

Лекция №2

Основные сведения из теории вероятностей и булевой алгебры

1 Пространство элементарных событий

2 Вероятность события

3 Сумма и произведение событий

4 Полная и условная вероятность

5 Логические знаки для обозначения совокупности событий

6 Диаграммы Венна

Событием или случайным событием является всякий факт, который в результате опыта может или не может произойти. Результат опыта является исходом опыта. При бросании игральной кости пространство элементарных событий образуют цифры $1 \leq a \leq 6$.

Предположим, что нас интересует опыт, в результате которого появляется цифра 1. Такой исход мы будем считать благоприятным. Введём определение частоты события:

Частота = количество благоприятных исходов / общее число исходов

Вероятность события определяется через частоту предельным переходом:

Вероятность = $\lim_{\text{число испытаний} \rightarrow \infty} (\text{частоты})$

Формализованная запись для частоты λ и вероятности P выглядит:

$$\lambda = \sum n_j' / \sum n_i$$

$\sum n_j'$ - благоприятные исходы

$\sum n_i$ - общее число исходов (опытов)

$$P = \lim_{\sum n_i \rightarrow \infty} \lambda_n$$

Очевидно, что в случае бросания игральной кости вероятность выпадения каждой цифры $1 \leq a \leq 6$ равна $1/6$.

Пусть Ω – пространство (совокупность) элементарных исходов ω рассматриваемого опыта. Пусть событие A наступает, когда

реализуются определённые элементарные исходы ω рис.1. В этом случае говорят, что исходы ω образуют (составляют) явление A .

Символическая запись соответствующая этому явлению $A \in \omega$.

Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:

Пусть пространство всех возможных исходов имеет меру (площадь) $S(\Omega)=1$. Тогда $S(A)=P(A)$, то есть площадь фигуры A , которая содержит благоприятные исходы равна вероятности события A .

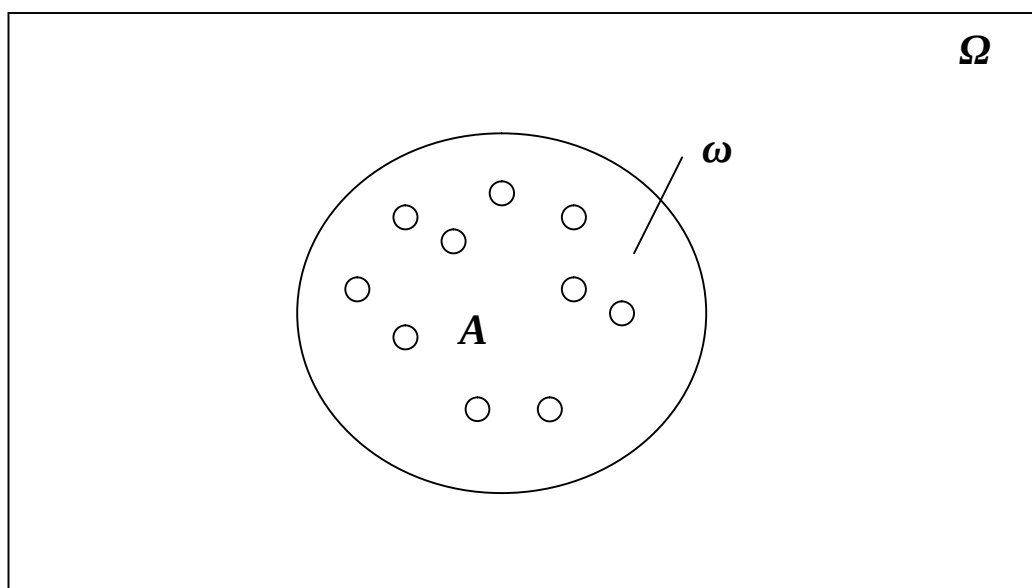


Рис.1 Иллюстрация к записи $S(A) = P(A)$

Достоверное событие A_q наступает в результате любого из элементарных исходов, то есть $A_q = \Omega$. В случае бросания кости событие, заключающееся в том, что выпадает одно из чисел $1 \leq a \leq 6$ является достоверным. Вероятность достоверного события:

$$P(A_q)=1$$

Невозможное событие – не наступает ни при каких элементарных исходах ω . В этом случае $A=0$ – пустое множество. Появление цифры 7 невозможно, так как её нет в пространстве элементарных событий.

Событие $A1$ и $A2$ называют равными $A1=A2$, если осуществление события $A1$ влечёт появление события $A2$. $A1 \rightarrow A2$, и наоборот $A2 \rightarrow A1$.

