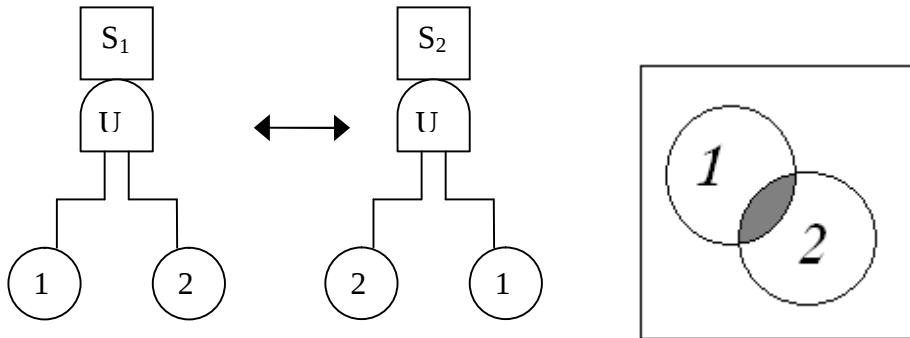


Лекция 5

1. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность для логических преобразований.
2. Обобщение использования логических знаков «И» и «ИЛИ» на случай $n > 2$ входных событий.
3. Вычисление коэффициента простоя системы.
4. Система охлаждения и очистки газа. Резервирование.
5. Дерево успехов на примере системы охлаждения и очистки газов.

1. Закон коммутативности для операций с логическими знаками выражает возможность менять местами входные события, выходное событие при этом не меняется и вероятность его сохраняется:



$$P(S_1) = P(1 \cap 2)$$

$$P(S_2) = P(2 \cap 1)$$

- для независимых
событий

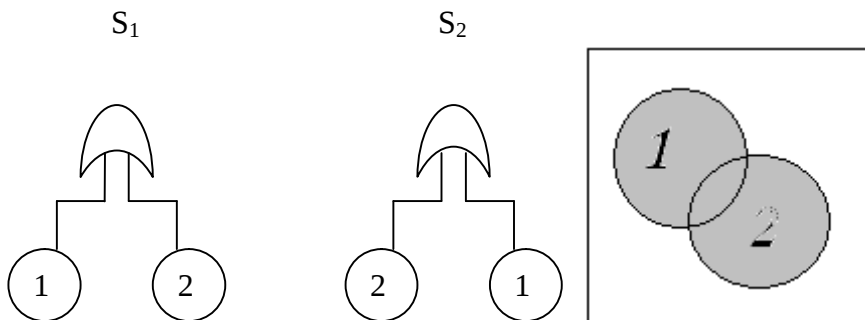
$$P_{S_1} = P_1 P_2$$

$$P_{S_2} = P_2 P_1$$

Одновременно происходят одни и те же события. Независимо от порядка их входа. Диаграмма Венна получается одинаковая независимо от того, какое событие мы нарисовали раньше.

Равенство вероятностей выходных событий следует из закона коммутативности для операции умножения.

Аналогично:

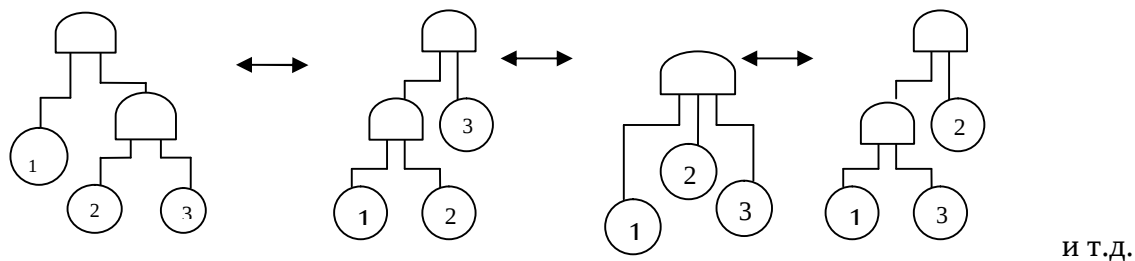


$$P_{S_1} = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

$$P_{S_2} = 1 - (1 - P_2)(1 - P_1) = P_2 + P_1 - P_2 P_1$$

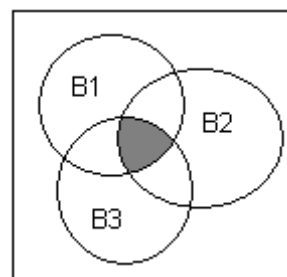
Происходит хотя бы одно из входных событий. Выходное событие есть объединение входных событий, и это объединение не зависит от того, какое событие мы возьмем первым. Диаграмма Венна не зависит от того, как мы пронумеруем события. Поменяем цифры 1 и 2 местами. Равенство вероятностей есть следствие коммутативности операций сложения и умножения.

Закон ассоциативности позволяет нам группировать исходные события в любых сочетаниях:



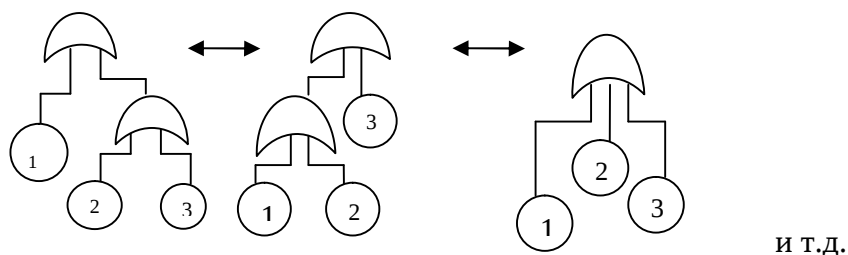
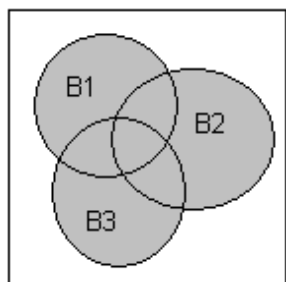
$$B_1 \cap (B_2 \cap B_3) = (B_1 \cap B_2) \cap B_3$$

Пересечение B_1 , B_2 и B_3 не зависят от того, как попарно и в последовательности мы будем находить промежуточные



какой пересечения.

Аналогично свойство ассоциативности:

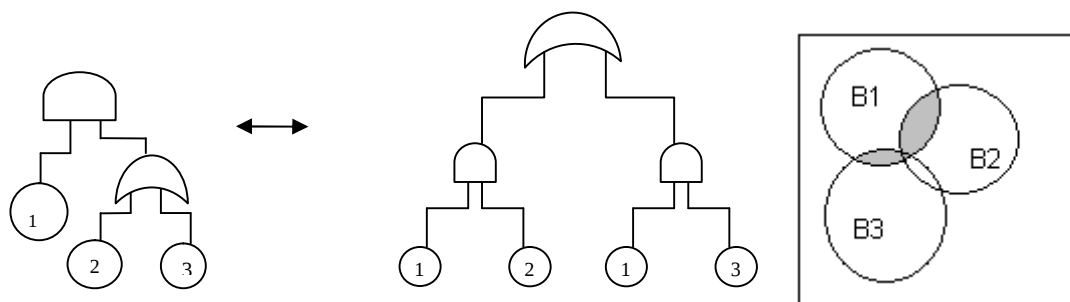


Объединение трех и более событий не зависит от того, как и в какой последовательности мы их будем группировать. Это свойство ассоциативности.

