

Системы одновременных уравнений

Вопросы лекции:

1. Сущность и понятие системы одновременных уравнений
2. Структурная и приведенная форма системы
3. Идентифицируемость систем одновременных уравнений

Вопрос 1. Сущность и понятие системы одновременных уравнений

Сложность экономических систем и разнообразие взаимосвязей между факторами приводят к нецелесообразности оценивания зависимостей только с помощью уравнений регрессии.

Изменение одной переменной не может происходить при абсолютной неизменности других. Её изменение повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков. Например, изменение цен поставщиков на один из ресурсов (например, цемент) влечет изменение цен на конструкции, изменение затрат на строительство, цен строительной продукции, прибыли и рентабельности строительных предприятий, спроса на строительную продукцию и т.п. Таким образом, отдельно взятое уравнение регрессии не может характеризовать истинное влияние отдельных признаков динамику зависимой переменной.

Поэтому в эконометрике важное место имеет проблема описания структуры связей между системой переменных, решение которой возможно в рамках рассмотрения систем уравнений.

Система уравнений может быть построена по-разному.

Возможна система независимых уравнений

В системе независимых уравнений каждая зависимая переменная y рассматривается как функция одного и того же набора факторов x :

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + e_1, \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + e_2 \\y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + e_n\end{aligned}\tag{7.1}$$

Набор факторов в каждом уравнении может несколько изменяться:

$$\begin{aligned}y_1 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); \\y_2 &= f(x_1, x_3, x_4, x_5); \\y_3 &= f(x_2, x_3, x_5); \\y_4 &= f(x_3, x_4, x_5)\end{aligned}\tag{7.2}$$

Отсутствие того или иного фактора в уравнении системы может быть следствием как экономической нецелесообразности его включения в модель, так и несущественности его воздействия на результативный признак (незначимо значение t -критерия или F - критерия для данного фактора).

Тем не менее, каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно и, по сути, по существу, является уравнением регрессии. **лекция 5**

Если зависимая переменная одного уравнения выступает в виде фактора x в другом уравнении, то строится модель в виде **системы рекурсивных уравнений**

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + e_1, \\ y_2 &= b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + e_2, \\ y_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3m}x_m + e_3, \\ y_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + e_n. \end{aligned} \tag{7.3.}$$

В данной системе зависимая переменная y включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов x . Это означает, что в первом уравнении одна эндогенная переменная выражена только через экзогенные. Во втором вторая эндогенная через экзогенные и, возможно, через первую эндогенную. Третья - через экзогенные и через первые две эндогенные и т.д.

Примером такой системы может служить модель производительности труда и фондоотдачи вида

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + e_1, \\ y_2 &= b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + e_2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

где y_1 - производительность труда; y_2 - фондоотдача; x_1 - фондовооруженность труда; x_2 - энерговооруженность труда; x_3 - квалификация рабочих.

Как и в предыдущей системе, каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и его параметры определяются методом наименьших квадратов.

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила система взаимосвязанных уравнений. В ней одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях - в правую часть системы (одни и те же переменные у одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других):

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + \dots + b_{1n} y_n + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m + e_1, \\ y_2 &= b_{21} y_1 + b_{23} y_3 + \dots + b_{2n} y_n + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m + e_2, \\ y_n &= b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \dots + b_{nn-1} y_{n-1} + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m + e_n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Система взаимосвязанных уравнений получила название **система совместных, одновременных уравнений**.

Рассмотрим, для примера, модель спроса и предложения.

Обозначим Q_t^S, Q_t^D – соответственно объёмы предложения и спроса в момент времени t ; P_t – цена товара, Y_t – доход в момент времени t .

Предполагается, что на рынке существует равновесие между спросом и предложением (то есть количество предлагаемого товара равно количеству покупаемого)

$$Q_t^S = Q_t^D = Q_t \quad (7.6)$$

Такое динамическое равновесие может быть представлено следующей моделью:

$$\begin{aligned} Q_t^S &= a_1 + a_2 P_t + e_t \\ Q_t^D &= b_1 + b_2 P_t + b_3 Y_t + u_t \end{aligned} \quad (7.7)$$

Где a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты регрессии, e_t, u_t – ошибки (остатки или невязки, отражающие влияние случайного фактора).

Объем предложения зависит только от цены товара, объем спроса – еще от уровня дохода покупателей.