Рис.2а

События A_1 и A_2 несовместимы или непересекающиеся, если осуществление A_1 исключает появление события A_2 и наоборот.
 Пример: при бросании двух костей, равными являются события A_1 – выпадет чётная сумма и A_2 – выпадут очки одной чётности.

Рис.2б

Несовместимые:

A_1 – чётная сумма

A_2 – очки разной чётности

Событие $\bar{A}$ является дополнением к событию A , если наступление события $\bar{A}$ исключает появление события A и наоборот, а сумм A и $\bar{A}$ составляют достоверное событие $\bar{A} \cup A = \Omega$. Рис.2в

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

Объединением или суммой событий A_1 и A_2 называется событие A , которое означает осуществление хотя бы одного из событий A_1 и $A_2 \rightarrow A = A_1 \cup A_2$, где $\cup$ – символ объединения, то есть происходит либо A_1 , либо A_2 , или одновременно A_1 и A_2 . Рис.3

Пересечением или произведением событий A_1 и A_2 называется событие A , которое означает одновременное осуществление событий A_1 и $A_2 \rightarrow A_1 \cap A_2$. Рис.4

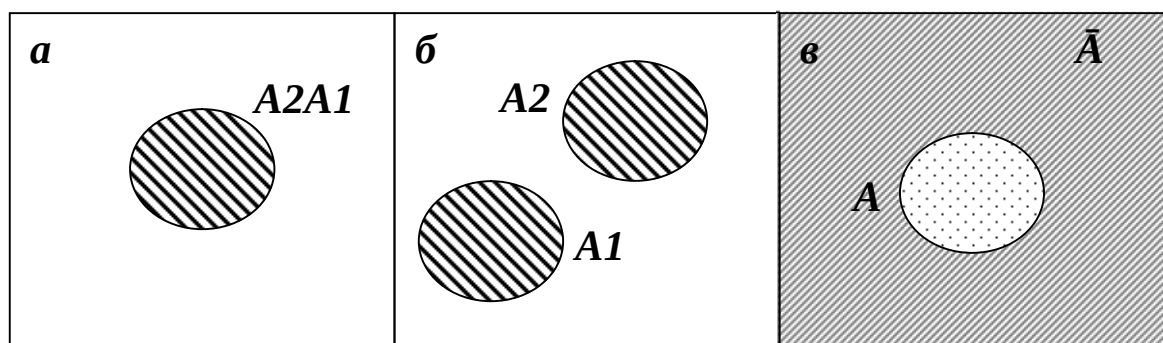


Рис.2 Диаграммы Венна

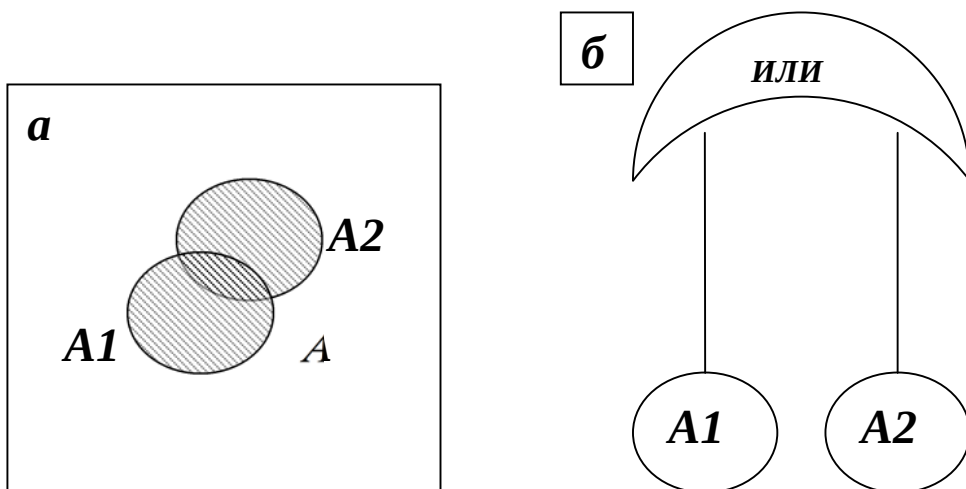


Рис.3(а) Объединение событий $A1$ и $A2$ на множестве исходов.
(б) логический знак $A=A1 \cup A2$ – произошло хотя бы одно из событий.

