно определить цену продукта, выручку, прибыль и издержки производства. Результаты расчетов представлены в таблице 4.2. В ней для сравнения приведены также фактические данные предприятия за 6-й год.

Таблица 2 - Сравнительные данные об объемах производства по результатам предельного анализа

Значения	Количество товара(Q) шт.	Цена ед. Продукта (Р), тыс.р.	Себестоимость (С), тыс.р.	Выручка (Р×Q), тыс.р.	Прибыль (R), тыс.р.
Фактическое 6-й год	2695	4.764	10137	12839	2702
Оптимальное	2634	5.009	10158	13191	3033
Отклонение Отклонение, %	- 61 2.3	.245 5.1	21 0.2	352 2.7	331 12.3

Применение предельного анализа показывает, что у предприятия имеются возможности увеличить прибыль на 331 тыс.р. за счет увеличения цены выпускаемой продукции при незначительном сокращении объемов производства. При этом затраты предприятия возрастут всего на 21 тыс.р., или на 0.2%, а прибыль возрастет на 331 тыс.р., что составляет 12.3% от фактической прибыли за 6-й год. Следовательно, предприятие может в перспективе придерживаться стратегии, направленной на выпуск продукции, пользующейся спросом, по более высокой цене, но в меньшем количестве.

Пример оптимизации прибыли предприятия методами математического программирования

Метод оптимизации прибыли, основанный на предельном анализе, может быть реализован в тех случаях, когда фирма производит один вид товара или услуг. Однако в большинстве случаев производство не ограничивается товаром одного вида, а выпускаются товары определенной номенклатуры.

Оптимизация по каждому виду товара будет некорректной, поскольку ограниченные ресурсы используются для производства различных товаров или услуг и при автономном решении по каждому товару. С применением методов математического программирования можно распределить имеющиеся ресурсы по направлениям деятельности с максимизацией экономического результата.

Решение задачи по определению оптимальных финансово-экономических показателей выполним в 2 этапа:

Этап 1. Экономико-статистическое моделирование. На этом этапе необходимо получить линейные регрессионные уравнения, используемые в дальнейшем в качестве целевой функции и ограничений.

Этап 2. Оптимизация финансово-экономических показателей методами линейного программирования. На этом этапе определяются оптимальные параметры предприятия, и оценивается их отклонение от фактических значений.

Определим оптимальное значение прибыли исходя из условия, что производится 2 вида товара величиной Q_1 и Q_2 по цене P_1 и P_2. Исходные данные для решения представлены в таблице 4.3.

Построим регрессионное уравнение вида:

$$R = a_1 \times Q_1 + a_2 \times Q_2 + a_3 \times P_1 + a_4 \times P_2 + a_5 \times C + a_6 \times V, \qquad (12)$$

где Q_1 - количество единиц товара 1-го вида;

Q_2 - количество единиц товара 2-го вида;

R - прибыль;

P_1 - стоимость единицы товара 1-го вида;

P_2 - стоимость единицы товара 2-го вида;