Дистрибутивность. Дистрибутивный закон связывает операции с разными логическими знаками:

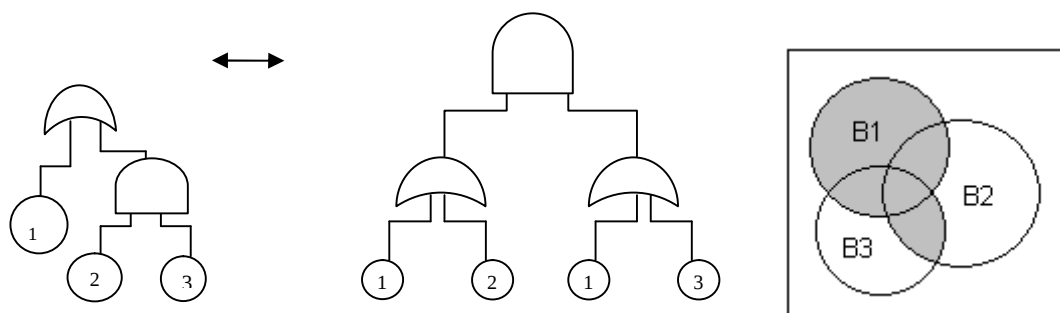
Пересечение события B_1 с объединением событий B_2 и B_3 равно объединению пересечений этого события B_1 попарно с B_2 и B_3 , то есть

$$B_1 \cap (B_2 \cup B_3) = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3)$$



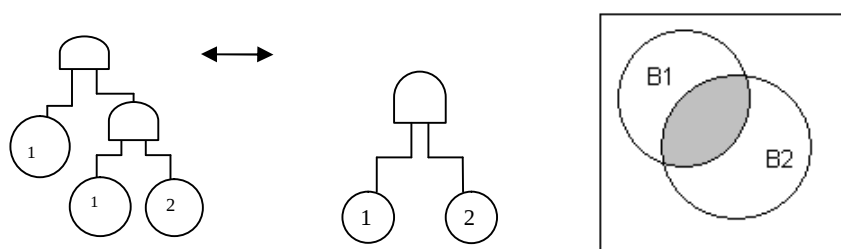
Объединение события B_1 с пересечением событий B_2 и B_3 равно пересечению попарных объединений этого события с событиями B_2 и B_3 , то есть

$$B_1 \cup (B_2 \cap B_3) = (B_1 \cup B_2) \cap (B_1 \cup B_3)$$



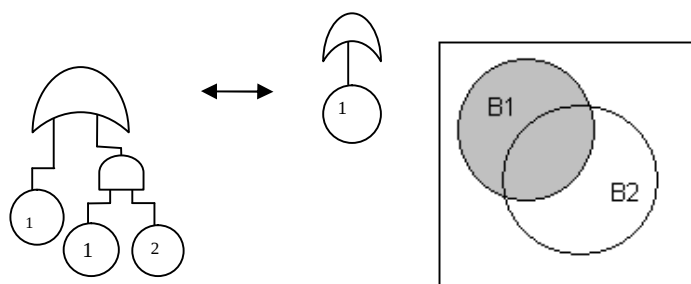
Следствие: законы поглощения:

$$1) B_1 \cap (B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow (B_1 \cap B_2)$$



$$P_S = P_1 \cdot P_1 \cdot P_2 = P_1 P_2$$

$$2) B_1 \cup (B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow B_1$$



$$P_S = 1 - (1 - P_1 P_2) = P_1 + P_1 P_2 - P_1^2 P_2 = P_1$$

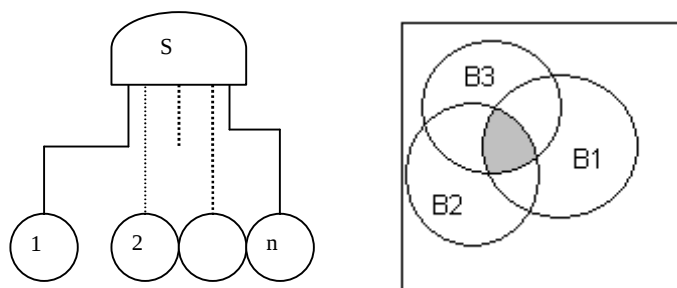
Член $P_1^2 P_2 = P_1 P_2$, в квадрат P_1 возводить нельзя (происходит поглощение), т.к. нельзя два раза учитывать отказ одного и того же элемента, то есть $P_1^2 = P_1$ в данном случае

2. Обобщение операций с логическими знаками «и» и «или».

