

# **РАЗДЕЛ 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.**

## **1.1 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.**

### **1.1.1. Обзор**

Строительная механика на современном этапе развития располагает большим арсеналом методов расчета как д и с к р е т н ы х систем (например, состоящих из стержней), так и к о н т и н у а л ь н ы х (сплошных) конструкций и их элементов, таких как пластины, плиты, оболочки, массивы. Расчет напряженно-деформированного состояния дискретной конструкции, как правило, приводит непосредственно к решению систем алгебраических уравнений. Пример этому – широко применяемые при расчете плоских и пространственных стержневых систем классические методы сил и перемещений. Для расчета континуальных систем используются более сложные математические модели и соответственно численные методы. Так, основные зависимости между геометрическими и физическими величинами в механике сплошных сред выводятся с помощью элемента бесконечно малых размеров. Соотношения между средними значениями этих величин, предполагая их непрерывность, распространяются с бесконечно малых элементов на всю рассматриваемую область. Таким образом, появляются дифференциальные, интегральные или интегро-дифференциальные уравнения, вместе с граничными и начальными условиями они образуют математическую модель соответствующей задачи. К сожалению, точное решение в аналитической форме прикладных континуальных задач возможно лишь в очень немногих случаях, поэтому особо важное значение приобретают приближенные, но достаточно общие методы их решения. В последние десятилетия эти методы, называемые также ч и с л е н н ы м и, получили особенно активное развитие в связи с применением в инженерной практике современных вычислительных средств. В основе почти всех современных численных методов лежит

аппроксимация дифференциальных и интегральных уравнений, а также граничных условий конечным числом (т. е. системой) алгебраических уравнений относительно дискретных неизвестных – обычно это значения искомой функции в дискретных точках. Такое сведение континуальной задачи к дискретной равносильно замене сплошной конструкции с бесконечным числом степеней свободы на приближенную дискретную модель с конечным числом степеней свободы. К настоящему времени известно значительное число разнообразных приближенных методов. При этом различные методы применяются для решения дифференциальных и интегральных уравнений, вариационных задач. Общим недостатком большинства из них является то, что они разрабатывались для решения определенного класса задач механики деформируемого тела и таким образом не являются универсальными. К тому же для исследования массивов сложной формы, комбинированных систем, многих других конструкций использование ряда методов неэффективно и даже неприемлемо. Оценивая тот или иной численный метод, основное внимание необходимо уделять таким качествам, как универсальность, точность аппроксимации, простота алгоритма, объем вычислений и т. п. Для проведения практических расчетов нужно выбирать достаточно надежные методы, обладающие хорошей сходимостью и опробованные на большом количестве разнообразных задач. Этим требованиям отвечают метод конечных разностей (МКР), вариационно-разностный метод (ВРМ), метод конечных элементов (МКЭ). Причем в рамках каждого из этих методов разработано множество направлений и модификаций, оправдывающих себя при решении различных классов задач. Следующие параграфы этой главы знакомят читателя с указанными приближенными методами на примере простейших одномерных задач, доступных для студентов строительных специальностей. Однако из этого не следует, что эти методы предназначены для решения столь простых задач, ибо применение универсальных методов к одномерным системам вообще не является эффективным.

На этих примерах прослеживается последовательность стандартных действий, составляющая алгоритм решения и иллюстрирующая характерные особенности того или иного метода. Без особых изменений приведенные схемы могут быть использованы при решении существенно более сложных двумерных и трехмерных задач.

### **1.1.2. Метод конечных разностей.**

Одним из наиболее популярных численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводится большинство двумерных задач теории упругости, является метод конечных разностей (МКР). Этому методу посвящены многочисленные труды российских и зарубежных исследователей: П.М. Варвака, Н.П. Абовского, А.А. Назарова, В.С. Рекшинского, Б.М. Мизина, Г.Д. Абрамова, Л.Ф. Березовского, М.И. Длугача, Г. Маркуса и многих других.

При применении МКР обыкновенные или дифференциальные уравнения в частных производных заменяются уравнениями в конечных разностях, которые получаются из дифференциальных уравнений путем замены в них производных и вообще, дифференциальных операторов их приближенными выражениями через разностные отношения и значения функций, в отдельных точках. Эти точки задаются узлами сетки, наложенной определенным образом на область задания функции. Подобная замена приводит к тому, что задача решения дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы линейных, алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются значения функции в узловых точках. В зависимости от того, через какие точки проведена секущая, различают разности назад /секущая: проводится через предыдущую и данную точки/, вперед / через данную и последующую/ и центральные /через предыдущую и последующую точки/. Разностные выражения для производных более высоких порядков получаются аналогично выражениям для первой производной.

Отметим, что идентичные разностные выражения для производных можно получить также, аппроксимируя искомую функцию интерполяционным полиномом с последующим его дифференцированием; дифференцирование понижает порядок аппроксимирующего полинома, что является основным недостатком метода конечных разностей. При применении его к решению задач теории пологих оболочек этот недостаток проявляется в некотором снижении точности при определении прогибов; составляющих вектора касательных перемещений, внутренних усилий и изгибающих моментов. Данный факт можно объяснить тем, что изгибающие моменты, нормальные и сдвигающие усилия определяются дифференцированием составляющих векторов прогибов и касательных перемещений, в которых, как правило, и записываются разрешающие уравнения теории пологих оболочек. Этот недостаток метода конечных разностей можно попытаться, исключить, вводя составляющие вектора усилий в число неизвестных и тем самым увеличивая число совместно решаемых дифференциальных уравнений первого порядка до 13, либо записывая разрешающие уравнения задачи в усилиях; либо аппроксимируя исходные дифференциальные уравнения задачи и краевые условия полиномами более высокого порядка. Однако такие подходы к решению задачи приводят или к резкому, увеличению числа разбиений, или к значительным трудностям при учете кинематических граничных условий. Надо отметить, что учет граничных условий, особенно статических, встречает значительные трудности и в том случае, когда используются разрешающие уравнения в перемещениях. Это объясняется тем, что при записи дифференциального оператора для точки, принадлежащей контуру рассматриваемой области, среди неизвестных значений искомых функций появятся значения этих функций и в законтурных точках. Сложности, возникающие при учете граничных условий, исключаются при использовании вариационной

формы метода конечных разностей, или так называемого вариационно-разностного метода, развитого в основном трудами Д.В. Вайнберга и Н.П. Абовского.

К недостаткам метода конечных разностей относится и его недостаточно высокая точность, медленная сходимость, что объясняется низкой степенью полинома, аппроксимирующего искомую функцию. Вот почему некоторые исследователи для повышения точности метода конечных разностей искомую функцию аппроксимируют, полиномами степени выше второй, получая при этом так называемые уточненные конечные разности. Выражение первой производной; например, содержит значения искомой функции в 4-х соседних точках, а не в 2-х, как это имеет место в обычных конечных разностях. Применение таких разностей значительно усложняет учет граничных условий, делает метод более громоздким. Значительно увеличивается порядок системы алгебраических линейных уравнений, особенно при расчете пологих оболочек, находящихся под действием локальных, полосовых нагрузок, за счет местного сгущения сетки около локальных силовых воздействий.

Когда частные производные заменяются разностными выражениями только по одному направлению, краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных заменится краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод, получивший название метода прямых и рассмотренный в работах В.Н. Шаишмелашвили, А.М. Александрова, Ю.П. Федорова и других применительно к пологим оболочкам, позволяет получить аналитическое решение в рядах по одному из направлений, однако применение его становится затруднительным при сложных граничных условиях. Метод конечных разностей наряду с отмеченными недостатками имеет и значительные достоинства. Простота метода и несложность программирования его на ЭВМ, ленточная структура матрицы коэффициентов, возможность составления типового разностного уравнения - все это способствует широкому применению метода конечных разностей

при решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

### 1.1.3 Вариационно-разностный метод.

ВРМ лишен большинства перечисленных для МКР недостатков, поскольку основан на вариационных принципах механики. Поведение деформируемых систем в этом случае описывается условием стационарности некоторого функционала, являющегося обычно выражением потенциальной (функционал Лагранжа) или дополнительной (функционал Кастилиано) энергии системы. Это условие стационарности эквивалентно основным дифференциальным уравнениям данной задачи, но при этом дает возможность понизить порядок производных, входящих в вариационное уравнение, упрощает формулировку граничных условий (например, при использовании функционала Лагранжа статические граничные условия не рассматриваются специально, а входят в вариационное уравнение и называются естественными), а также позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета конструкции. Идея ВРМ состоит в замене вариационной задачи ее дискретным аналогом в сеточной области – т. е. искомая непрерывная функция, входящая в выражение полной потенциальной энергии системы, определяется дискретно, на некотором множестве узлов. При формировании системы алгебраических уравнений исходный функционал энергии, записанный для всей области, заменяется некоторой конечной суммой, а входящие в него производные – конечными разностями. Матрица коэффициентов системы разрешающих уравнений ВРМ получается симметричной, хорошо обусловленной и имеет ленточную структуру. ВРМ получил свое развитие благодаря первой работе в этом направлении В. Вазова и Дж. Форсайта и последующим работам Н. П. Абовского, Д. В. Вайн-берга, Л. В. Енджиевского, А. С. Сахарова, А. Л. Синявского и других авторов. В этих исследованиях был рассмотрен

широкий класс задач теории упругости, а также теории пластин и оболочек со сложным характером граничных условий.

#### 1.1.4 Метод конечных элементов

К численным методам решения задач теории упругости, пространственных конструкций относится самый популярный и практический в настоящее время метод конечных элементов /МКЭ/. В силу присущей ему универсальности и алгоритмичности МКЭ успешно применяется для расчета конструкций практически любой сложности, и на его основе создаются комплексы программ широкого назначения. Математические основы метода впервые были сформулированы Р. Курантом в 1943г., а термин "конечный элемент" был введен в статье Р.В. Клафа, посвященной решению плоской задачи теории упругости. Следует отметить, что первоначальная трактовка МКЭ базировалась на принципах строительной механики, что ограничивало сферу его приложений. Известно, что МКЭ обладает преимуществами перед МКР и получает все большее внедрение в практику инженерных расчетов. В дальнейшем МКЭ развивался в многочисленных работах советских и зарубежных исследователей: М.Дж. Тернера, Р.В. Клафа, Х. Мартина. Л.А. Розина, А. Масленникова, Н.Н. Шапошникова, В.А. Постнова, О. Зенкевича, Г. Кантина, Р. Клауфа, И.С. Пржеминского и многих других.

Метод конечных элементов, основная идея которого состоит в том, что он как и вариационно-разностный метод минимизирует функционал энергии, сводит решение краевой задачи теории упругости к решению системы алгебраических уравнений, линейных или нелинейных в зависимости от типа задачи, и состоит из следующих этапов:

1. идеализация исследуемой конструкции;
2. выбор основных неизвестных и интерполирующей функции;
3. получение матрицы жесткости элемента;
4. формирование разрешающей системы алгебраических уравнений и ее решение.

Первый этап заключается в том, что исследуемая конструкция заменяется совокупностью КЭ заданной формы, соединенных между собой в узлах конечным числом узловых связей. Этот этап, несмотря на видимую простоту, имеет важное значение, хотя он и не обусловлен строгими теоретическими рекомендациями и во многом определяется интуитивно. Обычно при построении конечно-элементной модели руководствуются предварительными представлениями о характере ожидаемых величин.

Важным моментом является также рациональная нумерация узлов сетки КЭ, поскольку нумерация оказывает существенное влияние на структуру матрицы разрешающих уравнений (ширину ленты), что отражается на времени счета и объеме используемой оперативной памяти ЭВМ. Все это приводит к тому, что вопрос о величине расчетных узлов становится довольно сложным, особенно при расчете оболочек сложной конфигурации, т.к. нерациональное назначение расчетных узлов ведет к большому объему исходной информации. Надо отметить, что вопрос аппроксимации рассчитываемой конструкции совокупностью конечных элементов особенно важен при расчете оболочек, т.к. точность аппроксимации криволинейной поверхности оболочки конечными элементами оказывает значительное влияние на точность расчета. Конечные элементы, применяемые при расчете оболочек, могут быть плоскими (элементы первого порядка) или криволинейными (элементы второго или выше порядка). По форме также можно разделить конечные элементы на: треугольник или четырехугольник, использование которых рассмотрено в работах. Рассматривая результаты приведенных выше исследований, можно прийти к выводу, что плоские треугольные и четырехугольные элементы целесообразно применять при расчете оболочек, описанных по разворачивающейся на плоскость поверхности, например, при расчете цилиндрических или конических оболочек, а криволинейные элементы более целесообразны при расчете пологих оболочек двойкой кривизны. Конечно, плоские элементы также применимы при расчете пологих оболочек

двойкой кривизны, однако это возможно при довольно густой сетке, что в конечном итоге приводит к возрастанию числа совместно решаемых алгебраических уравнений. Для расчета оболочек лучше применяются параболические элементы, т.к. при равном количестве элементов параболические элементы дают большую точность вычислений. Они более точно воспроизводят криволинейную геометрию модели и имеют более точные формы (аппроксимирующие функции).

Отметим, что в настоящее время разработаны программы автоматизированной разбивки области на КЭ и рациональной нумерации узлов (ANSYS, NASTRAN, SCAD, LIRA и др.).

