Лекция №7

Количественная оценка исходных событий.

Вероятностные понятия знакомы людям в повседневной жизни. Мы, например, привыкли к такому прогнозу погоды, как возможна гроза с вероятностью 20%. Подобно этому возможность для человека промокнуть, если зонтик его  неисправен, может быть выражена вероятностным путем. Например,  можно сказать, что вероятность безотказной работы зонтика, изготовленного год назад, равна 90%.Эта вероятность, разумеется, изменяется со временем. Надежность зонтика со временем уменьшается. Если зонтик сломан его можно починить, но когда он в починке его нельзя использовать. Таким образом, его работоспособность может быть измерена с помощью коэффициента готовности,  т.е. того отрезка времени, в течение которого он готов к использованию и функционирует нормально. Ремонт требует затрат и поэтому всегда хочется  знать ожидаемое число отказов в течение заданного времени. Это экономический аспект проблемы. Но есть другая сторона задачи. Пусть один человек, промокнув, заболеет с вероятностью – 10%, а другой с вероятностью 80%. Перед каждым из них встанет вопрос: сдать ли зонтик в ремонт срочный и заплатить больше, или, сэкономив деньги,  больше рисковать (иметь большую вероятность) промокнуть и заболеть. Выбор зависит еще и от того насколько каждый  человек дорожит своим самочувствием. Это субъективный фактор. Но если установить норму риска заболеть, то можно решать задачи объективно. Примерно, такую задачу мы попытаемся решить в дальнейшем, определяя риск для гибели, потери здоровья человека ,в результате действия технических систем с обращением опасных веществ.

Существует аналитическая зависимость между такими понятиями, как надежность, коэффициент готовности и ожидаемое число отказов. Точное описание отказов элементов и видов отказов этих элементов (аварийные сочетания). Если  между отказами элементов и особенностями самой системы нет связи, то количественная оценка исходных (относящихся к элементам) отказов не зависит от их конкретного использования в системе и общие данные можно распространить на данный случай. Если отмеченная связь имеется, например, из-за агрессивной среды в установке и вокруг неё, то количественная оценка исходных отказов (их частота) корректируется. Сначала рассмотрим элементы с двумя состояниями: исправные и отказ.

Условная и безусловная вероятность.

Условная вероятность $P_r$ (A/C) есть вероятность появления события A при условии, что событие C произошло. Эта вероятность определяется как: $P_r$ (A/C) – есть относительная доля предметов, приводящих к событию A, среди группы предметов, дающих событие C. То есть условная вероятность определяется на особой базе предметов, которые уже дали событие C.

Условная вероятность отличается от безусловной вероятности появления любого из событий $P_r$(A) или $P_r$(C) или от $P_r$ (A,C) – совместная вероятность появления событий A

C $P_r$(A) – относительная доля предметов, приводящих к событию A, среди всех предметов.

$P_r$(C) – относительная доля всех переметов, приводящих к C, среди всех предметов.

$P_r$(A,C) – относительная доля предметов, приводящих к  одновременному появлению событий A и C среди всех предметов.

Пример 1.

Имеется 6 шаров малого, среднего и большого размеров, красного, белого и синего цветов.

| Шар №1 | Шар №2 | Шар №3 | Шар№4 | Шар№5 | Шар№6 |
|---|---|---|---|---|---|
| малый | малый | средний | большой | малый | средний |
| синий | красный | белый | белый | красный | красный |

Определить вероятности событий:

1.$P_r$ (синий шар)

2. $P_r$ (малый шар)

3.$P_r$ (синий шар, малый шар)

4.$P_r$ (синий шар/малый шар)

Решение. Имеется шесть шаров. Среди них – один синий, три малых и один синий и малый.

$P_r$ (синий шар) = 1/6; $P_r$(малый шар) = 3/6 = 1/2; $P_r$ (синий шар, малый шар) = 1/6;

Среди трех малых шаров только один синий, следовательно $P_r$(синий шар/малый шар) = 1/3;

Правило цепи

Одновременное существование событий А и С эквивалентно существованию события С плюс существование события А при условии существования С. В символическом представлении

(А,С) -- С и (А/С)

Данную эквивалентность можно распространить на вероятность

$P_r$(A,C) = $P_r$ (C) $P_r$ (A/C) (1)

Пример: $P_r$( синий шар, малый шар) = $P_r$ (малый шар) *$P_r$ (синий шар/малый шар) = 1/2 * 1/3 = 1/6;

Из выражения (1) следует выражение для условной вероятности:

$P_r$(A/C) = $P_r$(A,C)/$P_r$(C) (2)

Пример подтвердить, что:

1) $P_r$(синий шар/малый шар) = $P_r$(синий шар, малый шар)/$P_r$(малый шар)

1/3= 1/6\3/6 = 1/3

2) $P_r$(шар 2/ малый шар, красный шар) = $P_r$ (шар 2, малый шар/красный шар) / $P_r$(малый/красный)

1/2= 1/3\2/3 = 1/2;

Независимость.