Знак «И»

Конечное событие происходит, если одновременно происходят все входные события. Конечное событие является пересечением входных событий $S = \bigcap_{i=1}^n B_i$. Вероятность конечного события

$$P(s) = P(\bigcap_i B_i). \text{ В случае, если все события } B_i \text{ независимы, то } P(\bigcap B_i) = \prod_i^n P(B_i) = P(s) \quad (1)$$



$$P_S = P(\bigcap B_i) \Rightarrow \text{для независимых событий } P_S = \prod_{i=1}^n P_i$$

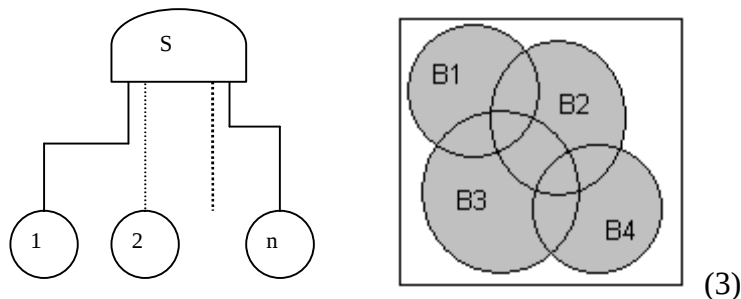
Знак «ИЛИ»

Конечное событие происходит, если происходит хотя бы одно из событий B_i , оно есть объединение входных событий B_i . Так как наше выходное событие: «произошло хотя бы одно из событий B_i », является дополнением к событию: «не произошло ни одного из событий B_i », то вероятность его будет равна: $P(s) = 1 - P(\bar{s})$

$$P_S = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n) \quad (2)$$

Так как $P(\bar{s}) = (1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n)$, выражение (2) раскрывается по признаку «включения исключения»

