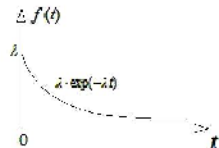
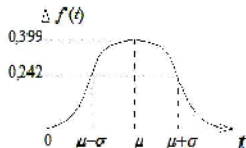
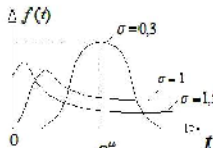
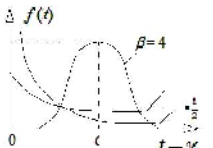
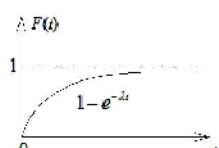
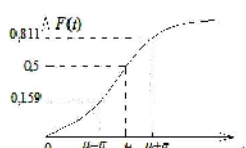
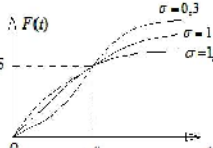
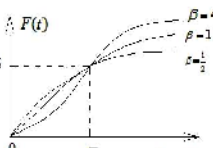
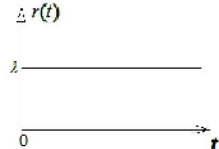
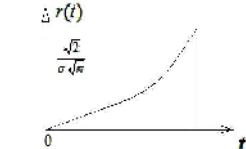
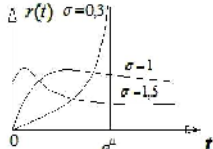
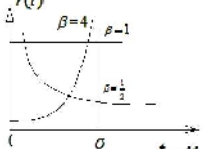


ЛЕКЦИЯ №11.

1. Статистические распределения параметров. Общепринятые распределения.
2. Основные характеристики распределений, их использование.

Общепринятые распределения приведены в таблице №1.

Таблица №1

Параметр	Экспоненциальное	Нормальное (Гаусса)	Логарифмически нормальное	Вейбулла
$f(t)$	$\lambda \cdot \exp(-\lambda t)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\frac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\sigma^\beta} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^\beta\right]$
Показатель надежности $F(t)$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{2} \ln \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dt$	$1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\sigma}\right)^\beta\right]$
Частота отказов $r(t)$	λ	$\frac{f(t)}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{1-F(t)}$	$\frac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\sigma^\beta}$
Средняя продолжительность до отказа	$\frac{1}{\lambda}$	μ	$\exp\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]$	$\gamma + \sigma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)$
$f(t)$				
$F(t)$				
$r(t)$				

Представленные статические распределения параметров используются как для описания случайных процессов, так и для описания случайных величин.

Для элементов, которые имеют возрастающую со временем частоту отказов, используются нормальное, логарифмически-нормальное распределения, а также распределение Вейбулла с коэффициентом формы β , который больше единицы.

Нормальные распределения соответствуют чисто случайным процессам, возникающим в результате действия большого числа незначительных возмущений.

Время ремонтов часто соответствует логарифмически-нормальному распределению, так как отдельные продолжительности ремонта могут быть значительно больше средних значений, например из-за отсутствия запасных частей или больших затрат времени на диагностику. Детальное описание свойств экспоненциального распределения было дано ранее, в таблице №1 представлены основные сведения.

Когда имеется достаточный объем данных, может быть построена гистограмма. Плотность распределения можно определить аналитически путем кусочной аппроксимации с помощью полиномов нормальной гистограммы.

По гистограмме можно оценить: распределение отказов или распределение других случайных величин.

Если в наличии имеется, лишь неполная или отрывочная информация, невозможно построить полную гистограмму. В таком случае необходимо задаться определенным распределением, а его параметры определить по имеющимся данным.

2. Экспоненциальное часто используется при анализе данных, зависящих от времени, когда частота появления событий не изменяется. Формулы для определения $f(t), F(t), r(t)$ и соответствующие им графики для экспоненциального распределения приведены в таблице №1.

Нормальное или распределение Гаусса является наиболее известным двухпараметрическим распределением. Все нормальные распределения симметричны. Двумя параметрами этого распределения являются μ и σ , то есть его среднее значение и стандартное отклонение.

Нормальное распределение часто используется для характеристик оборудования, которое имеет возрастающую со временем частоту отказов. Уравнения $f(t), F(t), r(t)$ для нормального распределения приведены в таблице №1. Среднюю наработку до отказа μ получают простым усреднением (среднее арифметическое).

Стандартное отклонение σ вычисляют по следующей формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(t_1 - \mu)^2 + (t_2 - \mu)^2 + \dots + (t_n - \mu)^2}{N - 1}} \quad (1)$$

где t_i - наработка до отказа для i -го образца, N - суммарное число образцов в партии,

μ - среднее арифметическое значение t_i . Для определения функции $F(t)$ имеются таблицы соответствующих интегралов.

Распределение Гаусса применяется для описания изменчивости прочностных свойств изделий. Для этого получают кривую распределения, которая связывает прочностные характеристики, например, бетона с частотой их повторения в опытах.