Событие A независимо от события C, если и только если $P_r(A/C) = P_r(A)$ (3)

Это означает, что вероятность события A не изменяется при появлении C. Соотношения (1) и (3) дают: $P_r(A,C) = P_r(A) * P_r(C)$ (4)

Это и есть другое выражение независимости.

Пример. Независимо ли событие «синий шар», от события «малый шар».

Решение. Оно не является независимым, так как $P_r$(синий шар) = 1/6; $P_r$ (синий шар/малый шар) = 1/3;

Вероятность появления события синий шар возрастает среди только малых шаров.

*Вероятностные параметры элементов с двумя состояниями.*

Примем, что в любой момент времени элемент функционирует нормально или отказал, и что состояние элемента изменяется с течением времени. Возможные переходы состояний показаны на рис.1. Новый элемент сразу переходит в исправное состояние, находится в нем некоторое время, затем отказывает и переходит, таким образом, в состояние отказа. Если элемент невосстанавливаемый, состояние отказа продолжается вечно. Восстанавливаемый элемент остается в состоянии отказа в течение некоторого периода, затем, когда ремонт закончен, переходит в исправное состояние. Предположим, что элемент меняет свое состояние мгновенно при переходах. Далее предположим, что не более одного перехода происходит в течение достаточно малого промежутка времени и что возможность двух и более переходов пренебрежимо мала. Переход в исправное состояние называется <u>ремонтом</u>, в то время как переход в состояние отказа есть <u>отказ</u>.


А) диаграмма переходов и состояния для элементов


Б)развертка по времени диаграммы переходов и состояний для элементов

I – состояние исправное; II – переход в неисправное состояние (отказ); III – состояние отказа; IV –переход в исправное состояние. Рис.1

Предположим, что в результате ремонтов элементов элемент восстанавливается до кондиции нового элемента. Таким образом, можно рассматривать производство элементов как процесс их ремонта. Полный цикл, следовательно, состоит из повторения процессов ремонта – отказа, а затем отказа – ремонта. Сначала будет рассмотрен процесс ремонт – отказ затем процесс отказ – ремонт и наконец, полный цикл.

Ремонт – отказ.

Полный период жизни является типичным процессом ремонт – отказ. Здесь под ремонтом подразумевается рождение, а под отказом смерть.

Невозможно предсказать точное значение продолжительности жизни любого человека, поскольку его отказ является случайным переменным параметром, и эти характеристики можно определить, рассматривая его как представителя всего огромного населения. Его отказ можно характеризовать только с помощью стохастических данных, относящихся ко всему населению.

Показатель надежности R(t) в данном примере есть вероятность достижения возраста t (включая t), которая равна числу людей, доживших до возраста t, делённому на общее число людей данной выборки. Подобно этому показатель ненадежности F(t) есть вероятность смерти до возраста t (t не включается), которая получается делением общего числа смертей до возраста t на общее число людей. По данным смертности таблица №1, в которой приведена продолжительность жизни населения численностью 1023102 человек, подсчитанные показатели надежности и ненадежности, показанные на рис.2 . Кривая R(t) по времени t есть распределение выживаемости, а кривая F(t) есть распределение отказов. Распределение выживаемости дает вероятность индивидуума дожить до возраста t, а так же определяет относительное число людей, которое, доживает до возраста t. Таблица №1 (данные смертности)

| t | L(t) | t | L(t) | t | L(t) | t | L(t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1023102 | 15 | 962270 | 50 | 810900 | 85 | 78221 |
| 1 | 1000000 | 20 | 951483 | 55 | 754191 | 90 | 24577 |
| 2 | 994230 | 25 | 939197 | 60 | 677771 | 95 | 3011 |
| 3 | 990114 | 30 | 924600 | 65 | 577822 | 99 | 125 |
| 4 | 986767 | 35 | 906554 | 70 | 454548 | 100 | 0 |
| 5 | 983817 | 40 | 883342 | 75 | 315982 | | |
| 6 | -------- | 45 | 852554 | 80 | 181765 | | |
| 7 | -------- | | | | | | |
| 8 | -------- | | | | | | |
| 9 | -------- | | | | | | |
| 10 | 971804 | | | | | | |