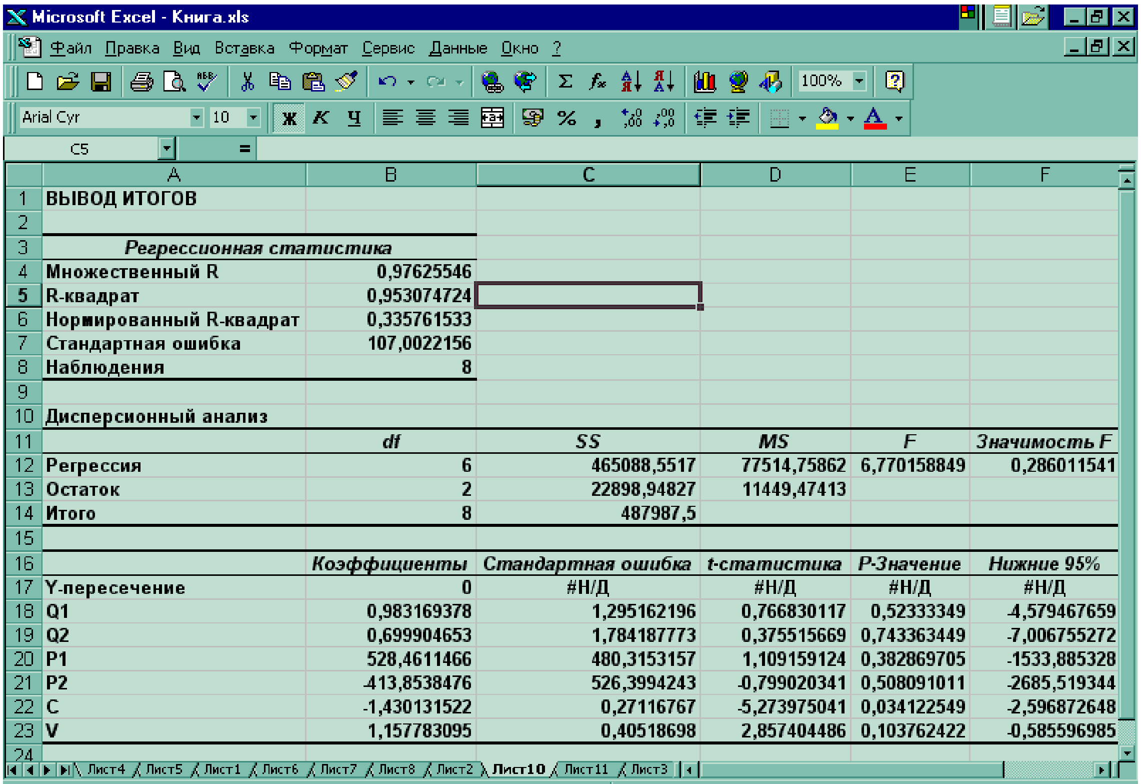
C - себестоимость произведенной продукции;

V - выручка от реализации, произведенной продукции.

Таблица 3 - Исходные данные для решения задачи оптимизации

	Q1	Q2	P1	P2	C	V(P1×Q1+P2×Q2)	R
1	980	994	5.1	5.65	8340	10610	2270
2	985	1017	5.2	5.80	8400	11023	2800
3	1012	1165	5.25	5.74	9600	12002	2350
4	1204	1213	4.6	5.533	9850	12149	2100
5	1250	1355	4.2	5.277	9940	12400	2320
6	1307	1388	4.3	5.2	10100	12839	2750
7	1310	1400	4.2	5.1	9960	12500	2640
8	1280	1410	4.3	5.2	9980	12750	2720

Результаты расчета имеют вид:



ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,97625546
R-квадрат	0,953074724
Нормированный R-квадрат	0,335761533
Стандартная ошибка	107,0022156
Наблюдения	8

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	6	465088,5517	77514,75862	6,770158849	0,28601541
Остаток	2	22898,94827	11449,47413		
Итого	8	487987,5			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%
Y-пересечение	0	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
Q1	0,983169378	1,295162196	0,766830117	0,52333349	-4,579467659
Q2	0,699904653	1,784187773	0,375515669	0,743363449	-7,006755272
P1	528,4611466	480,3153157	1,109159124	0,382869705	-1533,885328
P2	-413,8538476	526,3994243	-0,799020341	0,508091011	-2685,519344
C	-1,430131522	0,27116767	-5,273975041	0,034122549	-2,596872648
V	1,157783095	0,40518698	2,857404486	0,103762422	-0,585596985

Рисунок 3 - Результаты регрессионного анализа

Регрессионное уравнение зависимости прибыли от влияющих на нее факторов имеет вид:

$$R = 0.98 \times Q_1 + 0.69 \times Q_2 + 528.4 \times P_1 - 413.85 \times P_2 - 1.43 \times C + 1.16 \times V. \quad (13)$$

В качестве одного из ограничений строится регрессионное уравнение зависимости, связывающий выручку от реализации с влияющими на нее факторами:

$$V = a_1 \times Q_1 + a_2 \times Q_2 + a_3 \times P_1 + a_4 \times P_2, \tag{14}$$

где Q_1 - число единиц товара 1-го вида;

Q_2 - число единиц товара 2-го вида.

Расчет производится аналогично.

Уравнение регрессии:

$$V = 1.87 \times Q_1 + 5.25 \times Q_2 + 774.2 \times P_1 - 31.86 \times P_2. \tag{15}$$

На 2-ом этапе реализуется экономико-математическая модель, которая имеет следующий вид. Целевая функция: прибыль от реализации продукции должна быть максимальной:

$$R = \sum_{j=1}^{n} a_j \times x_j \to \max, \tag{16}$$

где $\mathbf{a_j}$ - коэффициент при j-ой переменной; $\mathbf{x_j}$ - значение j-ой переменной определяемое в процессе решения задачи.