На втором этапе основные неизвестные в МКЭ принимаются либо в виде перемещений расчетных узлов и тогда МКЭ приобретает форму метода перемещений, либо в виде усилий в узлах, тогда МКЭ приобретает форму метода сил. МКЭ дается в смешанной форме, когда за основные неизвестные принимаются и перемещения узлов и усилия в них. Основные неизвестные, через которые с помощью аппроксимирующих функций выражаются составляющие вектора перемещений или усилий в точках, расположенных внутри элемента, определяются либо из уравнений равновесия узлов, если МКЭ берется в форме метода перемещений, либо из условий совместности перемещений узловых точек, если МКЭ берется в форме метода сил. В подавляющем большинстве работ МКЭ рассматривается в форме метода перемещений, а в качестве аппроксимирующей функции принимается алгебраический полином, степень которого зависит от числа степеней свободы конечного элемента и от того, удовлетворяются или нет условия неразрывности перемещений и их производных на участках стыковки смежных конечных элементов. Выбор интерполирующего полинома, удовлетворяющего условиям неразрывности перемещений и их производных, является основной трудностью второго этапа расчета конструкций по МКЭ, а конечные

элементы в зависимости от выполнения или не выполнения условий неразрывности перемещений и их производных подразделяются на совместные или несовместные. Совместность конечных элементов является одним из важнейших условий сходимости решения по МКЭ к точному, однако получение полностью совместного элемента довольно затруднительно, вот почему в большинстве работ к расчету оболочек применяются несовместные элементы. Применение несовместных элементов приводит к разрывности усилий на границах стыковки элементов и как следствие этого к несколько худшим результатам по усилиям. Существующий произвол в выборе формы конечного элемента и вида интерполирующего полинома привел к тому, что в настоящее время существует большое количество всевозможных конечных элементов, которые, несмотря на ряд работ, посвященных сравнительной оценке различных конечных элементов, ставит исследователя перед решением довольно сложного вопроса, а именно, какой из элементов наиболее целесообразен при решении данной задачи. Этот вопрос является важным и потому, что некоторые несовместные элементы, позволяющие получить хорошее решение для одних задач, становятся неприемлемыми при решении других.

На третьем этапе расчета конструкций по МКЭ определенные трудности появляются при получении матрицы жесткости, которая выражает реакции в узлах элемента через неизвестные узловые перемещения. Трудности в получении матрицы жесткости связаны с появлением процедуры интегрирования по площади при применении вариационных методов Ритца-Тимошенко, Бубнова-Галеркина, либо с решением системы дифференциальных уравнений напряженно-деформированного состояния конечного элемента, например, методом конечных разностей или с помощью двойных тригонометрических рядов. Трудности интегрирования возникают и при замене действующей нагрузки системой эквивалентных узловых сил. Дополнительные трудности возникают при применении МКЭ к расчету оболочек, имеющих

зоны резкого возрастания напряжений, появление которых связано с наличием краевого эффекта в некоторых оболочках, трещин и прямоугольных отверстий, а также точек разрыва граничных условий. Для того, чтобы учесть особенности напряженного состояния в этих зонах, в аппроксимирующие функции вводят дополнительные члены, учитывающие характер этих особенностей, либо применяют конечные элемента, содержащие эти особенности, например, элементы с трещинами. Однако в подавляющем большинстве особенности напряженного состояния, возникающие в зонах концентрации напряжений, стараются уловить применением более мелкой сетки разбиения в районе этих зон, что приводит к увеличению числа неизвестных, а следовательно и порядка разрешающей системы алгебраических уравнений. При построении матрицы жесткости необходимо учесть краевые условия. Полученная на основе указанных методов матрица жесткости является вырожденной, поскольку в соответствии с уравнениями равновесия заданной системы часть уравнений (для пространственных систем - шесть, а для плоских - три) окажется взаимно зависимой. Корректировка этой матрицы при учете краевых условий приводит к невырожденной системе линейных алгебраических уравнений.

На четвертом этапе следует решить систему алгебраических линейных или нелинейных уравнений. Для решения системы алгебраических уравнений используют стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении ЭВМ, и специально подготовленные и лучшим образом учитывающие симметрию и структуру матрицы жесткости системы — редкозаполненность или ленточность. После определения узловых перемещений в соответствии с известными соотношениями теории упругости могут быть определены деформации и напряжения.

Рассмотренные выше недостатки и трудности в применении МКЭ к решению задач теории оболочек компенсируются его большими достоинствами, к которым относится следующее:

1. Процедура МКЭ не зависит от характера краевых условий задачи и типа оболочки, от законов изменения внешней нагрузки и толщины конструкции /в пределах элемента толщина, как правило, считается постоянной/.

2. МКЭ позволяет рассчитывать оболочки произвольного очертания в плане, с любым числом вырезов и подкреплений, а также комбинированные конструкции, состоящие из стержней, пластин и оболочек.

3. При применении МКЭ отпадает необходимость в составлении и решении дифференциальных уравнений.

4. МКЭ сводит расчет конструкций к действиям над матрицами, что очень удобно при применении ЭВМ.

5. При применении МКЭ матрица коэффициентов разрешающей системы алгебраических уравнений получается симметричной и имеет ленточную структуру.

Перечисленные выше положительные стороны МКЭ и объясняют тот факт, что в настоящее время МКЭ является наиболее распространенным численным методом расчета строительных конструкций и лежит в основе самых распространенных программных комплексов для расчета конструкций.

### **1.1.5 Обзор программных комплексов, используемых в проектировании и расчете сооружений**

Развитие компьютерных технологий, в частности, появление персональных компьютеров, способствовало тому разнообразию ПК, которое мы можем наблюдать сегодня. И если еще 1980-е годы инженеры чертили на кульманах<sup>1</sup> и производили расчеты на микрокалькуляторах, то в начале 2000-х ПК появились во всех проектных организациях, а также их основы стали преподавать в университетах. Понятие «программный комплекс» сменилось более широким понятием «пакет прикладных программ», который включает в

---

<sup>1</sup> Кульман – чертежный прибор, представляющий собой доску, закрепленную вертикально или под небольшим углом, к которой крепился лист бумаги и устанавливались линейки, которые могли скользить вдоль листа подобно рейсшине.

себя комплекс программ и программных модулей для решения задач конкретной предметной области.

Все ПК, используемые в строительстве, или Системы автоматизированного проектирования (САПР), можно условно разделить на две группы:

- программы для проектирования сооружений, которые позволяют создать геометрический вид объекта в пространстве и, в некоторых случаях, провести несложные расчеты на прочность, а также осуществить экспорт геометрической схемы в ПК для полноценного расчета на прочность, устойчивость и т.п. К программам для проектирования сооружений относятся зарубежные AutoCAD, Revit Structure, отечественные Мономах, Сапфир, Компас и др. Отдельно стоит отметить технологию BIM-моделирования, (от англ. building information modeling - информационное моделирование зданий и сооружений), реализованную в Autodesk Revit Structure. Данный ПК дает возможность совместной работы всем инженерам, участвующим в изыскании, осуществлять одновременный доступ к модели проектируемого объекта строительства. Проведение расчетов осуществляется в Autodesk Robot Structural, после чего исходная модель в Autodesk Revit Structure может быть автоматически обновлена с учетом полученных результатов для дальнейшей работы с проектом.

- программы для расчета сооружений, которые позволяют проводить расчеты на прочность, устойчивость, деформативность, в линейной и нелинейной постановке, на динамические нагрузки и т.п. Данную группу можно разделить на две подгруппы:

- программы для стандартных расчетов в строительстве, такие как Lira, SCAD, Micro FE, STARK ES, Autodesk Robot Structural. Эти программы позволяют проводить любые прочностные расчеты стержневых, пластинчатых, объемных элементов из любых материалов в линейной и нелинейной постановке, подбирать арматуру из условий прочности и деформативности, учитывать любые динамические нагрузки, а также ветровые и сейсмические

нагрузки по нормативам разных стран, имеют связи с графическими программами и текстовыми редакторами.

В докомпьютерный период для расчета стержневых элементов использовались методы строительной механики, основанные на методе сил и методе перемещений, для пластинчатых – методы теории упругости, а также метод стержневых аппроксимаций. Расчеты осложнялись необходимостью решать системы уравнений очень большого порядка, также имел место двойственный, противоречивый подход к конструкциям. Появление метода конечных элементов (МКЭ) в середине 60-х годов прошлого века позволило решить вышеописанные проблемы. На его основе, во главе с инженером Городецким А.С., в Киеве была создана группа программ, которая в дальнейшем получила название ЛИРА.

В России массовое внедрение программных комплексов семейства Лиры началось в 90-е годы (с момента появления персональных компьютеров). В настоящее время семейство программ ЛИРА-САПР представлено следующими основными программами, сопряженными друг с другом: ПК ЛИРА-САПР (расчет строительных и машиностроительных конструкций); ПК Мономах (проектирование и расчета железобетонных и армокаменных конструкций); ЭСПРИ 2013 (Электронный Справочник Инженера); САПФИР 2013 (автоматизация архитектурной части проекта).

В середине 90-х годов часть разработчиков ЛИРА ушла из компании и создала программу SCAD. На сегодняшний день вычислительный комплекс SCAD является универсальной расчетной системой конечноэлементного анализа и имеет целый ряд вспомогательных программ. Формирование и расчет геометрических характеристик различного вида сечений проводится в программах Конструктор сечений, КОНСУЛ, ТОНУС, СЕЗАМ, определение нагрузок и воздействий на здания и сооружения – в программе ВЕСТ, определение коэффициента запаса устойчивости откосов и склонов – в программе

ОТКОС, вычисление коэффициентов постели для расчета на упругом основании – КРОСС, импорт данных из архитектурных систем – препроцессор ФОРУМ. Частные задачи проверки и расчета стальных, каменных, деревянных и железобетонных конструкций по СП выполняются в программах КРИСТАЛЛ, КАМИН, ДЕКОР, ЗАПРОС, АРБАТ. Проектно-конструкторские программы КОМЕТА и МОНОЛИТ.

Российско-немецкий ПК Stark ES в 2003 году распался на два комплекса: MicroFe (развивается немецкой фирмой mb AES и их партнерами "Техсофт") и, непосредственно, STARK ES (развивается российской компанией "ЕВРОСОФТ").

Robot Structures, вышедший в 1985 году в США, стал первой коммерческой версией решения компании Robobat. Спустя шесть лет следующая версия Robot Structures поставлялась уже в 40 стран мира. С каждой новой версией программа делала шаг вперед как в функциональности, так и в удобстве использования. Всё это в 2008 году привело к тому, что права на программу приобрел всемирно известный лидер в области САПР — компания Autodesk. Тогда она получила название Autodesk Robot Structural Analysis и стала важным звеном комплексного BIM-решения Autodesk.

Таким образом, были перечислены основные и наиболее распространенные в отечественной практике расчета зданий и сооружений программы. Их возможности примерно одинаковы, и выбор между ними определяется, во-первых, удобством инженера, во-вторых, фактом приобретения лицензионного программного обеспечения организацией, где работает инженер.

Также существуют программы для научных изысканий, с более сложным интерфейсом, но и с более широким кругом решаемых задач, такие как зарубежные NASTRAN MSC, ANSYS, Abaqus, Plaxis и др. Данные программы выполняют все задачи из предыдущего пункта за исключением использования нормативных документов, но также имеют дополнительные возможности.

ПК Ansys создавался для решения задач теплопередачи и прочности в линейной постановке в конце 60х годов в США. На сегодняшний день это целая программная система, объединяющая в себе следующие модули: конструкционный(прочностной) и термический анализ (ANSYS Structural/Mechanical), электромагнитный анализ (ANSYS Emag), гидро-газодинамический анализ (ANSYS CFD: CFX, Fluent), акустика, оптика и другие.

ПК Nastran был создан в 60е годы по заказу агентства NASA (США) для поддержки космических исследований. На сегодняшний день это мощная система для прочностного анализа для строительных и машиностроительных нужд, имеет модули Thermal (решение задач теплообмена: теплопроводность, излучение, конвекция) и Flow ( численного моделирования процессов гидрогазодинамики и тепломассообмена на основе решения уравнений Навье-Стокса в стационарной и нестационарной постановках).

ПК Abaqus также ориентирован на прочностные расчеты конструкций, задачи гидродинамики (CFD), теплопередачи, электромагнетизма (Electromagnit) и акустики, создан в конце 70х в США.

Основное направление работы в ПК Plaxis – геотехнические расчеты. Программа «выросла» из разработок нидерландского ученого, проектировавшего защитное оградительное сооружение реки Шельда, которое спасло бы Нидерланды от наводнений. Его разработки привели в конце 70х годов к созданию программы ELPLAST на языке FORTRAN-IV, определяющий несущую способность упругопластичных грунтов. Затем появилась необходимость разработки на основе ELPLAST решения для осесимметричных задач, и новая программа была названа PLAXIS (PLasticity AXISsymmetry).

Таким образом, мы рассмотрели основные ПК, используемые в строительстве при проектировании и расчете сооружений. Для успешной работы инженеру необходимо иметь в «арсенале» 2-3 ПК для проведения сопоставительных расчетов в особенно сложных случаях.

### 1.1.6 Метод последовательных аппроксимаций

К численным методам решения краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных относятся методы интегрирующих и дифференцирующих матриц.

Впервые метод интегрирующих матриц был рассмотрен А.Ф. Смирновым применительно к решению одномерных задач. В этих работах предлагается численный метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью специальной числовой матрицы, т.е. интегральной матрицы, позволяющей последовательно выражать младшие производные через старшие. Для построения интегральной матрицы используется аппроксимация функций по всему интервалу. Аппроксимирующие кривые строятся с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа.

А.В. Александров с использованием полиномов Лагранжа построил матрицу дифференцирования, последовательное применение которой позволяло переводить функцию в ее первую производную, последнюю — во вторую производную и так далее. Вместо интегральной матрицы вводится матрица дифференцирования. Применение метода к решению обыкновенных дифференциальных уравнений показало его высокую точность. Предложенная в методика решения оказалась и более гибкой в смысле учета краевых условий задач.

