

Лекция №5.

Приведение стержневых систем к системам с сосредоточенной массой.

1. Эквивалентные системы с одной степенью свободы.
2. Упругая деформация стержневых элементов и сведение ее к системе с сосредоточенной массой.
3. Пластическая деформация стержневых изгибаемых систем и сведение к системе с сосредоточенной массой.
4. Перемещение в эквивалентных системах.

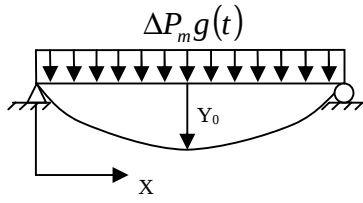
1. Правило сведения динамической нагрузки к статической (эквивалентной) получено для системы с сосредоточенной массой и с одной степенью свободы. Стержневые изгибаемые элементы являются системами с распределенной массой и линия деформирования является, как минимум, двумерной, то есть перемещение балки, колонны и т.д. должно быть описано в рамках двух степеней свободы.

Из курсов механики известно, что с помощью вариационного метода, когда линия прогиба задается из условия соблюдения граничных условий и все уровни деформации отличаются только величиной максимального прогиба, который меняется со временем, а сама форма деформируемого элемента не изменяется. При такой постановке задачи система сводится к системе с одной степенью свободы и возможно построение эквивалентных систем с распределенной и сосредоточенной массами.

2. В качестве первого примера рассмотрим синусоидальную форму колебаний шарнирной балки:

$$Y = Y_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1)$$

Рассчитав потенциальную энергию, работу внешних сил и кинетическую энергию получим:



$$P = \int_0^L \Delta P_m \cdot g(t) \cdot Y(x) \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \Delta P_m \cdot g(t) \cdot Y_0 \cdot L \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I \cdot Y_0^2}{4L^2} \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[\dot{Y}(x) \right]^2 \cdot \rho \cdot F \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot F \cdot L \cdot \dot{Y}_0^2 \quad (4)$$

Уравнение Лагранжа второго рода в рассматриваемом случае дает:

$$\frac{d}{dt} \frac{dk}{d\dot{Y}_0} + \frac{d\Pi}{dY_0} = \frac{dP}{dY_0} \quad (5)$$

$$\frac{M}{2} \frac{d^2 Y_0}{dt^2} + \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{2L^3} Y_0 = \frac{2}{\pi} \Delta P_m \cdot g(t) \quad (6)$$

$$M = \rho \cdot F \cdot L$$

$$K_m = \frac{1}{2}$$

$$K_{\text{ж}} = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{2L^3}$$

$$K_H = \frac{2}{\pi}$$

То есть, если кинематически движение балки будет эквивалентно системе с сосредоточенной массой $M_{\text{э}} = \frac{M}{2}$, коэффициентом упругости $K = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{2L^3}$ и амплитудой нагрузки $\Delta P_{\text{э}} = \frac{2}{\pi} \cdot \Delta P_m$, то есть изучая движение эквивалентной системы мы можем предсказать перемещение балки, если только форма ее прогиба соответствует принятой. Если обозначить $k = \frac{\Delta P_m \cdot L}{Y_c}$, где Y_c – статический прогиб в середине пролета, то

$$k_m = 0,5$$

$$k_n = 0,6366 \quad (7)$$

$$k_y = 0,634 \cdot k$$

Отметим, что значение эквивалентного коэффициента жесткости k_y близко к произведению коэффициента нагрузки k_n и статического коэффициента жесткости k . Такое решение для частоты основного тона гармонического колебания:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^3}} \quad (8)$$

здесь m – полная балки, равная $\rho \cdot F \cdot L$

Для эквивалентной системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{2 \cdot L^3 \cdot (0,5 \cdot M)}} = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{M \cdot L^3}} \quad (9)$$

Если прогиб задать в форме упругой линии, то:

$$\rho = \Delta P_m \cdot g(t) \cdot \frac{16 \cdot Y_0 \cdot L}{25}$$

$$k = \frac{1984}{7875} \cdot \rho \cdot F \cdot L \cdot \cdot^2_0$$

$$\Pi = \frac{3072}{125} \cdot \frac{E \cdot I \cdot \cdot^2_0}{L^3} \quad (10)$$

$$\omega = 9,889 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^3}}$$

$$k_n = 0,64$$

$$k_m \approx 0,5$$

$$k_l = 0,64 \cdot k$$

3. В случае пластической деформации приведение конструкции к эквивалентной системе с одной степенью свободы осуществляется с помощью точно такой же процедуры. На основании формы прогиба с шарниром в центре пролета (рис 2).