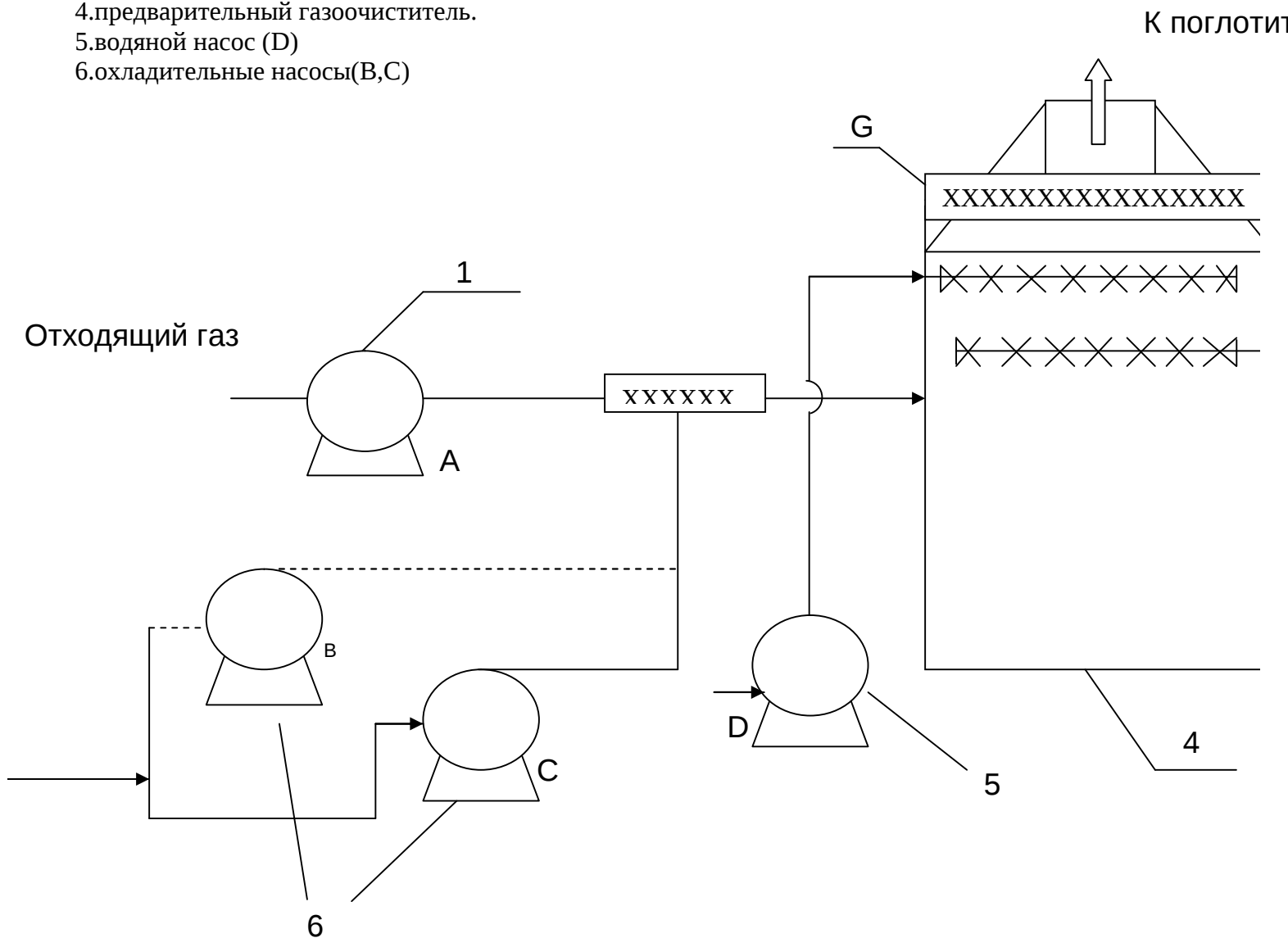
$$P(s) = P_1 + P_2 + \dots + P_n - P_1 P_2 - P_1 P_3 - \dots - P_1 P_n - P_2 P_3 - P_2 P_4 - \dots - P_2 P_n - \dots - P_{n-1} P_n + P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + \dots + (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n P_i$$



(3)

Рис. 1 Схема системы охлаждения и очистки отходящего газа.

- 1.нагнетательный вентилятор(A)
- 2.сетчатая прокладка(G)
- 3.Циркуляционные насосы предварительной очистки газа(E,F).
- 4.предварительный газоочиститель.
- 5.водяной насос (D)
- 6.охлаждающие насосы(B,C)



3. Отметим очень важное свойство равенства (3). Оно дает возможность точно определить вероятность конечного события из знака «или» при «n» входящих событий. Если «n» велико, то это вычисление очень трудоемко. Для оценок можно пользоваться оценкой сверху и оценкой снизу. Оценку сверху дает сумма вероятностей всех входящих событий: $P_{\max} = \sum P_i$ (4)

Оценку снизу дает учет только произведение двух событий:

$$P_{\min} = P_{\max} - P_1P_2 - P_1P_3 - \dots - P_1P_n - P_2P_3 - \dots - P_{n-1}P_n \quad (5)$$

Для надежных систем, то есть когда каждое P_i мало, оценки по (4) и по (5) мало расходятся, и тогда истинное значение вероятности отказа всей системы можно взять равным $P_{\max}$

4. Рассмотрим систему охлаждения и очистки газа, представленную на рис. 1 и предназначенную для:

- 1) уменьшения температуры горячего газа с помощью водяного охлаждения;
- 2) отделения газов от водяных паров;
- 3) удаления твердых частиц, попавших в газ.

На рис. 2 показано упрощенное дерево отказов.