В дальнейшем метод матрицы интегрирования получил развитие в трудах Б.Я. Лащеникова, М.Б. Вахитова, Р.Ф. Габбасова, а метод матрицы дифференцирования - в работах А.В. Александрова, В.А. Смирнова, Р.Ф. Габбасова и других.

Данный метод условно был назван методом последовательных аппроксимаций (МПА) в матричной форме, т.к. он решение дифференциального уравнения сводит к решению матричного. Искомая функция, относительно которой составлено дифференциальное уравнение, либо ее производные аппроксимируются некоторой функцией. Далее интегрированием

либо дифференцированием аппроксимирующей функции получают основные формулы методов интегрирующей или дифференцирующей матриц, которые связывают значения младших производных или самой функции со значениями старших производных, либо, наоборот, значения старших производных со значениями искомой функции. Естественно, при этом полином, аппроксимирующий искомую функцию, выражается через узловые значения этой функции, а полином (того же порядка), аппроксимирующий производную функцию, выражается через узловые значения производной. В качестве аппроксимирующей функции могут использоваться интерполяционные полиномы Лагранжа, полиномы Чебышева, тригонометрические полиномы или кусочно-полиномиальные функции.

Методика расчета, использующая матрицу дифференцирования, была распространена на двумерные задачи. Высокая точность метода при сравнительно небольшом числе разбиений подтверждена.

Применение полиномов Лагранжа в качестве аппроксимирующего, несмотря на довольно высокую точность результатов решения краевых задач теории упругости при сравнительно грубой сетке разбиения, обладает рядом недостатков:

1. Получение матриц интегрирования и дифференцирования значительно осложняется и становится громоздким при переменном шаге разбиения.

2. При изменении числа участков разбиения исследуемой области приходится заново формировать матрицы интегрирования или дифференцирования.

3. Матрицы интегрирования и дифференцирования получаются полностью заполненными.

4. Применение полинома Лагранжа в качестве аппроксимирующей функции целесообразно при небольшом числе участков разбиения, т.к. полином Лагранжа степени выше 6-ой сильно отклоняется от интерполируемой функции, если она недостаточно гладкая.

Применение для целей аппроксимации полиномов Чебышева или тригонометрических функций значительно усложняет и делает громоздким получение матриц интегрирования и дифференцирования даже при постоянном шаге разбиения.

Устранены эти недостатки были в работах, в которых матрицы интегрирования, построенные с помощью "скользящих" парабол, имеют много нулевых элементов, формируются проще. Решения при этом обладают сходимостью. Но алгоритм расчета, особенно для задач с разрывами, является сложным, поэтому применяется в основном к одномерным задачам.

Одновременное обеспечение высокой точности и простоты метода, приводящего к сходящимся решениям, достигается последовательной аппроксимацией искомой функции и ее производных кусочно-полиномиальными функциями (сплайнами) или функциями, обобщающими понятие сплайн. Теория сплайнов изложена во многих статьях математиков.

Было предложено построение матриц интегрирования и дифференцирования с использованием кусочно-полиномиальных функций и применение этих матриц к решению двумерных задач строительной механики и теории упругости. Построены матрицы интегрирования и дифференцирования, учитывающие конечные разрывы искомой функции и ее производных. Однако более гибкой оказалась форма метода, использующая матрицы дифференцирования, построенные с применением функций, обобщающих понятие сплайн, т.е. учитывающих конечные разрывы на границах стыкуемых участков. Дальнейшие исследования показали, что наиболее удобной для практического применения является модификация метода, приводящая к уравнениям, близким по структуре к разностными уравнениям МКР повышенной

точности. Но разностные уравнения МПА являются более общими, поскольку учитывают упомянутые выше разрывы.

## **1.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ**

### **1.2.1 Основные понятия метода и выбор расчетной схемы**

МКЭ является одним из самых распространенных методов решения прикладных задач. Диапазон его применения чрезвычайно широк: строительство и машиностроение, гидро- и аэродинамика, горное дело и новейшая техника, а также различные задачи математической физики – теплопроводности, фильтрации, распространения волн и т. д. Следует отметить, что возникновение МКЭ и развитие этого метода связано, прежде всего, с решением задач строительной механики и в настоящее время он успешно применяется при расчете самых разнообразных строительных конструкций как стержневых, так и континуальных. Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, основан на представлении реальной континуальной конструкции ее дискретной моделью и замене дифференциальных уравнений, описывающих НДС сплошных тел, системой алгебраических уравнений. Вместе с тем МКЭ допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию. Суть метода заключается в том, что область (одно-, двух- или трехмерная), занимаемая конструкцией, разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам подобластей (рис. 1). Последние носят название **к о н е ч н ы х э л е м е н т о в (КЭ)**, а сам процесс разбивки – **д и с к р е т и з а ц и е й**.

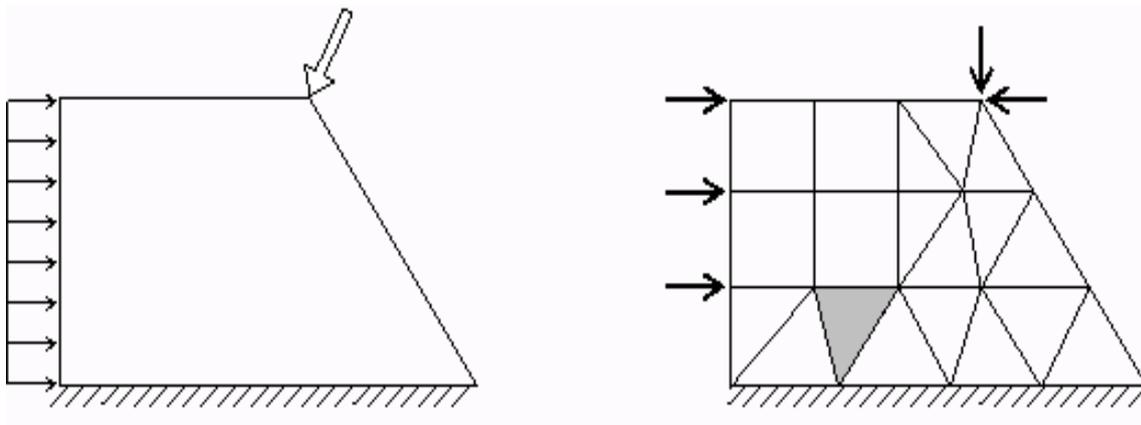


Рис. 1. Дискретизация в МКЭ

В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации КЭ могут иметь различную форму. Так, при расчете стержневых систем (фермы, балки, рамы) КЭ представляют собой участки стержней; для двумерных континуальных конструкций (пластины, плиты, оболочки) чаще всего применяют треугольные и прямоугольные (плоские или изогнутые) КЭ; а для трехмерных областей (толстые плиты, массивы) – КЭ в форме тетраэдра или параллелепипеда. В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в отдельных точках (узлах) определенным конечным числом узловых параметров (рис. 1)

МКЭ – это вариационный метод. Функционал энергии для всей рассматриваемой области здесь представляется в виде суммы функционалов отдельных ее частей – конечных элементов. По области каждого элемента, независимо от других, задается свой закон распределения искомых функций. Такая кусочнонепрерывная аппроксимация выполняется с помощью специально подобранных аппроксимирующих функций, называемых также координатными или интерполирующими. С их помощью искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения и т. д.) в пределах каждого КЭ выражаются через значения этих величин в узловых точках, а произвольная заданная нагрузка заменяется системой эквивалентных узловых сил. При такой кусочно-непрерывной аппроксимации обеспечивается условие совместности

лишь в узлах, а в остальных точках по границам КЭ это условие удовлетворяется в общем случае приближенно (в связи с этим различают КЭ разной степени совместности). Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в перемещениях, имеющий много общего с методом Ритца и ВРМ (в дальнейшем мы будем в основном рассматривать именно этот вариант МКЭ). Различие между традиционной схемой метода Ритца и МКЭ в форме метода перемещений заключается в выборе системы аппроксимирующих функций. Если в методе Ритца аппроксимация перемещений производится по всей области их определения, то в МКЭ – по каждому конечному элементу в отдельности, что позволяет использовать аппроксимирующие функции более простого вида. В первом случае функционал полной потенциальной энергии варьируется по неопределенным коэффициентам  $\alpha_i$ , во втором – по перемещениям в узлах сетки, что приводит к системе алгебраических уравнений метода перемещений (основными неизвестными являются непосредственно узловые перемещения). При этом использование кусочно-непрерывной аппроксимации позволяет получить редко заполненную или ленточную структуру матрицы коэффициентов системы уравнений и таким образом дает возможность применения более эффективных методов ее решения. Число узлов и число перемещений в узле (степень свободы узла), принятые для конечного элемента, могут быть различными, однако не должны быть меньше минимально необходимых для описания напряженнодеформированного состояния КЭ в рамках принятой физической модели. Число независимых перемещений во всех узлах элемента определяет степень свободы КЭ. Степень свободы всей конструкции и соответственно порядок системы разрешающих уравнений определяется суммарным числом перемещений всех ее узлов. Поскольку основными неизвестными МКЭ в форме метода перемещений считаются узловые перемещения, степень свободы КЭ и всей конструкции в целом является чрезвычайно важным понятием в МКЭ. Поня-

тия о степени свободы узла, КЭ и конструкции, и степени их же кинематической неопределимости идентичны. Способ разбивки рассматриваемой области на конечные элементы, их число и число степеней свободы, а также вид аппроксимирующих функций в конечном итоге определяют точность расчета конструкции. Следует отметить, что простым увеличением числа конечных элементов не всегда удастся достичь повышения точности расчетов. Вопросы устойчивости и сходимости решения, а также оценки точности полученных результатов являются основными при использовании МКЭ. По сравнению с другими численными методами МКЭ в лучшей степени алгоритмизирован и более гибок при описании геометрии и граничных условий рассчитываемой области. Кроме того, к достоинствам метода следует отнести его физическую наглядность и универсальность. Применительно к стержневым системам МКЭ в форме метода перемещений может рассматриваться как матричная форма классического метода перемещений, отличающаяся только более глубокой формализацией алгоритма и ориентацией его на использование ЭВМ. Существенный вклад в развитие МКЭ внесли российские и зарубежные ученые В. Г. Корнеев, А. М. Масленников, В. А. Постнов, Л. А. Розин, А. С. Сахаров, Н. Н. Шапошников, Дж. Аргирис, Ф. де Вебеке, Р. Галлагер, Ж. Деклу, О. Зенкевич, Р. Клаф, Дж. Оден, Г. Стренг, М. Тернер, Дж. Фикс, И. Чанг и многие другие.

В *методе конечных элементов* (МКЭ) принимается «физическая» дискретизация конструкции. Она разбивается на элементы конечных размеров, соединенные в узлах, тем самым осуществляется переход от бесконечномерной по отношению к степеням свободы модели к конечномерной. Узлами считают места изменения геометрии, приложения нагрузки, точки, выбранные по другим соображениям. Внешние распределенные нагрузки приводятся к узловым, что в современных программных комплексах выполняется автоматически при вводе данных.

Выделенный элемент конструкции имеет те же свойства, что и конструкция в месте расположения элемента. Благодаря такому подходу удастся унифицировать виды *конечных элементов* (КЭ), которые разделяются на конечное число групп одинаковых по форме и свойствам элементов. Деформированное состояние элементов подбирается так, чтобы на границах элементов выполнялись условия равновесия и совместности деформаций.

Неизвестные величины перемещений и усилий приводятся к узлам конечно-элементного разбиения. Например, в задачах, где в элементах конструкции реализуется растяжение (сжатие), стержневой элемент имеет две степени свободы при выборе неизвестных в виде узловых усилий (рис. 2, а) или перемещений (рис. 2, б). В зависимости от постановки задачи в каждом узле  $n$ -го элемента (1 или 2) имеется неизвестная величина с номером, соответствующим номеру узла.

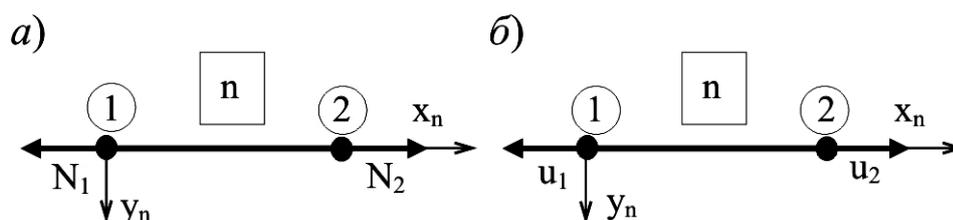


Рис. 2. Узлы конечно-элементного разбиения

Для каждого элемента можно выбрать оси, в которых можно записывать геометрические или статические условия. Эти оси называются *локальными осями элемента*. По умолчанию принимается, что ось  $x$  совпадает с осью стержня и направлена от узла с меньшим номером к узлу с большим номером. Остальные две оси должны образовать правостороннюю систему координат с существующей.

При разбивке системы на конечные элементы необходимо учитывать возможные формы деформирования. Например, в задаче изгиба (рис. 3, а) выбрано минимально возможное количество конечных элементов 3. В задаче

устойчивости (рис. 3, б) минимально возможное количество элементов составляет 4, так как необходимо описать возможные отклонения стойки вследствие потери устойчивости.