Для решаемой задачи целевая функция имеет вид:

$$300.35 \times x_3 - 377.57 \times x_4 - 1.8 \times x_5 + 1.69 \times x_6 \to \max. \tag{17}$$

Ограничения:

1.Зависимость между объемом реализации продукции и влияющими на него факторами:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \times x_i - x_{i+1} = 0. \tag{18}$$

Для решаемой задачи это ограничение имеет вид:

$$1{,}87 \times x_1 + 5.25 \times x_2 + 774.2 \times x_3 + 31.84 \times x_4 - x_6 = 0. \quad (19)$$

2. Значение каждой переменной не ниже минимально необходимого и не выше максимально допустимого:

$$D_{j\min} \leq x_j \leq D_{j\max} \quad (20)$$

$$900 \leq x_1 \leq 1500 \quad (21)$$

$$900 \leq x_2 \leq 1500 \quad (22)$$

$$5.0 \leq x_3 \leq 5.5 \quad (23)$$

$$5.5 \leq x_4 \leq 6.0 \quad (24)$$

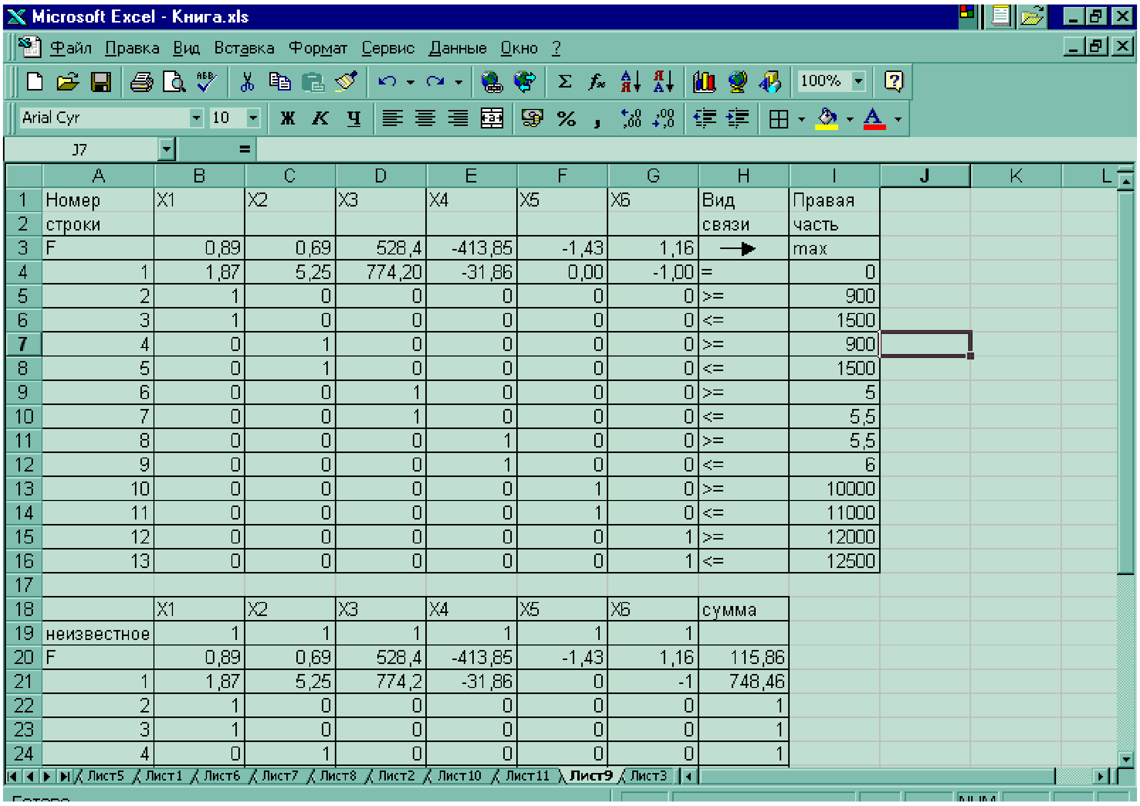
$$10000 \leq x_5 \leq 11000 \quad (25)$$