Распределение отказов  F(t) есть вероятность смерти индивидуума до возраста t. Оно так же показывает относительное число людей, которое, как ожидается, умрут, не достигнув возраста t. Разность $F(t_2) – F(t_1)$, где $t_2 > t_1$, равна относительному числу людей, которые, как ожидается, умрут в возрасте  от $t_1$ до $t_2$ (включая $t_1$ и не включая $t_2$). Так как число смертей в каждом возрасте известно, можно построить гистограмму рис.2б. высота каждой  колонки на этой гистограмме представляет собой число смертей на данном отрезке жизни.

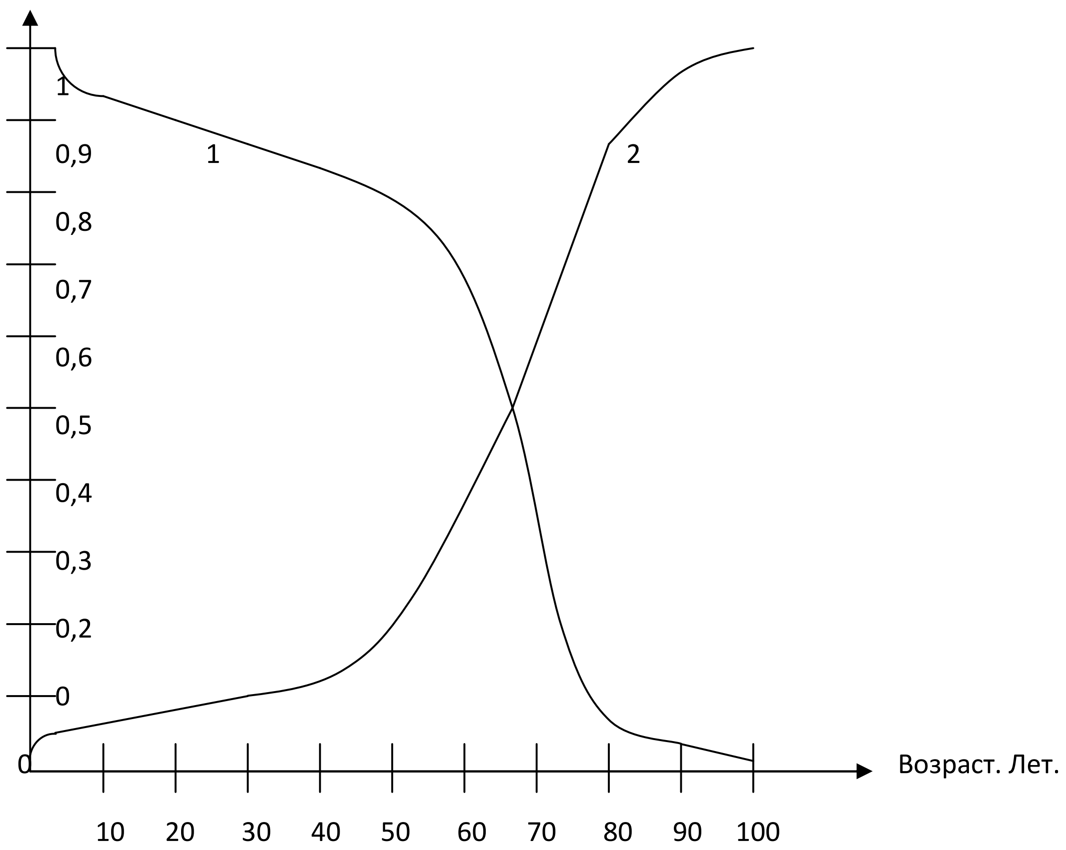


Рис.2а. Распределение выживаний 1, и отказов 2.