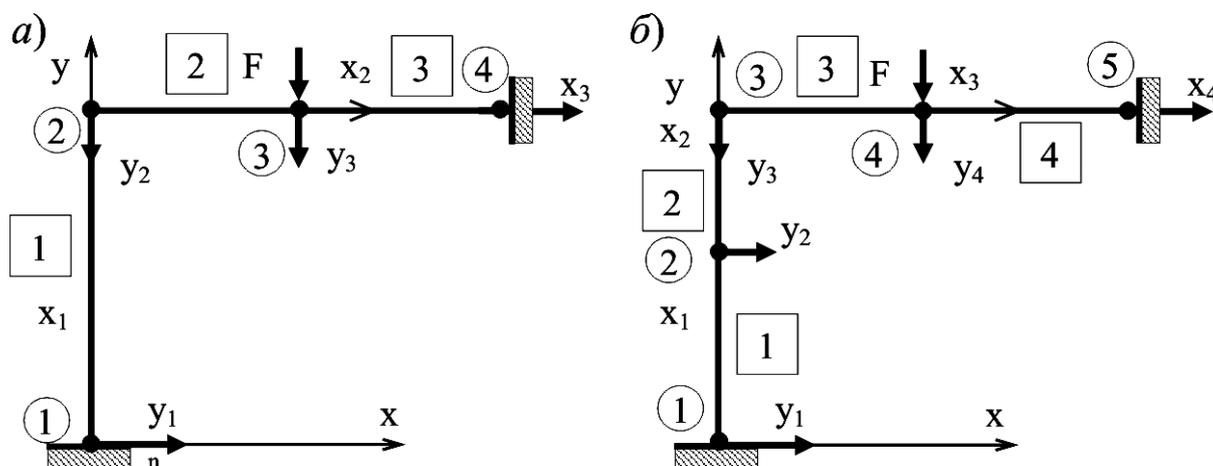


Рис. 3. Разбивка системы на конечные элементы

Теоретически, чем чаще разбиение, тем точнее решение. Но в этом случае возникают трудности при решении системы уравнений, когда матрица жесткости системы становится плохо обусловленной.

Обратим внимание, что для системы в целом задаются произвольно выбранные оси, которые называются *глобальными осями*. На рисунке 3 это оси  $x$  и  $y$ , которые так же, как и локальные, должны образовывать правостороннюю систему координат. Они необходимы для обеспечения взаимной ориентации между элементами, локальные оси которых, в общем случае, не совпадают с направлением глобальных.

Благодаря унификации и типизации элементов удастся записать уравнения состояния конечного элемента и конструкции единообразно и кратко. Метод конечных элементов позволяет формализовать задачу в матричном виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Большим достоинством МКЭ является его алгоритмичность. Наибольшее распространение в практике расчета и проектирования строительных конструкций получил вариант МКЭ в переме-

щениях (в качестве искомым неизвестных принимаются перемещения рассчитываемой системы), который будет рассмотрен ниже. При изложении МКЭ используются основные понятия и методы линейной алгебры.

Формально задачи статики стержневых систем, решаемые с помощью МКЭ, можно свести к следующим основным этапам:

1. *Разбиение системы на конечные элементы.* Рассчитываемая конструкция разбивается воображаемыми точками на элементы конечных размеров (конечные элементы). Предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на их границах. В некоторых задачах строительной механики в качестве искомым неизвестных помимо узловых перемещений принимаются также их частные производные.

2. *Построение интерполирующих функций.* Выбирается система функций (чаще всего кусочно-полиномиальная), однозначно определяющая перемещения внутри каждого конечного элемента через перемещения узловых точек. Интерполирующие функции подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность искомым величин (перемещений и их производных) в узлах элементов.

3. *Вывод основных геометрических и физических соотношений.* На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

4. *Построение матрицы жесткости конечного элемента и вектора узловых нагрузок.* С помощью принципа Лагранжа на основе полученных геометрических и физических соотношений строится матрица жесткости конечного элемента и вектор узловых нагрузок.

5. *Переход от локальных координат к глобальным координатам системы.* Перед тем, как включить матрицу жесткости КЭ в глобальную матрицу жесткости всей конструкции, ее необходимо преобразовать из местной системы координат в общую для всей конструкции систему координат.

6. *Получение системы уравнений метода конечных элементов.* Каждая матрица жесткости отдельного конечного элемента включается в глобальную матрицу жесткости в цикле по элементам. Таким образом, формируется система алгебраических уравнений всей конструкции (уравнения равновесия), которая имеет вид:

$$\mathbf{Rz} = \mathbf{P} \quad (1.2.1)$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица жесткости системы (ансамбля) конечных элементов;  $\mathbf{z}$  – вектор неизвестных узловых перемещений;  $\mathbf{P}$  – вектор узловых нагрузок.

В матрице жесткости  $\mathbf{R}$  системы уравнений (1.2.1) необходимо учесть граничные условия, так как в противном случае эта матрица будет вырожденной.

7. *Решение системы алгебраических уравнений.* Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используются как точные, так и итерационные методы (при высоком порядке системы). Численные процедуры решения учитывают симметрию и ленточную структуру матрицы жесткости системы.

8. *Определение деформаций и напряжений.* Деформации, напряжения и усилия в конструкции определяются с помощью найденных узловых перемещений на основе геометрических и физических соотношений.

### 1.2.2. Разбиение системы на конечные элементы

Этап расчета включает в себя разбиение системы на конечные элементы, выбор степеней свободы и видов конечных элементов, задание количества степеней свободы в узлах.

Разбиение стержневой системы на конечные элементы представляет собой первый и весьма важный шаг в процедуре решения задачи по МКЭ, поскольку от него во многом зависит точность получаемого решения. Успех на этом этапе зависит, в первую очередь, от имеющихся инженерных навыков. Неудачно выполненное разбиение конструкции на конечные

элементы может привести к ошибочным результатам. При назначении размеров КЭ возникает задача оптимального разбиения конструкции на подобласти. При этом следует иметь в виду, что размеры элементов должны быть достаточно малыми для того, чтобы обеспечить приемлемую точность решения, с другой стороны, использование мелких КЭ приводит к большим системам алгебраических уравнений, решение которых связано со значительным объемом вычислительной работы.

В процессе разбиения конструкции на конечные элементы необходимо учитывать некоторые общие представления об окончательных результатах расчета для того, чтобы уменьшить размеры конечных элементов в зонах концентрации напряжений, где искомые величины быстро меняются, и увеличить размеры КЭ там, где искомые величины меняются медленно.

Важным моментом в процессе решения задачи по МКЭ является нумерация узлов КЭ, поскольку от этого зависит ширина ленты матрицы разрешающих уравнений и соответственно время счета и объем используемой памяти ЭВМ.

В настоящее время разработаны сервисные программы автоматизированной разбивки конструкции на конечные элементы и рациональной нумерации узлов.

### **1.2.3. Построение интерполирующих функций**

МКЭ основан на аппроксимации непрерывной функции, определенной на всей области, дискретной моделью с помощью кусочно-непрерывных функций, определенных на подобластях (конечных элементах).

Перемещения, являющиеся функциями координат произвольной точки конечного элемента, записываются через компоненты вектора узловых перемещений с помощью *интерполирующей функции (функции формы или базисной функции)*:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nz} \quad (1.2.2)$$

где  $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_s]$  - матрица функции формы;  
 $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_s)^T$  - вектор узловых перемещений КЭ;  $s$  -  
количество степеней свободы КЭ.

Функции (1.2.2) должны удовлетворять критериям полноты и совместности:

1) *Критерий полноты.* Интерполирующая функция должна обеспечивать постоянные значения рассматриваемых величин при уменьшении размеров элемента.

Для выполнения этого условия интерполирующая функция должна представлять собой полный полином как минимум степени  $p$ , где  $p$  - наивысший порядок производной в подынтегральном выражении функционала энергии.

Условие полноты удовлетворяется в том случае, когда 
$$\sum_{i=1}^s N_i = 1.$$

2) *Критерий совместности.* Интерполирующая функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до  $(p-1)$ -го порядка включительно на границе между элементами.

Критерии полноты и совместности представляют собой достаточные условия сходимости метода конечных элементов. При их выполнении с уменьшением размеров конечного элемента приближенные решения МКЭ монотонно сходятся к точному решению. Сказанное отнюдь не означает, что нарушение данных критериев приводит к невозможности получения достоверного решения. Существуют несовместные, и даже неполные элементы, которые дают высокую точность и быструю сходимость.

#### 1.2.4. Вывод основных геометрических и физических соотношений

На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

В общем виде зависимость между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения) записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{z} \quad (1.2.3)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - вектор, содержащий компоненты тензора деформаций;  $\mathbf{z}$  – вектор узловых перемещений;  $\mathbf{B}$  – матрица, связывающая вектор узловых перемещений с вектором, содержащим компоненты тензора деформаций.

Таким образом, полагается, что зависимость (1.2.3) между деформациями и узловыми перемещениями носит линейный характер. Линейной зависимости отвечают такие условия работы конструкции, когда деформации и углы поворота малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота малы по сравнению с соответствующими компонентами деформации.

Физические соотношения, определяющие зависимость между напряжениями и деформациями, имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2.4)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  - вектор, содержащий компоненты тензора напряжений;  $\mathbf{D}$  – матрица упругости.

Уравнения состояния (1.2.4) представляют собой обобщенный закон Гука, устанавливающий прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями и справедливый для определенного класса материалов на определенном участке графика  $\sigma$ - $\varepsilon$ .

### 1.2.5. Построение матрицы жесткости конечного элемента и вектора узловых нагрузок

Решение задач расчета конструкций базируется на двух основных подходах. В первом случае решаются дифференциальные уравнения с заданными граничными условиями. Во втором случае записывается условие стационарности интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней приложенной нагрузки и представляющей собой полную потенциальную энергию системы. Для расчета конструкций в рамках МКЭ используется второй подход.

Полная потенциальная энергия упругой системы определяется по формуле:

$$\Pi(\mathbf{z}) = W(\mathbf{z}) - A(\mathbf{z}),$$

где  $W$  – потенциальная энергия деформации;  $A$  – потенциал внешних сил.

Потенциальная энергия деформации упругой системы определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.2.5)$$

где  $V$  – объем, занимаемый телом, а потенциал внешних распределенных нагрузок определяется по формуле:

$$A = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS \quad (1.2.6)$$

где  $\mathbf{p}$  – вектор внешних распределенных нагрузок;  $S$  – площадь, на которой приложена нагрузка.

При этом деформации и напряжения, входящие в выражение для потенциальной энергии, выражаются через узловые перемещения.

Получение уравнений МКЭ в перемещениях основано на одном из фундаментальных энергетических принципов механики – *принципе Лагранжа*, согласно которому для системы, находящейся в состоянии равновесия, полная потенциальная энергия принимает стационарное значение. Это условие записывается в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = 0 .$$

Значение полной потенциальной энергии для всей области  $V$  равно сумме энергий отдельных конечных элементов:

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \Pi_k = \sum_{k=1}^m (W_k - A_k) ,$$

где  $m$  – количество конечных элементов.

Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial W_k}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial A_k}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0 \quad (1.2.7)$$

Рассмотрим отдельный конечный элемент, индекс  $k$  при этом опускаем. Полная потенциальная энергия КЭ с учетом формул (1.2.2)÷(1.2.6) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = W - A &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{Bz})^T \mathbf{D} \mathbf{Bz} dV - \int_S (\mathbf{Nz})^T \mathbf{p} dS = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{P} , \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

где матрица

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (1.2.9)$$

представляет собой *матрицу жесткости конечного элемента*, а

$$\mathbf{P} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS \quad (1.2.10)$$

есть вектор узловых нагрузок.

### **1.2.5. Переход от локальных координат к глобальным координатам системы**

В процессе решения задачи по МКЭ в большинстве случаев возникает необходимость введения местной и общей систем координат. Плоская стержневая система состоит, как правило, из большого количества элементов, которые могут иметь различную ориентацию. Поэтому каждый стержень, входящий в состав стержневой конструкции, рассматривается в двух системах координат – местной (локальной), связанной с осью стержня, и общей (глобальной). Рассмотрим стержень, входящий в состав плоской стержневой системы, который имеет три перемещения (три степени свободы) в каждом узле:  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ . На рис.4 показан конечный элемент до и после деформации и отмечены компоненты вектора перемещений. Начальный узел конечного элемента обозначен через « $i$ », конечный узел - через « $j$ ».