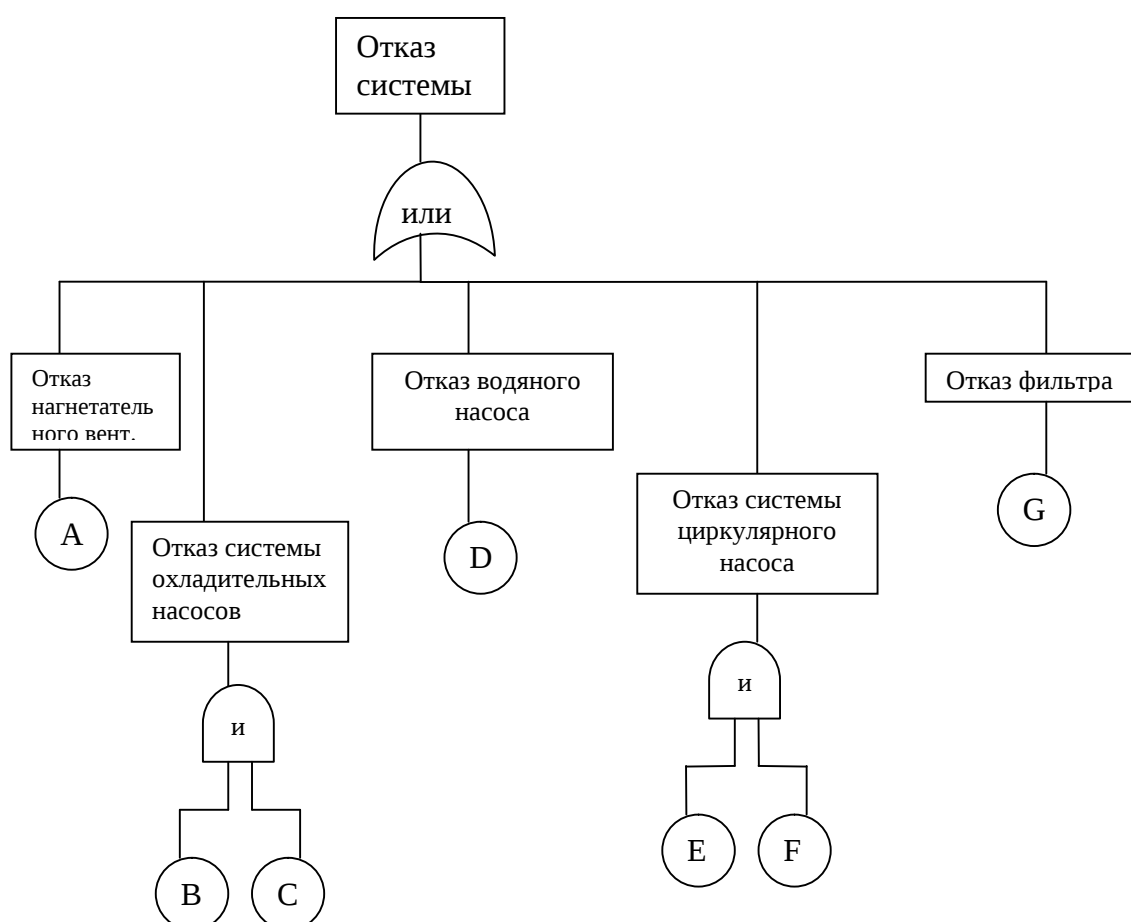


Рис. 2. дерево отказов для системы охлаждения и очистки газа

Нагнетательный вентилятор (A), или оба насоса холодильников (B и C), или водяной насос (D), или оба циркуляционных насоса (E и F), или фильтрующая система (G) должны отказать, для того, чтобы произошло конечное событие S. Выражение, определяющее конечное событие для данного дерева отказов, имеет вид:

$$S = A \cup (B \cap C) \cup D \cup (E \cap F) \cup G \quad (6)$$

Определить коэффициент простоя системы $Q_s(t) = P(s)$, используя следующие данные: $P(G) = 0,3$; $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,8$; $P(C) = 0,7$; $P(D) = 0,6$; $P(E) = 0,5$; $P(F) = 0,4$.