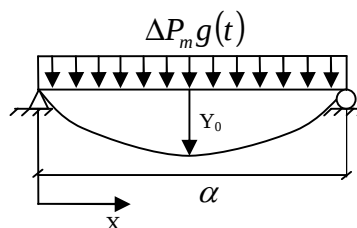


Рис 2. Пластическая деформация

$$Y(x) = 2 \cdot Y_0 \cdot x / L \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \cdot L$$

$$Y(x) = 2 \cdot Y_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{ при } \frac{1}{2} \cdot L \leq x \leq L$$

На основании формулы прогиба (рис 2).

$$P = \int_0^{\alpha} \Delta P_m \cdot g(t) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \Delta P_m \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot L \quad (11)$$

$$\Pi = \int_0^{\theta} M_p d\theta = \frac{4 \cdot Y_0}{L} \cdot M_p \quad (12)$$

$$k = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \rho \cdot F \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot L = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot L \quad (13)$$

Уравнение движения балки с пластическим шарниром:

$$\frac{1}{3} \cdot M \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4M_p}{L} = \frac{1}{2} \cdot \Delta P_m \cdot g(t) \cdot L \quad (14)$$

M_p - предельный момент, при котором образуется шарнир.

R_m - максимальное статическое сопротивление балки, несущей равномерную нагрузку, при которой образуется шарнир.

$$R_m = \frac{8 \cdot M_p}{L}$$

$$k_m = \frac{1}{3}$$

$$k_n = \frac{1}{2}$$

$$Re = 0,5 \cdot R_m$$

4. Перемещение в эквивалентных системах можно определить с помощью решения уравнений (6) и (14). Необходимо учитывать, что при возникновении пластического течения все параметры: нагрузка, масса, сопротивление меняются. При расчете изгибаемых элементов диаграмма сопротивления описывается кусочно-линейной зависимостью (рис 3).

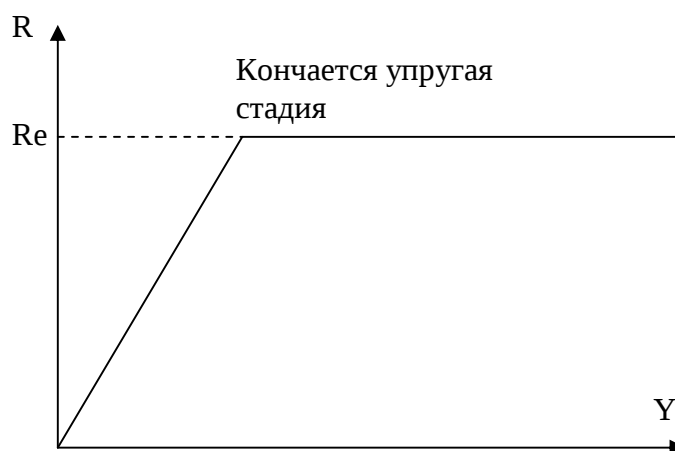


Рис 3. Сопротивление эквивалентной системы.

Если элемент деформируется по упругой схеме, то при расчете используются значения параметров, характерные для упругой деформации. Если элемент деформируется по схеме пластического тела, то используются значения, характерные при пластической деформации. При переходе одного решения в другое Y_0 и $\dot{Y}_0$ сшиваются.

Решение зависит от соотношения величин:

$$\frac{Re}{\Delta P_e \cdot L} = \frac{k_n \cdot R_m}{k \cdot \Delta P \cdot L} = \frac{8M_p / L}{\Delta P \cdot L}$$

$$Y_y = \frac{Re}{k_e} = \frac{k_n \cdot R_m}{k \cdot k} = \frac{8M_p / L}{384E \cdot I / 5L^3} \quad (15)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{k_e}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,5M}{0,64k}}$$

Таким образом, решение выражается в виде зависимости:

$$\frac{Y_m}{Y_y} = F\left(\frac{R_m}{\Delta P_m \cdot L}, \frac{T}{\theta_1}, \frac{T}{\theta_2}\right);$$

Через ΔP_m - обозначается нагрузка, приложенная к реальной системе. Это решение динамической задачи.

5. Предельное равновесие.

Для изгибаемых элементов:

$$M_{np}^{en} = W_n \cdot R_d; \quad M_{изг} = \frac{\Delta q_d \cdot l^2}{8}; \quad \Delta q_d = P_{zs} + P_{\theta}$$

$$M_{np}^{en} = R_{sl} \cdot W_s; \quad W_s = A_s \cdot h_0 \cdot \left(1 - \frac{\xi}{2}\right);$$

$$I_s = h_0 \cdot (1 - \xi) \cdot W_s;$$

$$B_s = I_s \cdot E_s;$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{B_s}{m_{noz}}};$$

$$\xi = \frac{x}{h_0}$$

$$x = \frac{\gamma_d \cdot R_p \cdot A_s - A'_s \cdot R_c}{\gamma_{bd} \cdot R_b \cdot b};$$

$$\xi \prec \xi_R^2$$

$$\mu_{onm} = 0,235$$