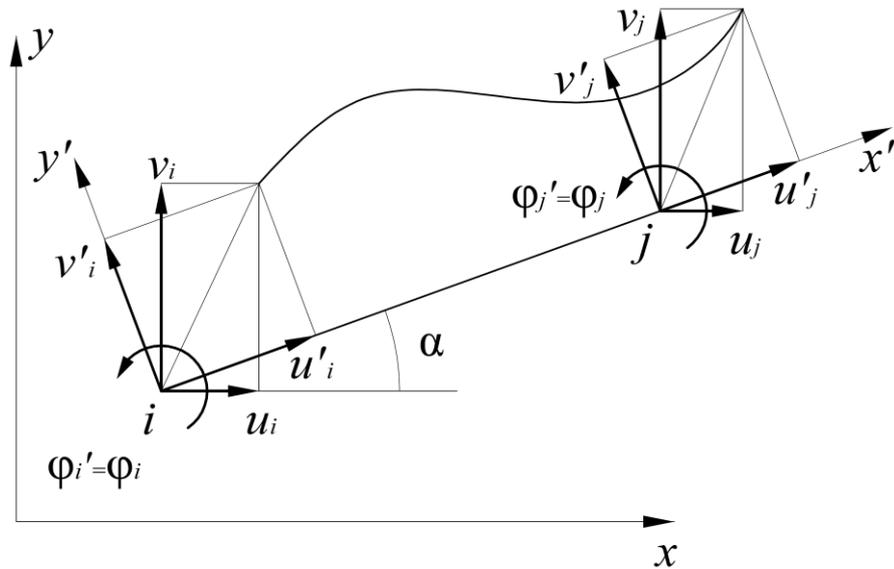


Рис. 4. Конечный элемент с компонентами перемещений

Учитывая, что углы поворота в начальной и конечной точках стержня  $\varphi_i'$  и  $\varphi_j'$  при преобразовании координат не меняются, получим:

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \varphi_i; & u_i' &= u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha; & v_i' &= -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha; \\ \varphi_j' &= \varphi_j; & u_j' &= u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha; & v_j' &= -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha. \end{aligned}$$

В матричной форме зависимость между перемещениями узлов отдельного стержня в местной и общей системе координат имеет вид:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{Vz} \quad (1.2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (u_i' \quad v_i' \quad \varphi_i' \quad u_j' \quad v_j' \quad \varphi_j')^T, \\ \mathbf{z} &= (u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j)^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

Значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  вычисляются через координаты узлов конечного элемента по формулам:

$$\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}.$$

Матрица преобразования координат  $\mathbf{V}$  является ортогональной матрицей и для нее  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ . Тогда

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{z}'.$$

Первоначально матрица жесткости для стержня строится в местной системе координат  $x'y'$ , связанной с осью стержня. Перед тем, как включить эту матрицу в единую матрицу жесткости всей конструкции, ее необходимо преобразовать из местной системы координат в общую для всей конструкции систему координат  $xu$

Для получения зависимости между матрицами жесткости в системах координат  $x'y'$  и  $xu$  используется свойство инвариантности потенциальной энергии деформации конечного элемента, состоящее в том, что значение потенциальной энергии деформации не зависит от выбранной системы координат. Приравняем выражения энергии конечных элементов в местной и общей системах координат:

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}'^T \mathbf{R}' \mathbf{z}' = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}.$$

Учитывая (1.2.11), получим:

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{V}^T \mathbf{R}' \mathbf{V} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}. \quad (1.2.13)$$

Сравнивая левую и правую части соотношения (1.2.13), находим искомую зависимость:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^T \mathbf{R}' \mathbf{V} \quad (1.2.14)$$

### 1.2.6. Формирование системы уравнений метода конечных элементов. Учет граничных условий

Для выполнения операции суммирования необходимо преобразовать векторы узловых перемещений  $\mathbf{z}_k$  и узловой нагрузки  $\mathbf{P}_k$  для отдельного  $k$ -го конечного элемента в соответствующие векторы  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{P}$  для всей системы, что может быть сделано с помощью некоторой матрицы  $\mathbf{H}_k$ , содержащей в качестве элементов только нули и единицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{z}, \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Подстановка формул (1.2.15) в выражение для полной потенциальной энергии конечного элемента (1.2.8) дает:

$$\begin{aligned} \Pi_k(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{H}_k \mathbf{z})^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - (\mathbf{H}_k \mathbf{z})^T \mathbf{H}_k \mathbf{P} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Тогда дифференцирование уравнения (1.2.16) по  $\mathbf{z}$ , в соответствии с условием (1.2.7), приводит к системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^m (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}) = 0 \quad (1.2.17)$$

где использовано правило дифференцирования матричных

$$\text{соотношений } \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}) = 2\mathbf{R} \mathbf{z}.$$

Система (1.2.17), которую можно записать в виде

$$\mathbf{R} \mathbf{z} = \mathbf{P} \quad (1.2.18)$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, являющихся уравнениями равновесия в перемещениях. Как правило, решение системы (1.2.18) выполняется методом исключения Гаусса или итерационными методами.

Матрица жесткости отдельного элемента  $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k$ , фигурирующая в формуле (1.2.17), представляет собой расширенную матрицу, размерность которой равна размерности глобальной матрицы. Поэтому использование процедуры суммирования в форме (1.2.17) при численной реализации МКЭ неэффективно. В практических расчетах выполняется прямое построение глобальной матрицы жесткости. В этом случае строится матрица  $\mathbf{R}$  для отдельного конечного элемента по формуле (1.2.9), имеющая размерность  $s \times s$ . Затем строкам и столбцам этой матрицы приписываются номера глобальных степеней свободы, что позволяет определить местоположение элементов матрицы жесткости КЭ в глобальной матрице жесткости. Перед началом формирования глобальной матрицы всем ее элементам присваиваются нулевые значения. После этого в глобальную матрицу заносятся элементы матрицы жесткости КЭ на то место, которое определено их адресом.

Пусть, например, система состоит из двух КЭ, содержащих по два узла, в каждом из которых имеется одно неизвестное (одна степень свободы). Общее количество узлов системы – 3, размерность глобальной матрицы  $3 \times 3$ , элементы соединены между собой во 2-м узле (рис. 13.4).

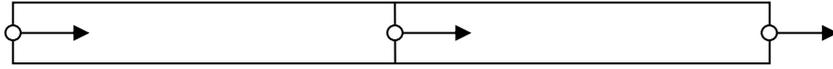


Рис. 5. Сочетание двух конечных элементов

Матрицы жесткости 1-го и 2-го КЭ с соответствующей нумерацией элементов и глобальная матрица имеют вид:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 \end{bmatrix}; \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & 0 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 + r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ 0 & r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix}$$

где верхний индекс указывает номер КЭ, нижние индексы соответствуют номерам строки и столбца в глобальной матрице.

Система уравнений МКЭ для конструкции может быть получена непосредственно из условия минимума квадратичной функции (1.2.7). Воспользовавшись соотношением (1.2.8), запишем выражение для полной потенциальной энергии в виде:

$$\Pi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathbf{z}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}.$$

Пусть, как и в предыдущем примере, система состоит из двух КЭ, содержащих по два узла, в каждом из которых имеется одно неизвестное (одна степень свободы). Общее количество узлов – 3, общее количество узловых неизвестных – 3, размерность глобальной матрицы 3x3, элементы соединены между собой во 2-м узле. Выражение для полной потенциальной энергии может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\mathbf{z}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{z}_k - 2\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}) = \frac{1}{2} (\mathbf{z}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T \mathbf{R}_2 \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1^T \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{P}_2) = \\
&= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^1 & \mathbf{r}_{12}^1 \\ \mathbf{r}_{21}^1 & \mathbf{r}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{22}^2 & \mathbf{r}_{23}^2 \\ \mathbf{r}_{32}^2 & \mathbf{r}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} - 2(\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 \\ \mathbf{P}_2^1 \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - 2(\mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2^2 \\ \mathbf{P}_3^2 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Дифференцирование представленной выше квадратичной функции, в соответствии с (1.2.7), позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений.

Учитываем при этом, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}) = 2\mathbf{R} \mathbf{z}$ . Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}_1} = \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{11}^1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{r}_{12}^1 \mathbf{z}_2 + \mathbf{r}_{21}^1 \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{P}_1^1) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}_2} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{12}^1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{r}_{21}^1 \mathbf{z}_1 + 2\mathbf{r}_{22}^2 \mathbf{z}_2 + 2\mathbf{r}_{23}^2 \mathbf{z}_3 + \mathbf{r}_{32}^2 \mathbf{z}_3 - 2\mathbf{P}_2^1 - 2\mathbf{P}_2^2) = 0$$

,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}_3} = \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{23}^2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{r}_{32}^2 \mathbf{z}_2 + 2\mathbf{r}_{33}^2 \mathbf{z}_3 - 2\mathbf{P}_3^2) = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^1 & (\mathbf{r}_{12}^1 + \mathbf{r}_{21}^1)/2 & 0 \\ (\mathbf{r}_{12}^1 + \mathbf{r}_{21}^1)/2 & \mathbf{r}_{22}^2 + \mathbf{r}_{22}^2 & (\mathbf{r}_{23}^2 + \mathbf{r}_{32}^2)/2 \\ 0 & (\mathbf{r}_{23}^2 + \mathbf{r}_{32}^2)/2 & \mathbf{r}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 \\ \mathbf{P}_2^1 + \mathbf{P}_2^2 \\ \mathbf{P}_3^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица жесткости конечного элемента симметрична, то есть

$$\mathbf{r}_{ij}^k = \mathbf{r}_{ji}^k, (k = 1, 2, 3, \dots, m; i, j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

то система уравнений (без учета граничных условий) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & 0 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 + r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ 0 & r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \end{pmatrix}.$$

В матрице жесткости  $\mathbf{R}$  системы уравнений (1.2.18) необходимо учесть граничные условия, в противном случае она будет вырожденной, т. е. ее определитель будет равен нулю.

Учет граничных условий может быть осуществлен различными способами:

1. Из матрицы  $\mathbf{R}$  удаляются  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец, соответствующие перемещению  $z_i=0$ . После этого строки и столбцы матрицы перенумеровываются. Соответственно уменьшается размерность вектора узловых перемещений.

2. Уравнение  $z_i=0$ , соответствующее граничному условию, формируется в составе матрицы  $\mathbf{R}$ . Для получения  $z_i=0$  в матрице  $\mathbf{R}$   $i$ -я строка и  $i$ -й столбец, а также соответствующий элемент в векторе внешних нагрузок  $\mathbf{P}$  заполняются нулями. На место диагонального элемента  $r_{ii}$  в матрице  $\mathbf{R}$  ставится единица. В результате порядок матрицы не изменяется, а заданные перемещения получают нулевые значения.

3. Для получения уравнения  $z_i=0$  диагональный элемент  $r_{ii}$  умножается на большое число. Порядок матрицы при этом не меняется.

### 1.2.7. Решение системы алгебраических уравнений

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы – точные (прямые) и итерационные. Точные методы позволяют получить решение системы линейных уравнений за конечное число арифметических операций (метод Гаусса, метод квадратного корня, правило Крамера и т. д.). Использование итерационных методов дает возможность

найти приближенное решение системы с заданной степенью точности (метод простой итерации, метод Зейделя, метод последовательной релаксации).

Большинство известных алгоритмов прямого решения системы алгебраических уравнений МКЭ основано на методе Гаусса. При этом учитываются симметрия, положительная определенность, ленточная структура глобальной матрицы жесткости системы. В процессе исключения по Гауссу матрица коэффициентов с помощью прямого хода сводится к верхней треугольной форме, из которой обратным ходом находятся неизвестные перемещения.

### 1.2.8. Определение внутренних усилий

В результате решения системы уравнений (1.2.18) определяется вектор узловых перемещений всей конструкции. Для вычисления усилий в отдельном стержне плоской стержневой системы вначале из вектора узловых перемещений всей конструкции выделяется вектор узловых перемещений конечного элемента  $\mathbf{z}_k$ . Затем этот вектор переводится в вектор  $\mathbf{z}'_k$  в локальной системе координат по формуле (1.2.11). Далее, с помощью матрицы жесткости конечного элемента  $\mathbf{R}'_k$  в местной системе координат определяются усилия на концах стержня по формуле:

$$\mathbf{r}'_k = \begin{pmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{pmatrix} = \mathbf{R}'_k \mathbf{z}'_k \quad (1.2.19)$$

где  $N_i, Q_i, M_i$  – соответственно продольное и поперечное усилия и изгибающий момент в начальной точке КЭ;  $N_j, Q_j, M_j$  – то же в конечной точке КЭ.

Ранее было принято правило знаков, согласно которому положительные направления усилий совпадают с положительными направлениями перемещений. В то же время в строительной механике принято особое правило знаков. Поэтому для приведения знаков полученного решения в соответствие с правилами строительной механики, достаточно в первом, третьем и пятом элементах вектора  $\mathbf{r}'_k$  поменять знаки на противоположные.

### 1.2.9. Конечный элемент стержня при центральном растяжении и сжатии.

Этот конечный элемент представляет собой прямолинейный отрезок длиной  $l$  с двумя узлами (рис.6). В каждом узле имеется одна степень свободы - продольное перемещение  $u$ .

Здесь и далее апостроф, указывающий на то, что матрица жесткости построена в местной системе координат опускается.

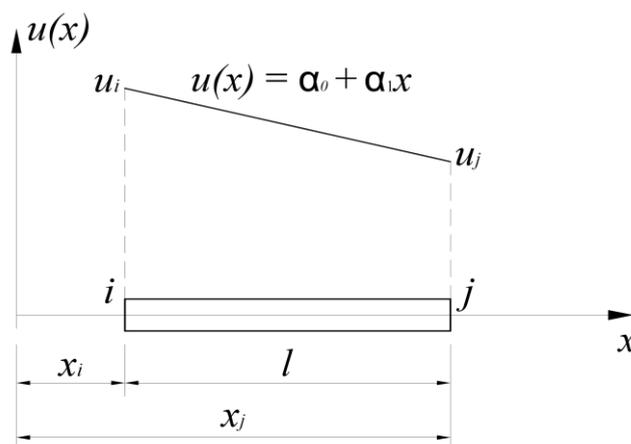


Рис. 6. Конечный элемент стержня при центральном растяжении и сжатии

Интерполирующая функция для продольного перемещения принимается в виде:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (1.2.20)$$

Линейная функция (1.2.20) будет точно описывать продольные перемещения на участках стержня между точками приложения сосредоточенных сил.

Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  определяются с помощью граничных условий: при  $x=x_i$   $u=u_i$ ; при  $x=x_j$   $u=u_j$ .

Подстановка граничных условий в выражение (1.2.20) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} u_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i \\ u_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j, \end{cases}$$

в результате решения которой определяются  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  :

$$\alpha_0 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{l};$$

$$\alpha_1 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

Подставляя выражения для  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  в формулу (1.2.20), получим

$$u(x) = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{l} + \frac{u_j - u_i}{l} x,$$

или

$$u(x) = \left( \frac{x_j - x}{l} \right) u_i + \left( \frac{x - x_i}{l} \right) u_j.$$

Тогда в матричном виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{\ell} & \frac{x - x_i}{\ell} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2] \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{Nz} \quad (1.2.21)$$

Продольная деформация растяжения-сжатия связана с узловыми перемещениями по формуле:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$$

Так как, согласно выражению (1.2.21)

$$N_1 = \frac{x_j - x}{\ell}; \quad N_2 = \frac{x - x_i}{\ell} \quad ,$$

то дифференцирование дает:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{\ell}; \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{\ell}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{Bz} \quad (1.2.22)$$

Где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \quad (1.2.23)$$

представляет собой *матрицу градиентов*.