$$12000 \leq x_6 \leq 12500 \quad (26)$$

Таблица 4 – Симплекс-матрица задачи

Номер строки	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Вид связи	Правая часть
F	0.89	0.69	528.4	-413.85	-1.43	1.16	$\rightarrow$	max
1	1.87	5.25	774.2	-31.86	0	-1	=	0
2	1	0	0	0	0	0	$\geq$	900
3	1	0	0	0	0	0	$\leq$	1500
4	0	1	0	0	0	0	$\geq$	900
5	0	1	0	0	0	0	$\leq$	1500
6	0	0	1	0	0	0	$\geq$	5.0
7	0	0	1	0	0	0	$\leq$	5.5
8	0	0	0	1	0	0	$\geq$	5.5
9	0	0	0	1	0	0	$\leq$	6.0
10	0	0	0	0	1	0	$\geq$	10000
11	0	0	0	0	1	0	$\leq$	11000
12	0	0	0	0	0	1	$\geq$	12000
13	0	0	0	0	0	1	$\leq$	12500

Расчет можно произвести с помощью окна «Поиск решения» из пункта меню «Сервис» процессора электронных таблиц EXCEL. Исходные Данные представлены на рисунке.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Номер	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Вид	Правая
2	строки							связи	часть
3	F	0,89	0,69	528,4	-413,85	-1,43	1,16	→	max
4	1	1,87	5,25	774,20	-31,86	0,00	-1,00	=	0
5	2	1	0	0	0	0	0	>=	900
6	3	1	0	0	0	0	0	<=	1500
7	4	0	1	0	0	0	0	>=	900
8	5	0	1	0	0	0	0	<=	1500
9	6	0	0	1	0	0	0	>=	5
10	7	0	0	1	0	0	0	<=	5,5
11	8	0	0	0	1	0	0	>=	5,5
12	9	0	0	0	1	0	0	<=	6
13	10	0	0	0	0	1	0	>=	10000
14	11	0	0	0	0	1	0	<=	11000
15	12	0	0	0	0	0	1	>=	12000
16	13	0	0	0	0	0	1	<=	12500
17									
18		X1	X2	X3	X4	X5	X6	сумма	
19	неизвестное	1	1	1	1	1	1		
20	F	0,89	0,69	528,4	-413,85	-1,43	1,16	115,86	
21	1	1,87	5,25	774,2	-31,86	0	-1	748,46	
22	2	1	0	0	0	0	0	1	
23	3	1	0	0	0	0	0	1	
24	4	0	1	0	0	0	0	1	

Рисунок 4 - Исходные данные для расчета

Далее осуществляется ввод исходных данных в окно «Поиск решения»