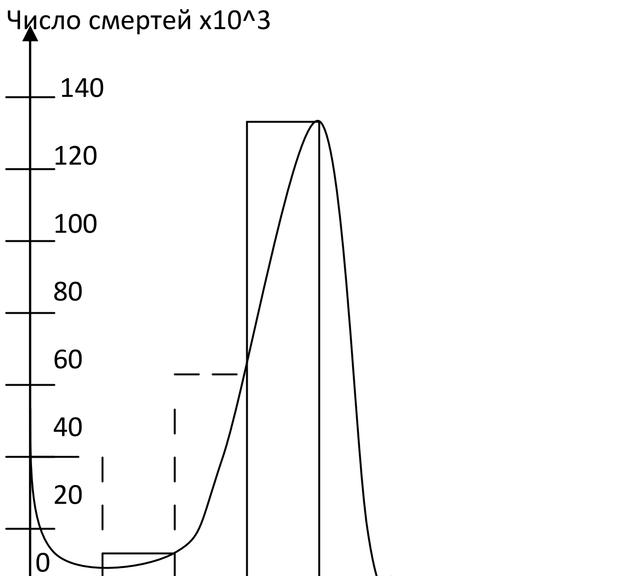


Рис.2б. Гистограмма и непрерывная кривая.

Она пропорциональна разности $F(t+\Omega) – F(t)$, где $\Omega$ - ширина отрезка жизни. Если уменьшить ширину отрезка, уступы на рис.2б. постепенно сближаются, пока не сформируется непрерывная кривая. Эта кривая после нормирования (приведения к общему числу выборки населения) представляет собой плотность распределения наработки до отказов, т.е. плотность отказов f(t). Вероятность отказа (смерти) в период между двумя возрастами [t, t+dt] определяется величиной f(t) * dt равна F(t+dt) – F(t) то есть.

$$F(t+dt) – F(t) = f(t)dt$$

Вероятность смерти в период между двумя возрастами $t_1$ и $t_2$ равна площади под кривой рис.3, и её можно определить интегрированием f(t) на данном отрезке времени.

$$\mathbf{F(t)_2 – F(t_1) = \int_{t1}^{t2} f(t)dt}$$

Это равенство указывает на то, что плотность отказов f(t) определяется по формуле

$$\mathbf{f(t) = dF(t)/dt}$$

И может быть численно определена приближенным дифференцированием:

$$f\ (t) = [F(t+\Omega) – F(t)]/\Omega$$

На рис.3 плотность распределения наработки до отказов построена из данных по смертности следующим образом:

$$f\ (t) = [n(t+\Omega) – n(t)]/\Omega\times N$$

n (t) –число смертей до возраста t, n(t+ Ω) – число смертей до возраста t+Ω, величина [n(t+Ω) – n(t)] равна высоте гистограммы на рис.2, [n(t+Ω - n(t)]/N – есть относительная часть населения, которая как ожидается умрет на отрезке [t,t+Ω] и следовательно равна F(t+Ω) – F(t), N – общее число выборки.

*Изменим исследуемую базу*

Рассмотрим теперь часть населения, которое состоит из индивидуумов, доживших до возраста t. Частота отказов r(t) есть вероятность смерти (отказа) за единицу времени в возрасте t для индивидуума этой части населения (доживших до возраста t). Таким образом, для достаточно малого отрезка времени Ω, величина r(t) * Ω оценивается числом смертей в течение отрезка [t,t+Ω), деленным на число индивидуумов, доживших до возраста t:

r(t) * Ω = число смертей в течение [t,t+ Ω) деленным на число доживших до возраста t

$$r(t)\ \Omega = [n(t+ \Omega) – n(t)]/L(t).$$

Если разделить и числитель и знаменатель на N, то получим: Z(t)*Ω = f(t)*Ω/R(t) или

$$\mathbf{r(t) = (f(t)/1– F(t) = (dF/dt)/(1 – F(t));}$$

Данный метод вычисления частоты отказов r(t) дает результаты, которые представлены на рси.4 Кривая r(t) известна под названием U – образной кривой. Для нее характерна относительно большая начальная частота отказов (период приработки, детская смертность), за которой следует период расцвета сил с довольно постоянной частотой ,когда отказы происходят случайно, а затем наступает конечная фаза износа, догорания.

<u>В идеальном случае</u> ответственное оборудование вводят в эксплуатацию после периода приработки и заменяют до вступления в фазу износ.