Обозначим отклонения фактических от средних величин (с чертой над буквой – средние значения, т.к. статистика и эконометрика работают со средними значениями):

$$\begin{aligned} q_t &= Q_t - \bar{Q}_t \\ p_t &= P_t - \bar{P}_t \\ y_t &= Y_t - \bar{Y}_t \end{aligned} \quad (7.8)$$

Тогда: (выражаем наблюдаемые в момент t значения как среднее плюс отклонения, подставляя в модель спроса и предложения)

$$\begin{aligned} q_t + \bar{Q}_t &= a_1 + a_2 p_t + a_2 \bar{P}_t + e_t \\ q_t + \bar{Q}_t &= b_1 + b_2 p_t + b_2 \bar{P}_t + b_3 y_t + b_3 \bar{Y}_t + u_t \end{aligned} \quad (7.9)$$

Если усреднить исходные уравнения предложения и спроса, получим (здесь ошибки не учитываем, т.к. речь идет о средних):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_t &= a_1 + a_2 \bar{P}_t \\ \bar{Q}_t &= b_1 + b_2 \bar{P}_t + b_3 \bar{Y}_t \end{aligned} \quad (7.10)$$

С учётом этих соотношений предыдущие два уравнения (выражения для наблюдаемых значений как для суммы средних и отклонений) запишутся как (остальное сокращается при подстановке):

$$\begin{aligned} q_t &= a_2 p_t + e_t \\ q_t &= b_2 p_t + b_3 y_t + u_t \end{aligned} \quad (7.11)$$

В соответствии с этой моделью цена и величина спроса-предложения определяются одновременно (так как от равенства объема спроса и предложения зависит цена, и, одновременно, лишь при равновесной цене достигается равенство спроса и предложения), поэтому такие системы называются системами одновременных уравнений.

Величины цены и спроса являются эндогенными переменными, которые должны определяться в рамках модели, а величина дохода – экзогенной переменной – её значение задаётся.

Предполагается, что в каждом уравнении экзогенные переменные некоррелированы с ошибкой. Тогда как эндогенные переменные, стоящие в правых частях уравнений, могут иметь отличную от нуля корреляцию с ошибкой в соответствующем уравнении. В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. Непосредственное применение метода наименьших квадратов даёт смещённые и несостоятельные оценки параметров регрессии $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$.

С этой целью используются специальные приемы оценивания.

Вопрос 2. Структурная и приведённая форма системы уравнений

Система (7.5 и 7.11) называется структурной формой модели, а коэффициенты a_2, b_2, b_3 – структурными коэффициентами. То есть **структурная форма системы** – это представление системы, в котором в уравнениях может присутствовать более одной эндогенной переменной. Структурная форма системы описывает систему взаимозависимостей между экономическими переменными.

Приведённой (прогнозной) формой системы называется представление системы, в котором в каждом уравнении имеется только одна эндогенная переменная (так как эндогенные переменные выражены через экзогенные).

Разрешим систему (7.11) относительно p_t, q_t (выразим эти значения):

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{a_2 b_3 y_t}{a_2 - b_2} + \frac{a_2 u_t - b_2 e_t}{a_2 - b_2} \\ p_t &= \frac{b_3 y_t}{a_2 - b_2} + \frac{u_t - e_t}{a_2 - b_2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Обозначая (с целью упрощения уравнений):

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a_2 b_2}{a_2 - b_2}; r_1 = \frac{b_3}{a_2 - b_2} \\ v_{1t} &= \frac{a_2 u_t - b_2 e_t}{a_2 - b_2}; v_{1t} = \frac{u_t - e_t}{a_2 - b_2} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} q_t &= r_1 y_t + v_{1t} \\ p_t &= r_2 y_t + v_{2t}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

Система (7.14), в которой все эндогенные переменные явно выражены через экзогенные переменные и случайные остаточные компоненты, называется *приведённой формой системы одновременных уравнений*.

Способ оценивания структурных коэффициентов с помощью оценок коэффициентов приведённой формы называется **косвенным методом наименьших квадратов**.

В этой форме экзогенная переменная y_t некоррелирована с возмущениями v_{1t} , v_{2t} , поэтому метод наименьших квадратов даст несмещённые и состоятельные оценки $\hat{r}_1, \hat{r}_2$ коэффициентов r_1, r_2 . Так как $a_2 = r_1/r_2$, (находится из обозначения с целью упрощения уравнений), по оценкам $\hat{r}_1, \hat{r}_2$ получаем оценку a_2 : $\hat{a}_2 = \hat{r}_1/\hat{r}_2$, которая по теореме Слуцкого будет состоятельной оценкой структурного коэффициента a_2 .

Очевидно, таким же образом, нельзя воспользоваться соотношениями коэффициентов r_1, r_2 для получения оценок структурных коэффициентов b_2, b_3 . Таким образом, второе уравнение в системе (7.11) **неидентифицируемо**.