Далее, приняв  $\mathbf{D}=\mathbf{E}$ , где  $E$  – модуль упругости, с учетом (1.2.22), получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{z} \quad (1.2.24)$$

Матрица жесткости  $\mathbf{R}$  подсчитывается по формуле (1.2.9) с учетом выражения (1.2.23) следующим образом:

$$\mathbf{R} = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} F dx,$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня.

После перемножения матриц и вычисления интеграла получим:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & -\frac{EF}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & \frac{EF}{\ell} \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

### 1.2.10. Конечный элемент изгибаемого стержня.

#### Пример расчета.

Одномерный конечный элемент стержня, работающего в условиях изгиба, представляет собой прямолинейный стержень длиной  $\ell$  (рис.7.6), при этом каждый узел имеет две степени свободы: поперечное перемещение

(прогиб)  $v$  и угол поворота  $\varphi = \frac{dv}{dx}$ .

Интерполирующую функцию для  $v$  принимаем в виде полинома 3-й степени (рис. 7.6):

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (1.2.26)$$

Тогда

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 \quad (1.2.27)$$

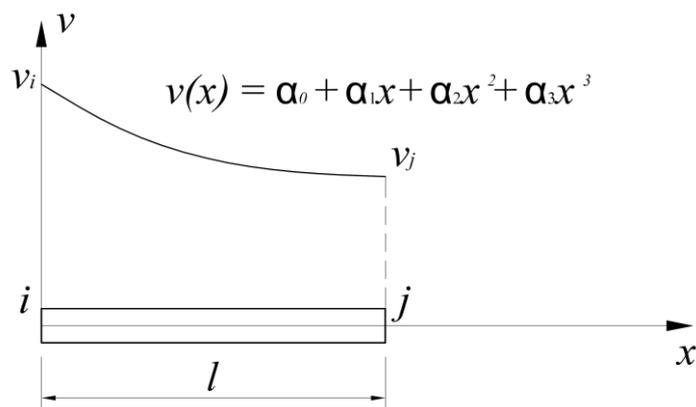


Рис. 7. Одномерный конечный элемент стержня, работающего на изгиб

Для определения коэффициентов  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  используются граничные условия:  $v=v_i, \varphi=\varphi_i$  при  $x=0$ ;  $v=v_j, \varphi=\varphi_j$  при  $x=l$ . Эти условия дают систему уравнений:

$$\begin{cases} v_i = \alpha_0 \\ \varphi_i = \alpha_1 \\ v_j = \alpha_0 + \alpha_1 l + \alpha_2 l^2 + \alpha_3 l^3, \\ \varphi_j = \alpha_1 + 2\alpha_2 l + 3\alpha_3 l^2 \end{cases}$$

в результате решения которой определяются искомые коэффициенты:

$$\alpha_0 = v_i,$$

$$\alpha_1 = \varphi_i,$$

$$\alpha_2 = \frac{3v_j}{l^2} - \frac{\varphi_j}{l} - \frac{2\varphi_i}{l} - \frac{3v_i}{l^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{2v_i}{l^3} + \frac{\varphi_i}{l^2} + \frac{\varphi_j}{l^2} - \frac{2v_j}{l^3}.$$

Подставляя выражения для  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  в формулы (1.2.26) и (1.2.27) для  $v$  и  $\varphi$  получим:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 & \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x & -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} & \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \\ \frac{6x^2}{l^3} - \frac{6x}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{4x}{l} + 1 & -\frac{6x^2}{l^3} + \frac{6x}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \mathbf{Nz}.$$

Деформация изгиба (изменение кривизны) связана с узловыми перемещениями по формуле:

$$\varepsilon = y \frac{d^2v}{dx^2} = y \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & -\frac{12x}{l^3} + \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \mathbf{Bz},$$

Где

$$\mathbf{B} = y \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & -\frac{12x}{l^3} + \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} \quad (1.2.28)$$

Приняв  $\mathbf{D}=\mathbf{E}$  и учитывая, что

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{z} ,$$

запишем формулу (1.2.9) для матрицы жесткости  $\mathbf{R}$  с учетом (1.2.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \\ &= E \int_F y^2 dF \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \\ \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \\ -\frac{12x}{l^3} + \frac{6}{l^2} \\ \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & -\frac{12x}{l^3} + \frac{6}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} dx. \end{aligned}$$

После перемножения матриц и интегрирования получим:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 4EJ & -\frac{6EJ}{l^2} & 2EJ \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 2EJ & -\frac{6EJ}{l^2} & 4EJ \end{bmatrix} \quad (1.2.29)$$

где  $E$  - модуль упругости материала;  $F$  и  $J$  - площадь и момент инерции поперечного сечения.

Каждый элемент матрицы  $\mathbf{R}$  имеет определенный физический смысл. Если начальный и конечный узлы КЭ жестко закрепить, а затем дать им

единичные смещения по направлению каждого искомого перемещения, то возникающие в результате этих смещений реакции в узлах будут численно равны коэффициентам матрицы жесткости. Причем произвольный элемент  $r_{km}$  матрицы  $\mathbf{R}$  будет численно равен составляющей реакции в узловой точке в направлении  $k$  от единичного смещения по направлению  $m$ . Следовательно, все члены матрицы  $\mathbf{R}$  можно получить из известных решений для сжато-изогнутого прямолинейного стержня. Например, от единичного поворота  $\varphi_i=1$  ( $k=2$ ) в направлении  $v_i$  ( $m=1$ ) реакция  $r_{21} = 6EJ / \ell^2$ , а в направлении  $\varphi_j$  ( $m=4$ ) реакция  $r_{24} = 2EJ / \ell$ , где индексы  $k$  и  $m$  указывают соответственно номер строки и номер столбца матрицы жесткости (1.2.29).

**Пример 7.1.** Изгибаемая балка (консоль) нагружена поперечной силой  $P=10^5$  Н (рис.7.9). Модуль упругости материала  $E=2 \cdot 10^4$  МПа. Размеры поперечного сечения и длина балки заданы значениями:  $b = 0,3$  м;  $h = 0,4$  м;  $\ell = 2$  м. Граничное условие:  $v_1 = \varphi_1 = 0$  при  $x = 0$ . Требуется определить прогиб  $v_2$  и угол поворота  $\varphi_2$  на конце консоли в точке приложения сосредоточенной силы, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

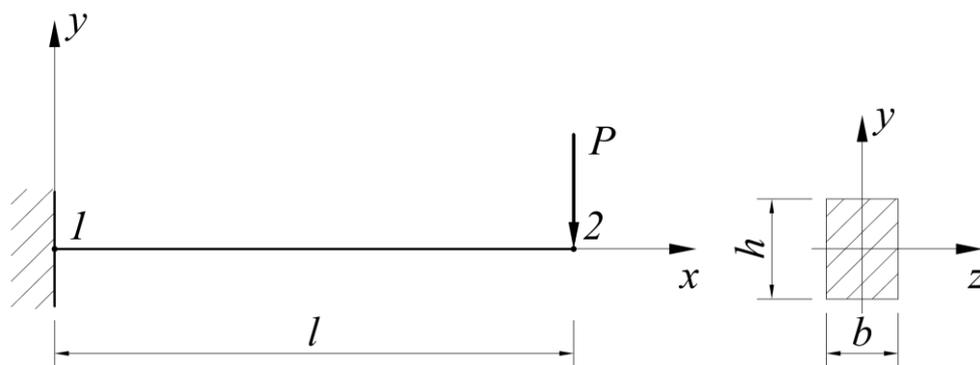


Рис. 8. Пример расчета

Геометрические характеристики поперечного сечения и изгибная жесткость балки имеют следующие значения:  $F=bh=0,12\text{м}^2$ ;  $J=bh^3/12=16\cdot 10^{-4}\text{ м}^4$ ,  $EJ=320\cdot 10^5\text{ Нм}^2$ .

1. *Разбиение на конечные элементы.* При узловом приложении нагрузки интерполирующая функция (1.2.26) и соответственно матрица жесткости конечного элемента (1.2.29) дают точное решение. Поэтому для решения данной задачи балка представляется одним конечным элементом, для которого начальным узлом будет точка 1, конечным – точка 2.

2. *Построение матрицы жесткости конечного элемента.* Согласно формуле (1.2.29) матрица жесткости конечного элемента имеет вид (размерности величин выражены через ньютоны и метры):

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 480 & 480 & -480 & 480 \\ 480 & 640 & -480 & 320 \\ -480 & -480 & 480 & -480 \\ 480 & 320 & -480 & 640 \end{bmatrix}.$$

Поскольку местная и общая системы координат совпадают, то  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ .

3. *Получение системы уравнений метода конечных элементов.*

Система линейных алгебраических уравнений МКЭ без учета граничных условий будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 480 & 480 & -480 & 480 \\ 480 & 640 & -480 & 320 \\ -480 & -480 & 480 & -480 \\ 480 & 320 & -480 & 640 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для учета граничных условий закрепления на левом конце балки 1-я и 2-я строки, а также 1-й и 2-й столбцы матрицы заполняются нулями, коэффициентам  $r_{11}$  и  $r_{22}$ , стоящим на главной диагонали, присваивается значение, равное единице. Для 1-го и 2-го элементов грузового вектора сохраняются нулевые значения. Таким образом, первое и второе уравнения будут иметь вид  $v_1=0$  и  $\varphi_1=0$ , что соответствует заданным граничным условиям. Тогда система уравнений МКЭ запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 480 & -480 \\ 0 & 0 & -480 & 640 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

4. *Решение системы алгебраических уравнений.* Решение данной системы уравнений позволяет получить значения  $v_2=-0,00833$  м,  $\varphi_2 = -0,00625$  рад, что совпадает с известным точным решением задачи ( $v_2 = -Pl^3/(3EJ)$ ,  $\varphi_2=-Pl^2/(2EJ)$ ). Результаты совпадают, поскольку принятая нами интерполирующая функция в виде полинома третьей степени (1.2.26) отвечает точному решению для случая сосредоточенных нагрузок, когда изгибающий момент изменяется линейно между точками приложения сил.

5. *Определение усилий.* Изгибающие моменты и поперечные силы в местной системе координат определяются по формуле (1.2.19) при отсутствии продольных сил:

$$\mathbf{r}'_k = \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 480 & 480 & -480 & 480 \\ 480 & 640 & -480 & 320 \\ -480 & -480 & 480 & -480 \\ 480 & 320 & -480 & 640 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,00833 \\ -0,00625 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для приведения знаков полученного решения в соответствие с правилами строительной механики в третьем элементе вектора  $r'_k$  следует поменять знак на противоположный. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил показаны на рис. 9, а и 9, б.

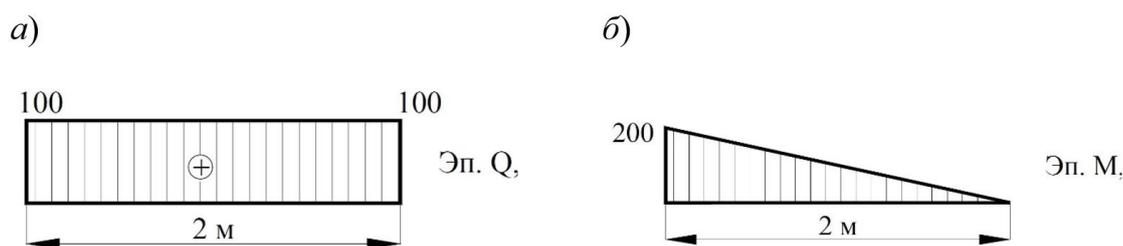


Рис. 9. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

### 1.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Этот метод численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также м е т о д о м с е т о к. Суть метода состоит в следующем. На рассчитываемую область наносится сетка с узлами. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями (по формулам численного дифференцирования) и, таким образом, выражаются через неизвестные узловые значения искомой функции. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций в узлах сетки. Решение этой системы с последующей интерполяцией в промежутках между узлами позволяет в конечном счете получить приближенное решение рассматриваемой задачи. Большим преимуществом этого метода является слабая зависимость от граничных условий задачи, геометрии конструкций и характера исходного напряженного состоя-

ния. Недостатком является высокий порядок систем алгебраических уравнений. Для МКР также характерны затруднения при учете смешанных граничных условий, рассмотрении многосвязных областей и стыковок областей, описываемых различными дифференциальными уравнениями. Первые работы по применению МКР к задачам линейной теории упругости были выполнены Г. Маркусом в начале XX столетия. Широкий круг задач был решен Н. П. Абовским, П. М. Варваком, М. А. Колтуновым, М. С. Корнишиным и др. В дальнейшем этот метод применялся для решения плоских задач теории упругости, изгиба пластин, оболочек и т. д.