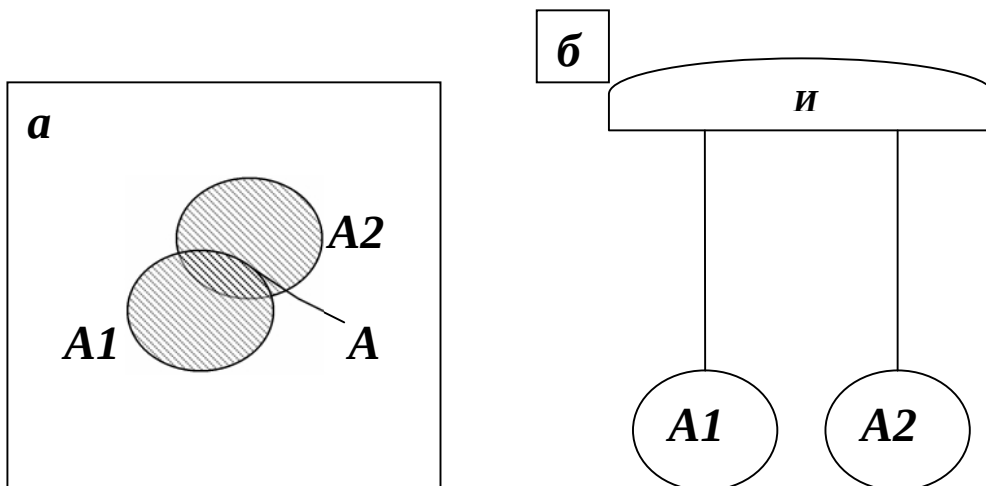


Рис.4(а) Объединение событий $A1$ и $A2$ на множестве исходов.
(б) логический знак $A=A1 \cap A2$ – произошли оба события.

Событие $A2$ содержит (включает) событие $A1 \rightarrow A2 \supset A1$, если появление события $A2$ включает появление события $A1$, но обратное не верно.

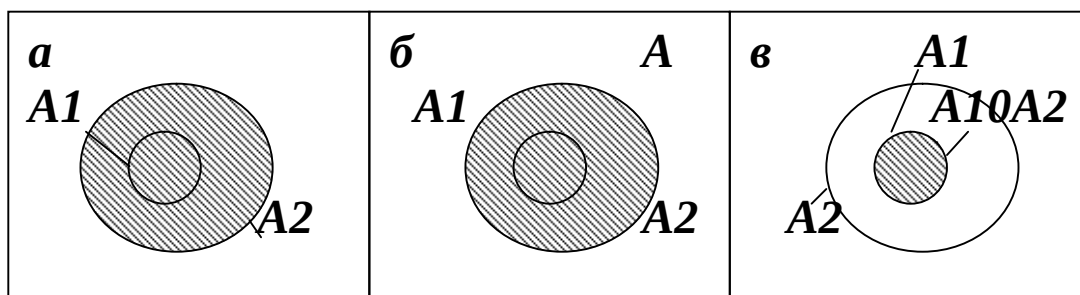


Рис.5(а) Событие $A2 \supset A1$.

(б) объединение событий $A2$ и $A1$, при условии $A2 \supset A1 \rightarrow A = A2 = A2 \cup A1$.

(в) пересечение событий $A2$ и $A1$, при условии $A2 \supset A1$, $A = (A2 \cap A1) = A1$.

Пример: Горят две лампочки. В определённый момент времени t , вероятность отказа первой лампочки $P1$, а вероятность отказа второй лампочки $P2$. Определить вероятность следующих событий, проиллюстрировать диаграммой Венна и логическим знаком (расположить по порядку).

- 1) погасла первая лампочка. Вторая горит.
- 2) погасла вторая лампочка. Первая горит.
- 3) погасла или первая или вторая лампочка, но не обе.
- 4) обе лампочки погасли.
- 5) обе лампочки горят.
- 6) погасла хотя бы одна лампочка (или первая или вторая или обе).
- 7) не погасла хотя бы одна лампочка.

Решение:

- 1) погасла первая лампочка. Вторая горит.

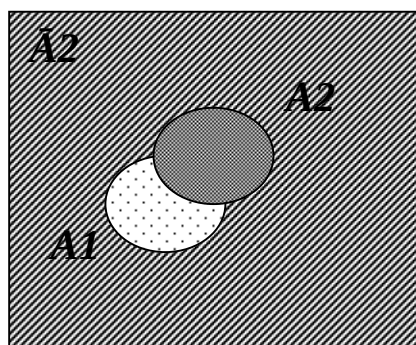
Конечное событие S .

Событие $A1$ – погасла первая лампочка.

Событие $A2$ – погасла вторая лампочка.