Вопрос 3. Идентифицируемость систем одновременных уравнений

В системе одновременных уравнений (7.5) переменные y_i – определяются внутри системы и являются эндогенными; x_i – внешние по отношению к системе, то есть экзогенные, переменные и лагированные значения эндогенных переменных, которые являются предопределёнными. Индекс i определяет момент наблюдения, $i = 1, \dots, n$, а $e_1, e_{2t}, \dots, e_n$ – случайные ошибки. Система (7.5) – структурная форма модели.

После решения системы (7.5) относительно эндогенных переменных получаем приведённую форму модели:

$$\begin{aligned} y_1 &= k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + \dots + k_{1m} x_m, \\ y_2 &= k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + \dots + k_{2m} x_m, \\ y_n &= k_{n1} x_1 + k_{n2} x_2 + \dots + k_{nm} x_m. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Обозначим P – количество эндогенных, Q – количество экзогенных и лаговых переменных, отсутствующих в уравнении. Тогда **степень идентифицируемости уравнения** определяется из следующих неравенств:

$P = Q + 1$ – уравнение идентифицируемо;
 $P > Q + 1$ – уравнение неидентифицируемо;
 $P < Q + 1$ – уравнение сверхидентифицируемо.

Эти условия являются лишь необходимыми, так как даже при их выполнении некоторые уравнения могут оказаться линейно зависимыми.

Достаточным условием идентификации является следующее.

Определитель матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, отсутствующих в исследуемом уравнении, не равен нулю, и ранг этой матрицы не менее числа эндогенных переменных системы минус единица.

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + e_1, \\
 y_2 &= b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + e_2, \\
 y_3 &= b_{31} y_1 + a_{33} x_3 + e_3.
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

Необходимо определить степень идентифицируемости каждого уравнения.

Решение

В первом уравнении две эндогенные переменные y_1, y_2 и отсутствует одна экзогенная, поэтому

$$P = 2, Q = 1, P = Q + 1,$$

выполнено необходимое условие идентификации.

Достаточное условие идентификации:

Отсутствуют переменные y_3, x_3 ; матрица коэффициентов при этих переменных (для y_3 коэффициент первый 0, так как y_3 нет во втором уравнении, -1, если третье уравнение приравнять к 0):

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ -1 & a_{33} \end{vmatrix}
 \tag{7.17}$$

Поэтому достаточное условие идентификации выполняется.

Во втором уравнении две эндогенные переменные y_1, y_2 и отсутствует одна экзогенная, поэтому

$$P = 2, Q = 1, P = Q + 1,$$

выполнено необходимое условие идентификации.

Достаточное условие идентификации. Отсутствуют переменные y_3, x_1 ; матрица коэффициентов при этих переменных:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (7.18)$$

определитель этой матрицы также не равен нулю, ранг равен количеству эндогенных переменных минус единица. Поэтому достаточное условие идентификации для второго уравнения выполняется.

Третье уравнение сверхидентифицируемо, поскольку $P = 2$, $Q = 2$, $P < Q + 1$.

Для решения идентифицируемого уравнения применяется **косвенный метод наименьших квадратов**, для решения сверхидентифицируемых – **двухшаговый метод наименьших квадратов**.

Косвенный МНК состоит из следующих этапов.

1) Структурную форму модели преобразуют к приведённой. Уравнения приведённой формы независимы друг от друга, поэтому для идентификации приведённых коэффициентов может быть применён обычный МНК.

2) Алгебраически выражают структурные коэффициенты через оценки приведённых. Полученные значения будут оценками структурных коэффициентов.

Двухшаговый МНК состоит из следующих этапов.

1) Вычисляют оценки параметров приведённой формы системы.

2) Определяют эндогенные переменные, находящиеся в правой части сверхидентифицируемого уравнения и находят расчётные значения этой переменной по соответствующим уравнениям приведённой формы.

3) Обычным МНК определяют параметры структурного уравнения, используя в качестве исходных данных фактические значения предопределённых переменных и расчётные значения эндогенных переменных, находящиеся в правой части сверхидентифицируемого уравнения.

Контрольные вопросы по теме 7:

1. Назовите возможные способы построения систем уравнений. Чем они отличаются друг от друга?
2. Как связаны между собой структурная и приведенная формы модели?
3. В чем состоят проблемы идентификации модели и какие условия идентификации (необходимое и достаточное) вы знаете?
4. В чем суть косвенного метода наименьших квадратов?
5. В каких случаях используется двухшаговый метод наименьших квадратов?