Изложим основные положения МКР на примере одномерной задачи. Пусть, например,  $v(x)$  есть уравнение изогнутой оси балки (рис. 10). Точное значение производной в точке  $C$  будет равно

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = tg\varphi$$

Обозначим через  $\lambda = \Delta x$  конечное приращение аргумента – шаг сетки (разностные отношения будут намного проще, если  $\lambda = \text{const}$  для всей рассчитываемой области). Как видно из рис. 10, чем меньше шаг  $\lambda$ , тем хорда АВ будет ближе к касательной, а угол наклона АВ будет приближаться к углу наклона касательной. Пусть  $i, k, l, s, t$  – узлы сетки, а  $v_i, v_k, v_l, v_s, v_t$  – узловые значения функции  $v(x)$ . Тогда приближенное выражение для производной в точке  $i$ , лежащей посередине интервала  $[k, l]$ , запишется следующим образом:

$$v'(x_i) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_i \approx \frac{v_l - v_k}{2\lambda} \quad (1.3.1)$$

Приближенное выражение для производной посередине интервала  $[i, l]$  можно записать так:

$$v'(x_a) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{i_{\text{пр}}} \approx \frac{v_l - v_i}{\lambda} \quad (1.3.2)$$

а посередине интервала  $[k, i]$ :

$$v'(x_\beta) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{i\text{-ЛЕВ}} \approx \frac{v_i - v_k}{\lambda} \quad (1.3.3)$$

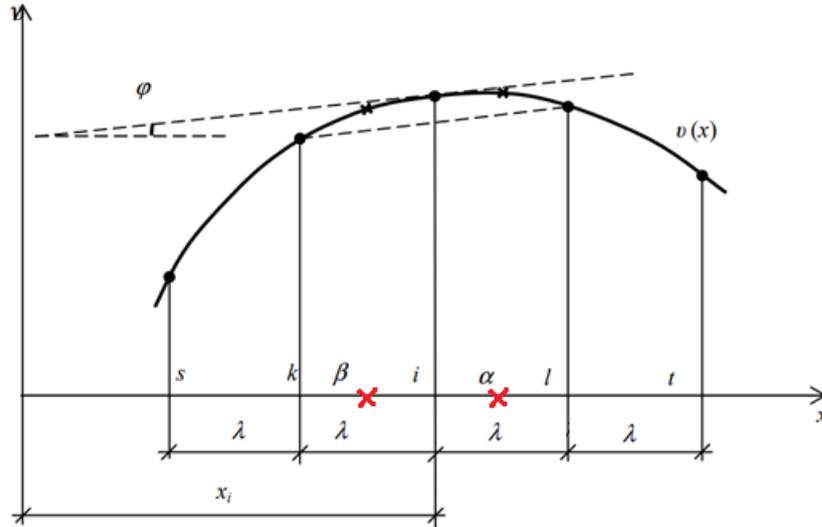


Рис. 10. График изогнутой оси балки

Выражение (1.3.1) называется центральной разностью в точке  $i$ , а (1.3.2) и (1.3.3) – соответственно правой и левой разностями в точке  $i$  в нецентрированной форме. Все вышеприведенные выражения для первой производной, помимо того, называются первыми разностями.

Вторая производная (вторая разность) в точке  $i$  – это первая разность от первых разностей в точках  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} v''(x_i) &= \left. \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right|_i \approx \frac{v'(x_\alpha) - v'(x_\beta)}{\lambda} \\ &= \frac{(v_l - v_i) - (v_i - v_k)}{\lambda\lambda} = \frac{v_l - 2v_i + v_k}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Аналогично вторые разности в точках  $l$  и  $k$ :

$$v''(x_l) = \left. \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right|_l \approx \frac{v_t - 2v_l + v_i}{\lambda^2}, \quad v''(x_k) = \left. \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right|_k \approx \frac{v_i - 2v_k + v_s}{\lambda^2}$$

Третья производная (третья разность) в точке  $i$  берется как первая разность от вторых разностей в точках  $l$  и  $k$ :

$$v'''(x_i) = \left. \frac{d^3v(x)}{dx^3} \right|_i \approx \frac{v''(x_l) - v''(x_k)}{2\lambda} = \frac{(v_t - 2v_l + v_i) - (v_i - 2v_k + v_s)}{2\lambda\lambda^2} = \frac{v_t - 2(v_l - v_k) + v_s}{2\lambda^3}$$

,

Четвертая производная (четвертая разность) в точке  $i$  – это вторая разность от вторых разностей в точках  $l, i$  и  $k$ :

$$v^{IV}(x_i) = \left. \frac{d^4 v(x)}{dx^4} \right|_i \approx \frac{v''(x_l) - 2v''(x_i) + v''(x_k)}{\lambda^2} = \frac{v_l - 4v_i + 6v_i - 4v_k + v_s}{\lambda^4} \quad (1.3.5)$$

Рассмотрим, как выполняется учет заданных условий по МКР. Если  $v_i = 0$  в точке  $i$ , то данное неизвестное просто исключается из системы алгебраических уравнений (соответственно число уравнений в системе уменьшается на одно).

Если  $v'(x_i) = 0$ , то, подставляя данное условие в (1.3.1), имеем  $\frac{v_l - v_k}{2\lambda} = 0$ , откуда  $v_l = v_k$ , и одно из этих неизвестных, например  $v_l$ , также исключается из системы уравнений. Если  $v''(x_i) = 0$ , то из выражения второй разности (1.3.4) можно, например, выразить  $v_l = 2v_i - v_k$ . Данная зависимость также позволяет исключить одно неизвестное, в данном случае  $v_l$ .

#### 1.4. Метод последовательных аппроксимаций в разностной форме.

Р.Ф. Габбасовым разработана форма метода последовательных аппроксимаций в разностной форме. Методика построения разностных уравнений МПА позволила также обобщить известные уравнения МКР типа "крест" на задачи с разрывными решениями. Наряду с разностными уравнениями МПА и обобщенными уравнения МКР были получены и разностные выражения, описывающие краевые условия различных задач строительной механики. Наиболее универсальной, рациональной с точки зрения численной реализации, учета различных краевых условий, нагрузок и областей интегрирования является разностная форма.

Разностная форма метода последовательных аппроксимаций выявляется при разбиении области интегрирования дифференциальных уравнений на подобласти (элементы конечных размеров) и применении в пределах элемента матрицы интегрирования или дифференцирования. Эта разностная форма дает те же результаты, что первые две формы, однако она является более удобной и

сравнительно простой для практического пользования. С помощью разностных уравнений МПА можно решать все задачи, сводящиеся к системе дифференциальных уравнений типа уравнения Пуассона, с разрывными искомыми функциями и их производными. Разностные уравнения МПА, аппроксимирующие уравнение Пуассона и учитывающие возможные разрывы первых, вторых производных искомой функции и разрыва самой функции в двух взаимно перпендикулярных направлениях прямоугольной сетки, получены и использованы для расчета плит и оболочек. При этом в отличие от известных уравнений МКР нет необходимости угадывать сетку или использовать усредненные значения вблизи разрывов. Получены разностные уравнения МПА, аппроксимирующие дифференциальные уравнения второго порядка более общего типа, в том числе с переменными коэффициентами. Отметим, что с помощью полученных разностных уравнений МПА могут быть решены задачи плоской или пространственной теории упругости и термоупругости, а также такие задачи, как расчет плит на прочность и устойчивость, включая плиты на упругом основании, переменной толщины и анизотропные, расчет пологих и цилиндрических оболочек; кроме того, разностные уравнения МПА могут быть получены и для оболочек с произвольным законом изменения срединной поверхности.

Разностные уравнения МПА были использованы для расчета плит на прочность, устойчивость, для решения задачи теории упругости, для расчета стержневых систем, для расчета пологих, сферических и цилиндрических оболочек, также для решения некоторых динамических задач строительной механики. В этих работах на ряде примеров показаны преимущества МПА перед методами конечных разностей и конечных элементов. МПА проще МКЭ, так как обходится без составления матрицы жесткости, проще МКР, поскольку не нужны уравнения, связывающие законтурные и внутриконтурные точки, кроме того, можно организовать итерационный процесс решения уравнений без предварительного формирования матрицы коэффициентов.

Усовершенствование методов расчета в первую очередь относится к конструкциям с разрывными параметрами. Причинами, вызывающими разрывной характер решений, служат следующие: разрывы нагрузок (локальные, близкие к сосредоточенным воздействиям, распределенные вдоль линий нагрузки, кусочно-переменные и т.д.); нарушения сплошности конструкции (разрезы, щели, отверстия различных форм, шарниры); разрывы жёсткости конструкции (кусочно-переменное изменение жёсткости, наличие рёбер одного или двух направлений постоянного или переменного сечения); разрывы в геометрии конструкции (изломы оси или срединной поверхности, специально предусмотренные проектом или возникшие на монтаже).

Аналитические методы расчета сооружений с разрывными параметрами приводят к сложным и трудоёмким алгоритмам; известные численные методы решения таких задач связаны с сильным сгущением расчётной сетки, что вызывает трудности при их реализации на ЭВМ. Возникает проблема конструирования численных методов без специального сгущения сетки вблизи разрывов. Эти методы должны обладать высокой точностью также при отсутствии разрывов и служить средством подтверждения достоверности результатов решения той или иной задачи другими методами.

Дифференциальная форма МПА предпочтительнее интегральной, но алгоритм расчета по обоим формам становится громоздком при сложной конфигурации областей интегрирования и наличии разрывов в большом числе точек расчётной сетки. Для подобных случаев удобна разностная модификация метода. Изложим её на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega'' = -p \quad (1.4.1)$$

Численное решение уравнения рассмотрим на равномерной сетке с шагом  $h$ , полагая, что в чётных точках сетки функция  $\omega$  вместе со своими первыми двумя производными, а также  $p$  и её первая производная претерпевают конечные разрывы. Поскольку на участках между чётными точками сетки разрывов

нет, для определения первых производных функции  $\omega$  воспользуемся матричной формулой численного дифференцирования гладких функций, запишем её для участка 2-3-4 (рис.11)

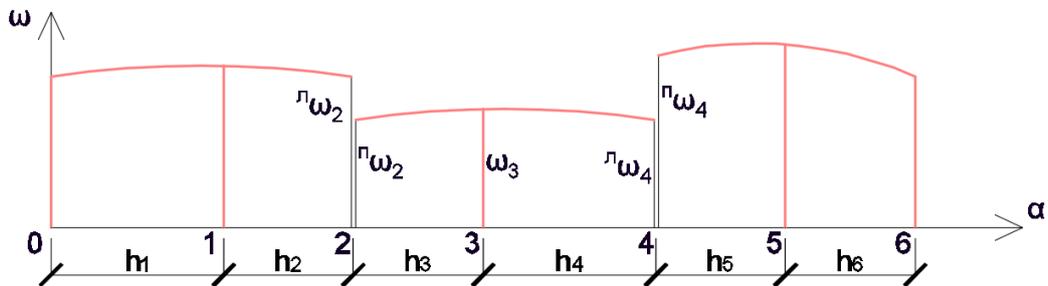


Рис.11. Функция с разрывами

$$\{\omega'\} = \{d\}^n \omega'_2 + \frac{1}{h} [D]\{\omega\} \quad (1.4.2)$$

где  $D$  – матрица дифференцирования Александрова, при  $n=2$  имеет вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1,25 & 1 & 0,25 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.4.3)$$

$$\{d\} = [1 \quad -0,5 \quad 1]^T \quad (1.4.4)$$

$$\{\omega\} = [{}^n\omega_2 \quad \omega_3 \quad {}^л\omega_4]^T \quad (1.4.5)$$

$$\{\omega'\} = [{}^n\omega'_2 \quad \omega'_3 \quad {}^л\omega'_4]^T \quad (1.4.6)$$

Здесь  $T$  означает транспонирование; верхние левые индексы  $n$  и  $л$  определяют значения  $\omega$  и  $\omega'$  справа и слева от точки разрыва. Для вычисления  $\omega''$  метод последовательных аппроксимаций позволяет воспользоваться формулой (2) с заменой  $\omega'$ ,  $\omega$  соответственно на  $\omega''$ ,  $\omega'$ :

$$\{\omega''\} = \{d\} {}^n\omega_2 + \frac{1}{h} [D]\{\omega'\} \quad (1.4.7)$$

$$\{\omega''\} = [{}^n\omega''_2 \quad \omega''_3 \quad {}^л\omega''_4]^T \quad (1.4.8)$$

Подставляя правую часть (1.4.2) в (1.4.7),  $\omega''$  выражаем через  $\omega$ . Далее (1.4.1) записывается в дискретной форме для расчетных точек. Например, для точки 3 будем иметь

$$-\frac{1}{2} {}^n\omega''_2 - \frac{3}{2h} {}^n\omega'_2 - \frac{3}{4h^2} {}^n\omega_2 + \frac{3}{4h^2} {}^l\omega_4 = -P_3 \quad (1.4.9)$$

Если  $P_3$  выразить через  ${}^n P_2$ ,  ${}^l P_4$ ,  ${}^n P'_2$ , где  $P' = \frac{dP}{dx}$  по квадратной параболе, в уравнение (1.4.9) будут входить  $\omega$  и  $P$  вместе со своими производными только в чётных точках сетки. Это позволяет записать (1.4.9) для произвольной точки  $i$  при  $h=h/2$ , учитывая, что  ${}^n\omega''_2 = {}^n\omega''_i = -{}^n P_i$ :

$$-h {}^n\omega'_i - {}^n\omega_i + {}^l\omega_{i+1} = -\frac{h^3}{12} {}^n P'_i - \frac{h^2}{12} (5 {}^n P_i + {}^l P_{i+1}) \quad (1.4.10)$$

Записывая уравнение типа (1.4.10) для точки  $i$  слева и суммируя его с (1.4.10), получим разностное уравнение МПА (верхний левый индекс сохранен лишь для величин в точке  $i$ ):

$$\begin{aligned} \omega_{i-1} - 2 {}^l\omega_i + \omega_{i+1} + \Delta\omega_i + h\Delta\omega'_i \\ = \frac{5}{12} h^2 \Delta P_i + \frac{h^3}{12} \Delta P'_i \\ - \frac{h^2}{12} (P_{i-1} + 10 {}^l P_i + P_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Где

$$\Delta\omega_i = {}^l\omega_i - {}^n\omega_i, \Delta\omega'_i = {}^l\omega'_i - {}^n\omega'_i$$

$$\Delta P_i = {}^l P_i - {}^n P_i, \Delta P'_i = {}^l P'_i - {}^n P'_i$$

При действии сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов и равномерно распределенных нагрузок уравнение (1.4.11) для балок кусочно-постоянного сечения дает точный результат при любом числе разбиений. Следует лишь иметь в виду, что точки разрывов и опорные точки должны совпадать с расчетными точками сетки. Удобство использования (1.4.11) в том, что

сосредоточенные воздействия учитываются этим уравнением непосредственно и не требуют специального сгущения сетки.