Решение:

Выполняем следующую последовательность вычислений:

$$P(B \cap C) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$$

$$P(A \cup B \cap C) = 0,9 + 0,56 - 0,9 \cdot 0,56 = 0,956$$

$$P(A \cup (B \cap C) \cup D) = 0,956 + 0,6 - 0,956 \cdot 0,6 = 0,9824$$

$$P(E \cap F) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(A \cup (B \cap C) \cup D \cup (E \cap F)) = 0,9824 + 0,2 - 0,9824 \cdot 0,3 = 0,990144$$

И наконец:

$$Q_s(t) = P(s) = 0,98522 + 0,3 - 0,98522 \cdot 0,3 = 0,990144$$

5. Структурная схема надежности является альтернативным путем представления событий и логических знаков наряду с деревьями успешной работы. Дерево успешной работы является вариантом дерева отказов, в которых вершина дерева представляет успешную работу системы, а отдельные события чаще являются также успешной работой, а не состоянием отказа. Соотношение между этими тремя формами представления систем лучше всего проиллюстрировать на примере. На рис. 3 представлена структурная схема надежности, где нагнетательный вентилятор ($\bar{A}$), любой из циркуляционных насосов ($\bar{E}$ или $\bar{F}$), любой из охлаждающих насосов ($\bar{B}$ или $\bar{C}$), водяной насос ($\bar{D}$) и фильтрующая система ($\bar{G}$) должны нормально функционировать, для того чтобы система работала в целом

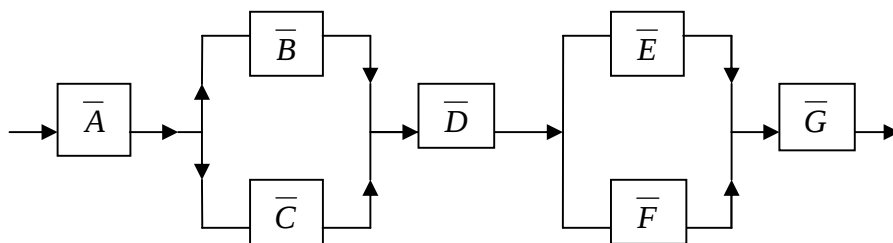


Рис. 3. Структурная схема надежности для системы охлаждения и очистки отходящего газа

На рис. 4 представлено дерево успешной работы системы охлаждения и очистки, которое является эквивалентной формой структурной схеме надежности, изображенной на рис. 3.