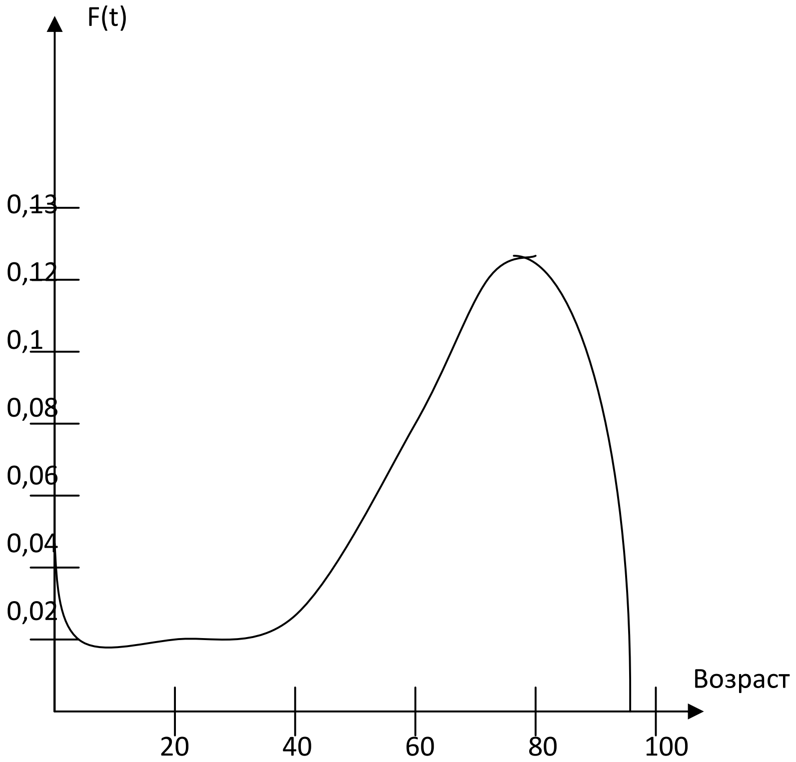


Рис.3. Плотность распределения отказов f(t)

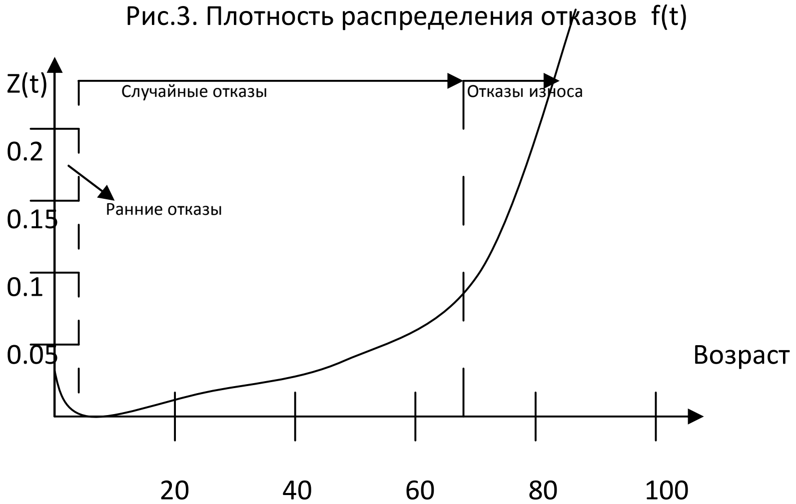


Рис.4 часота отказов r(t) в зависимости от t.

Пример 7.4 Вычислить, используя данные смертности в табл.№1, показатель надежности R(t), показатель ненадежности F(t), плотность отказов f(t) и частоту отказов r(t) для

а) 75 летнего человека

б) человека в первый день после празднования его 75 летнего юбилея.

Решение. А. Для чеоловека в возрасте 75 лет:

R(t) = L(t)/N = 315982/1023102=0.3088; F(t) = 1 – R(t) = 0.6912; f(t) = (L (75) – L(80))/((80 – 75)*N) = (315982 – 181765)/(5*1023102) = 0.02620;

r(t) =f(t)/(1 – F(t)) = f(t)/R(t) =  0.0262/0.3088 = 0.085;

б. Фактически решение начинается для нового населения численностью N = 315982 = в(75),           где t=0; означает возраст 75 лет.

$$R(t) = \frac{L(75\text{лет}+1\text{день})}{L(75)} = \frac{L(75)}{L(75)} - \frac{L(75)-L(80)}{5\cdot 365\cdot L(75)} = 1 - \frac{315982-181765}{5\cdot 365\cdot 315982} = 0.9998$$

F(t) = 1 – R(t) = 0.0002

$$f(t) = \frac{L(75)-L(75+1\text{день})}{L(75)\cdot\Delta(1\text{день})} = \frac{(315982-181765)\cdot 365}{5\cdot 365\cdot 315982} = 0.085$$

r(t) = f(t) = 0.085, т.к. $N_{75} = N_{75+1\text{ день}}$