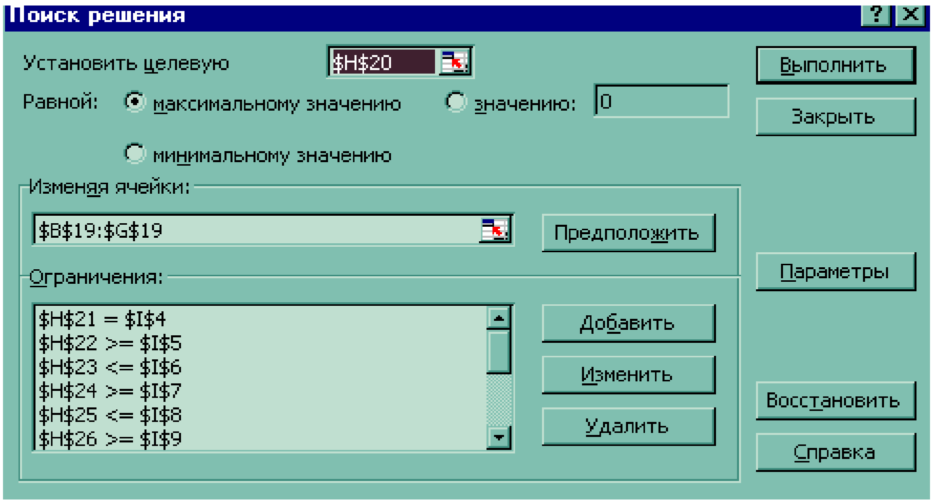
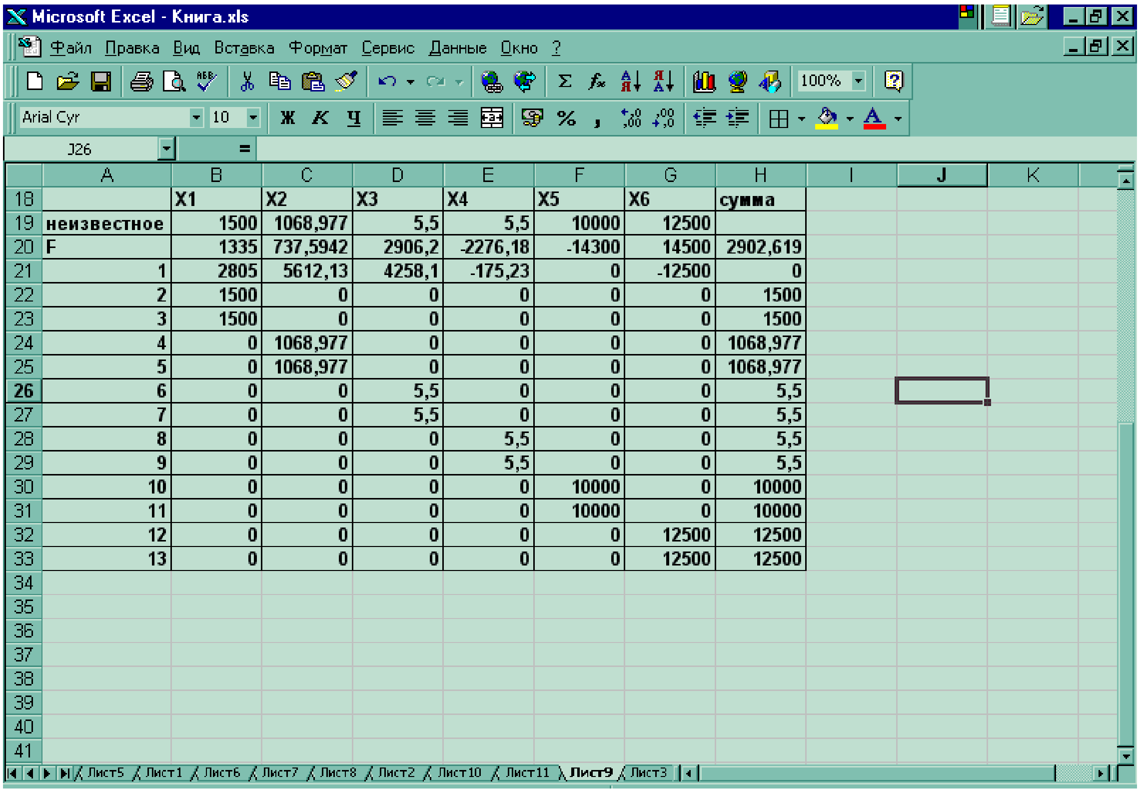


Рисунок 5 - Окно «Поиск решения»

Результаты расчета представлены на рисунке 6.



	A	B	C	D	E	F	G	H
18		X1	X2	X3	X4	X5	X6	сумма
19	неизвестное	1500	1068,977	5,5	5,5	10000	12500	
20	F	1335	737,5942	2906,2	-2276,18	-14300	14500	2902,619
21	1	2805	5612,13	4258,1	-175,23	0	-12500	0
22	2	1500	0	0	0	0	0	1500
23	3	1500	0	0	0	0	0	1500
24	4	0	1068,977	0	0	0	0	1068,977
25	5	0	1068,977	0	0	0	0	1068,977
26	6	0	0	5,5	0	0	0	5,5
27	7	0	0	5,5	0	0	0	5,5
28	8	0	0	0	5,5	0	0	5,5
29	9	0	0	0	5,5	0	0	5,5
30	10	0	0	0	0	10000	0	10000
31	11	0	0	0	0	10000	0	10000
32	12	0	0	0	0	0	12500	12500
33	13	0	0	0	0	0	12500	12500

Рисунок 6 - Результаты расчета

По результатам расчета видно, что оптимальная прибыль составит 2902.6 тыс.р., при этом необходимо реализовать 1500 изделий 1-го вида по цене 5.5 тыс.р. и 1069 изделий 2-го вида по цене 5.5 тыс.р. При этом себестоимость продукции составит 10000 тыс.р., выручка 12500 тыс.р.

Вопросы для самопроверки:

1. В чем отличие исследования операций от эконометрики?
2. Приведите примеры операций, их целей, ограничений и решений
3. Что такое критерий оптимальности, целевая функция, ограничения?
4. Приведите пример задачи оптимизации, составьте целевую функцию и систему ограничений задачи.
5. Охарактеризуйте область применения и специфику моделей оптимизационных задач.