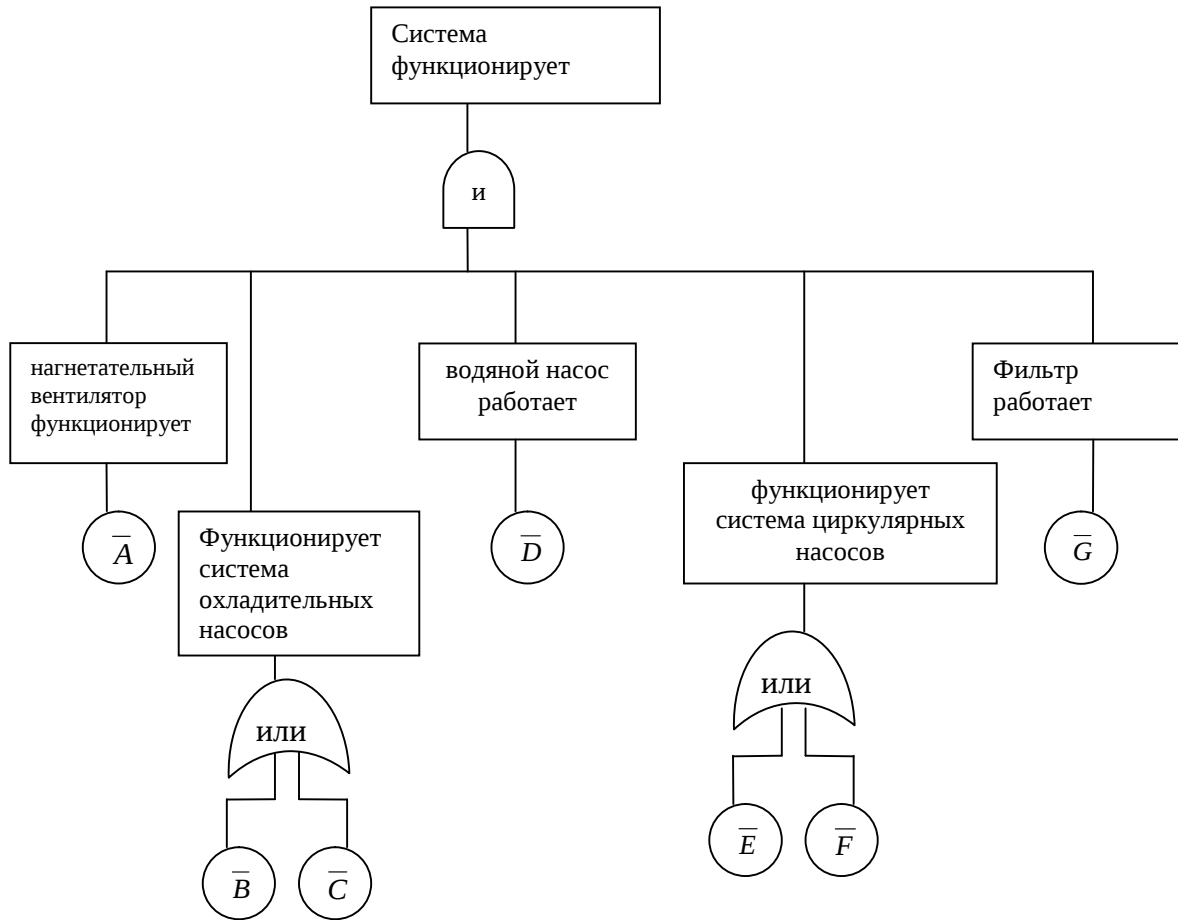


Рис. 4. Дерево успехов для системы охлаждения и очистки газов.

Логическая формула для дерева успехов имеет вид:

$$\bar{S} = \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{D} \cap (\bar{E} \cup \bar{F}) \cap \bar{G} \quad (7)$$

Логические формулы для дерева отказов (6) рис. 2 и дерева успехов (7) рис. 4, эта формула описывает и структурную схему надежности (рис. 3), являются логическим отрицанием друг друга.

Так как система либо работает $\bar{S}$, либо отказала S , то эти события являются взаимными дополнениями, и поэтому:

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,009856$$

что легко проверить, используя формулу (7) с $P(\bar{A})=0,1$; $P(\bar{B})=0,2$; $P(\bar{C})=0,3$; $P(\bar{D})=0,4$; $P(\bar{E})=0,5$; $P(\bar{F})=0,6$; $P(\bar{G})=0,7$

следовательно, коэффициент готовности:

$$A(t) = P(\bar{S}) = 0,1(0,3 + 0,2 - 0,3 \cdot 0,2) \cdot 0,4 \cdot (0,6 + 0,5 - 0,6 \cdot 0,5) \cdot 0,7 = 0,009856$$

Дерево успехов и дерево отказов строятся одно другому по правилу де Моргана: если $\bar{S}$ есть дополнение для S можно получить $\bar{S}$ при помощи отрицательного преобразования булева выражения для S , т.е. выполнив взаимную замену знаков «И» и «ИЛИ» и заменив все исходные события A , B и т.д. на $\bar{A}$, $\bar{B}$ и т.д. Это можно доказать, проверив выражения (6) и (7), или изучив рис. 2 и рис. 4.