На рис.1 представлена кривая распределения сопротивления деформации. Пользуясь кривой распределения, можно вычислить среднее значение временного сопротивления бетона сжатию:

$$R_M = (n_1 R_1 + n_2 R_2 + \dots + n_k R_k) / n \quad (2)$$

Где $n_1, n_2, \dots, n_k$ - число опытов, в которых была зафиксирована прочность $R_1, R_2, \dots, R_k$,
 n - общее число опытов.

Разброс прочности (отклонение от среднего) характеризуется среднеквадратическим отклонением (стандартом)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 \Delta_1^2 + n_2 \Delta_2^2 + \dots + n_k \Delta_k^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}} \quad (3)$$

Или коэффициентом вариации

$$k_v = \sigma / R_m \quad (4)$$

В формуле (3) $\Delta = R_i - R_m$

Вычислив σ , можно методами теории вероятностей найти значение прочности R_n , которое будет обеспечено с заданной надежностью (вероятностью).

$$R_n = R_m - \chi \sigma \quad \text{или} \quad R_n = R_m (1 - \chi \cdot k_v) \quad (5)$$

Где χ - показатель надежности.

Чем выше χ см. рис.1, тем большее число образцов покажут прочность $R_m - \chi \sigma$ и более, тем выше надежность. Если за минимальную прочность, вводимую в расчет, принять $R_n = R_m - \sigma$ (т. е задавая $\chi = 1$), то 84% всех образцов покажут такую же или большую прочность (надежность 84%).

При $\chi = 1,64$ -95% образцов покажут прочность $R_n = R_m - 1,64 \cdot \sigma$ и более, а при

$\chi = 3$ -99,9% образцов будут обладать прочностью не ниже $R_n = R_m - 3 \cdot \sigma$ (правило трех «сигм»).

Согласно нормам основной характеристикой контролируемой на заводе является прочность, соответствующая надежности 95% при показателе надежности $\chi = 1,64$. Такое сопротивление считается нормативным.

Расчет ведут, используя понятие расчетного сопротивления R_e , которое связано с нормативным сопротивлением:

$$R_e = \frac{R_{en}}{\gamma_H} \quad (6)$$

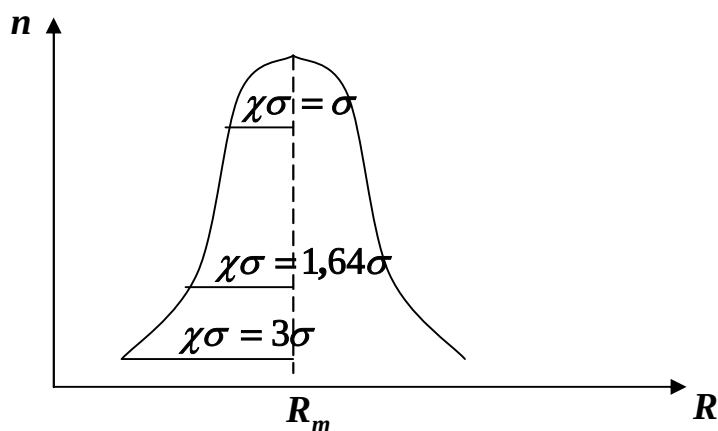


Рис.1. Распределение n -
 - сопротивление деформации

Где $\gamma_H > 1$ - коэффициент надежности зависит от вида деформации, от группы предельных состояний. Логарифмически-нормальное распределение подобно нормальному распределению, за исключением того, что вместо самих величин принимают нормально-распределенными логарифмы случайных величин. Таким

образом все величины положительные, распределения сдвинуты вправо (не симметрично), а степень смещения зависит от σ .

Логарифмически-нормальное распределение двухпараметрическое- с помощью его мы будем представлять распределение скорости ветра, зная её среднее значение, и некоторые другие, в зависимости от имеющейся информации.

Среди всех имеющихся распределений для вычисления показателей надежности распределение Вейбулла считается уникальным в данной области. Распределение Вейбулла является трехпараметрическим

(γ, σ, β) распределением (в отличие от нормального, определяемого только двумя параметрами).

Этими параметрами являются следующие: γ -момент времени, для которого $F(t) = 0$ и который является заданным параметром; иными словами отказы начинают появляться с момента t ;

σ -ресурсная характеристика, являющаяся масштабным параметром;

β -параметр формы.

Как видно из таблицы №1 распределение Вейбулла может принимать очень много форм.

Если $\gamma = 0$ т.е. $F(t) = 0$, при $t = 0$ или если временная ось смещена так, чтобы удовлетворялось данное требование, справедливы следующие особенности.

1) для $\beta < 1$ частота отказов уменьшается (как это может иметь место на начальном участке $\cup$ образной кривой);

2) для $\beta = 1, r(t) = \lambda$ получаем экспоненциальную зависимость показателя надежности;

3) для $1 < \beta < 2$ (в таблице №1 не показано) имеем смещенное нормальное распределение (низкая частота отказов в начальные моменты).

4) для $\beta > 2$ зависимость приближается к нормальному распределению.

Соответствующим подбором переменных оказывается возможным вычислить σ путем определения значений $t - \gamma$, для которых $F(t) = 0,63$.