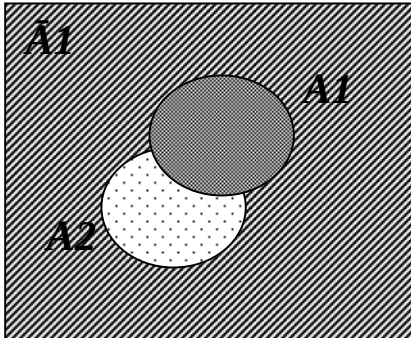
Событие $\bar{A}2$ – горит вторая лампочка.

$$S1 = A1 \cap \bar{A}2 \rightarrow Ps1 = P1 * (1 - P2) = P1 - P1 * P2$$



2) погасла вторая лампочка. Первая горит.
Решение аналогичное.

$$S_2 = A_2 \cap \bar{A}_1 \rightarrow P_{S_2} = P_2 * (1 - P_1) = P_2 - P_1 * P_2$$

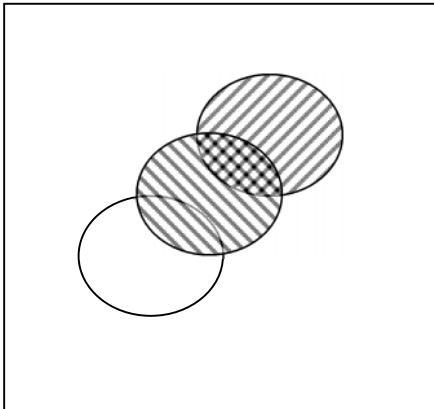


3) погасла или первая или вторая лампочка, но не обе.
Вероятность этого случая равна сумме вероятностей первого и второго случаев:

$$P_{S_3} = P_1 + P_2 - 2P_1 * P_2 = P_1 + P_2 - 2P_1P_2$$

Знак логического “или” одновременного отказа двух

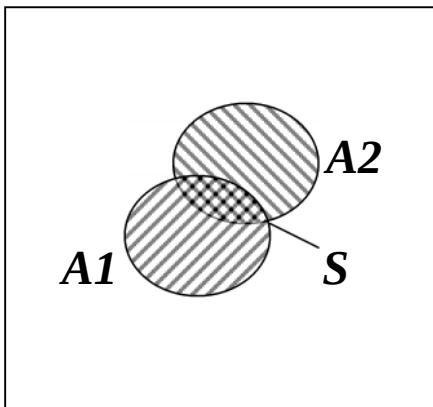
$$P_{S_3} = P_1 * (1 - P_2) + P_2 * (1 - P_1)$$



4) обе лампочки погасли

$S_4 = A_1 \cap A_2$ пересечение событий.

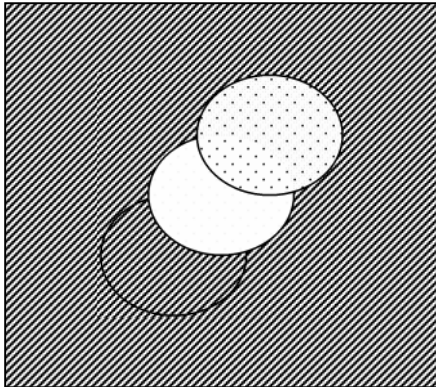
$$P_{S_4} = P_1 * P_2$$



5) обе лампочки горят

$S5 = \bar{A}1 \cap \bar{A}2$ объединение событий.

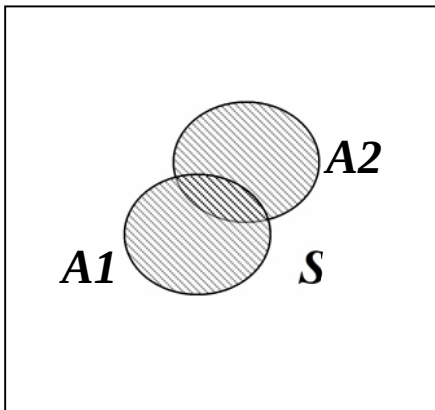
$$Ps5 = (1 - P1) * (1 - P2)$$



6) погасла хотя бы одна лампочка (или первая или вторая или обе).

Это событие является дополнением к предыдущему случаю.

$$Ps6 = 1 - Ps5 = 1 - (1 - P1) * (1 - P2) = P1 + P2 - P1 * P2$$



7) не погасла хотя бы одна лампочка.

Это событие является дополнением к событию S4.

$$Ps7 = 1 - Ps4 = 1 - P1 * P2$$