Разностные уравнения МПА.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = -P \quad (1.4.12)$$

Область интегрирования уравнений (1.4.12) с нанесенной сеткой криволинейных координатных линий разбивается на подобласти или элементы I, II, III, IV. На рис.12 границы между элементами показаны жирными линиями.

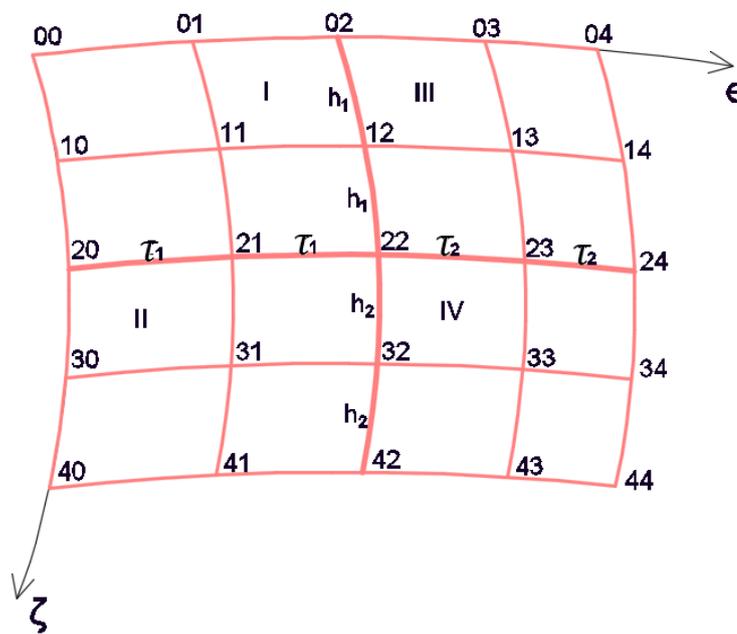


Рис.12. Сетка криволинейных координатных линий с подобластями и элементами

Полагаем, что коэффициенты  $\alpha, \delta, \beta, \sigma, \gamma$  в пределах рассматриваемой области постоянны, а правая часть (1.4.12) в пределах каждого элемента непрерывна, но на границах элементов вместе со своими первыми производными претерпевает разрыв I рода. Аналогичные допущения принимаются в отношении искомой функции  $\omega$ , а также её первых и вторых производных.

Уравнение (1.4.12) для расчётных точек элемента I записывается в матричной форме

$$\alpha[\omega^{\xi\xi}] + \delta[\omega^\xi] + \beta[\omega^{\xi\eta}] + \sigma[\omega^\eta] + \gamma[\omega^{\eta\eta}] = [-P] \quad (1.4.13)$$

где

$$\omega^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}; \omega^\xi = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}; \omega^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}; \omega^\eta = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}; \omega^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}.$$

С учётом формулы (1.4.2), записанной применительно к элементу I при  $n=2$ , получим

$$[\omega^\xi] = \{d\} [\omega_{oj}^\xi] + \frac{1}{h_1} [D][\omega] \quad (1.4.14)$$

С заменой  $\omega^\xi, \omega$  соответственно на  $\omega^{\xi\xi}, \omega^\xi$  из (1.4.14) следует

$$[\omega^{\xi\xi}] = \{d\} [\omega_{oj}^{\xi\xi}] + \frac{1}{h_1} [D][\omega^\xi] \quad (1.4.15)$$

Подставляя правую часть (1.4.14) в (1.4.15), будем иметь

$$[\omega^{\xi\xi}] = \{d\} [\omega_{oj}^{\xi\xi}] + \frac{1}{h_1} [D]\{d\} [\omega_{oj}^\xi] + \frac{1}{h_1^2} [D^2][\omega] \quad (1.4.16)$$

Где  $[D^2] = [D][D]$ ,  $[D]$  определяется по формуле (1.4.3).

Матричные выражения для  $[\omega^\xi]$  и  $[\omega^{\xi\xi}]$  записываются аналогично (1.4.14) и (1.4.16). Формула (1.4.2) позволяет выразить через  $\omega$  также смешанную производную. При подстановке (1.4.14), (1.4.16), а также выражений для  $[\omega^\eta]; [\omega^{\eta\eta}]; [\omega^{\xi\eta}]$  из (1.4.13) следует 9 алгебраических уравнений. Исключая из них  $\omega_{01}^{\xi\xi}, \omega_{02}^{\xi\xi}, \omega_{10}^{\eta\eta}, \omega_{20}^{\eta\eta}$  и  $\alpha\omega_{00}^{\xi\xi} + \beta\omega_{00}^{\xi\eta} + \gamma\omega_{00}^{\eta\eta}$ , получим 4 уравнения, которые можно использовать для определения  $\omega_{11}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{00}$ , если положить остальные величины заданными. Построив в пределах в элементе I поверхность II порядка со значениями  $\omega_{00}^{\xi\eta}, \omega_{00}^\xi, \omega_{02}^\xi, \omega_{00}^\eta, \omega_{20}^\eta, \omega_{00}, \omega_{02}, \omega_{20}, \omega_{22}$ , из последнего из упомянутых выше четырех уравнений исключаем  $\omega$  и  $P$  с нечётными индексами; для исключения  $P$  достаточно в уравнении поверхности  $\omega$  заменить на  $P$ . Преобразованное таким образом уравнение с учётом  $r_1 = r_{i+1}/2, h_1 = h_{i+1}/2$  записываем для точки  $ij$  элемента IV (рис. 13).

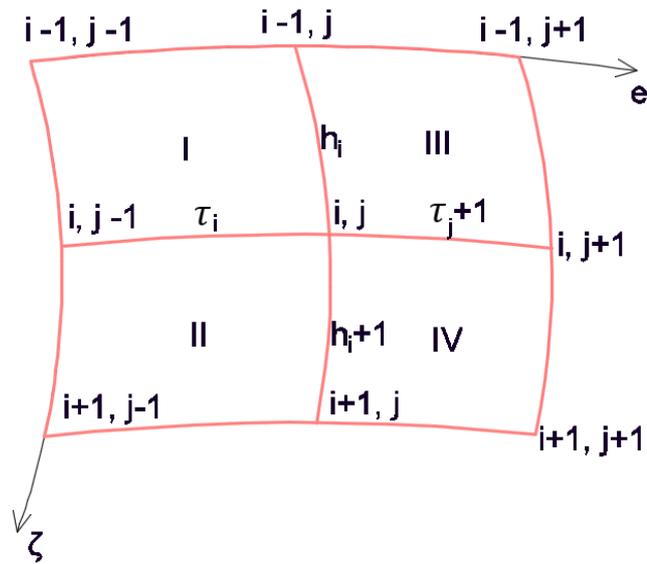


Рис.13. Сетка криволинейных координатных линий с подобластями и элементами

Записывая уравнение полученного типа для элемента III и суммируя его с уравнением для элемента IV, получим уравнение для края; суммируя последнее с аналогичным уравнением, записанным для пары элементов I-II, получим разностное уравнение МПА, аппроксимирующее (1.4.12) с учётом разрывов: искомой функции, её первых двух производных, а также правой части дифференциального уравнения (1.4.12) и её первых производных. В символической форме это уравнение может быть представлено так:

$$\Omega(\omega) = P(P), \quad (1.4.17)$$

Где  $\Omega$  – двумерный учитывающий разрывы  $\omega$  и её производных разностный оператор, который зависит от  $\alpha, \delta, \beta, \sigma, \gamma$ , а также шагов равномерной сетки  $h_i, h_{i+1}, \tau_i, \tau_{i+1}$ ; оператор правой части  $P$  зависит лишь от  $h_i, h_{i+1}, \tau_i, \tau_{i+1}$ . Как и в уравнении (1.4.11), алгебраическая сумма коэффициентов при  $\omega$  в (1.4.17) равняется нулю.

Если в (1.4.17) положить  $\alpha = \gamma = 1; \delta = \sigma = 0; \beta = -2 \cos y; P = p \sin^2 y$ , получим разностную аппроксимацию по МПА уравнения Пуассона в косоугольных координатах. При  $\alpha = 1, \delta = \frac{1}{\rho}; \beta = \sigma = 0; \gamma = 1$  уравнение (1.4.17) аппроксимирует уравнение Пуассона в полярных координатах. Для аппроксимации уравнения Пуассона в прямоугольных координатах достаточно в уравнении

(1.4.17) положить  $\alpha = \gamma = 1$ ;  $\delta = \beta = \sigma = 0$ . При отсутствии разрывов и равномерной сетке левая часть этого уравнения совпадает с левой частью уравнения МКР повышенной точности А.А.Самарского, а при квадратной сетке – с левой частью уравнения Ш.Е.Микеладзе, имеющего несколько вариантов непрерывной правой части. На имеющих известные решения задачах можно показать, что правая часть (1.4.17) приводит к результатам бóльшей точности по сравнению с вышеупомянутыми уравнениями других авторов. При  $\alpha = \gamma = 1, \delta = \beta = \sigma = 0$ , при отсутствии всех видов разрывов в квадратной сетке из (1.4.17) как частный случай следует уравнение Л.Коллетца, аппроксимирующее уравнение Пуассона в квадратных координатах. При  $\alpha = \delta = \beta = 0; w = w(r); p = p(r)$  из (1.4.17) получаем разностное уравнение МПА для одномерной задачи:

$$\bar{\Omega}(\omega) = \bar{P}(P), \quad (1.4.18)$$

где  $\bar{\Omega}$  – разностный оператор, зависящий от  $\delta, \gamma, \tau_j$  и  $\tau_{j+1}$ ; оператор правой части  $\bar{P}$  зависит лишь от  $\tau_j$  и  $\tau_{j+1}$ . При  $\delta = 0; \gamma = 1, \tau_j = \tau_{j+1} = h$  как частный случай следует (1.4.11).

С использованием (1.4.17) можно также аппроксимировать дифференциальное уравнение вида:

$$\sum_{i=1}^n \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = -P; \quad (1.4.19)$$

левая часть уравнения (1.4.17) является общим разностным оператором МПА.

Если при вводе пользоваться формулой численного интегрирования, разностное уравнение, аппроксимирующее (1.4.12) при  $\delta = \beta = \sigma = 0$ , можно получить относительно  $w^{\xi\xi}$  (или  $w^{\eta\eta}$ ). Это уравнение позволяет строить простые алгоритмы решения некоторых классов задач.

Обобщение уравнений метода конечных разностей. Здесь последовательная аппроксимация не используется. Дифференцирование построенного в главе 2 уравнения поверхности II порядка определяет вторые производные  $w$ , что позволяет записать дифференциальное уравнение (1.4.12) в дискретной форме для

точки  $ij$  элемента IV (рис.13). Это уравнение зависит не только от  $w$ , но и производных функции  $w$ , а именно  ${}^{II}w^\xi$ ,  ${}^{III}w^\eta$ ,  ${}^{IV}w^{\xi\eta}$ . При суммировании этих двух уравнений величины упомянутых выше производных, пользуясь уравнениями построенных в пределах каждого элемента поверхностей второго порядка, можно выразить  $w$  и разрывы производных, которые считаются заданными (или заданы некоторые дополнительные условия для определения). Например,  $w^\xi$  выражается через  $w$  и  $\Delta w^\xi, \Delta w^{\xi\eta}$ . Так исключение производных при стыковке элементов в ходе вывода уравнений приводит к появлению разрывов производных.

1.

## **РАЗДЕЛ 2. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ПРИ РАСЧЕТАХ В ПК**

### **2.1 ОСНОВЫ РАСЧЕТА С ПОМОЩЬЮ ПК**

#### **2.1.1. Введение**

Компьютерные технологии в последние годы развиваются очень интенсивно, в том числе и в области строительства. Существующие программные комплексы (ПК) регулярно обновляются, выпускаются дополнения, уточнения, создаются и новые программы. Широкое распространение в России имеют не только зарубежные ПК, но и отечественные.

Выбор программных комплексов для проектирования и расчета сооружений поистине велик, и некоторые задачи требуют одновременного использования двух, трёх и более ПК, которые используются последовательно или одновременно. При последовательном использовании геометрия объекта создается в первом ПК, затем полученная расчетная схема импортируется во второй ПК, сопряженный с первым, где производится расчет на прочность, жесткость, устойчивость, деформативность. По подобранным сечениям редактируется геометрия в первом ПК и выпускается проектная документация. Под одновременным использованием подразумеваются расчеты в разных ПК с целью проверки данных. Хотя большинство из программ основано на одном и том же методе расчета, ПК разных классов могут давать немного разные результаты.

На этапе знакомства с ПК для расчета сооружений студенту важно не только изучить интерфейс программы, но и провести достаточное количество сопоставительных расчетов в ПК и аналитическими методами (классическими методами Строительной механики) для понимания принципа работы программы и осознания в целом, что необходимо получить из расчета в ПК. Дело в том, что при расчете конструкции на компьютере очень легко

допустить ошибки, а проверок, как в аналитических методах, здесь не существует. Поэтому опытный инженер, создавая расчетную схему, задавая нагрузки и отправляя задачу на расчет, заранее предполагает, какой получится результат.

Таким образом, данные методические указания призваны не только познакомить читателя с разнообразием ПК, используемых в строительстве, но и помочь освоить предлагаемый авторами ПК для расчета конструкций на базе сопоставительных расчетов нескольких простых схем непосредственно в ПК и аналитическими методами классической Строительной механики.

В данном пособии приводятся так же краткие сведения из методов для аналитических расчетов: метода конечных элементов и метода конечных разностей. Большинство современных ПК основаны на первом методе, однако второй метод так же заслуживает внимания как достаточно быстрый и удобный метод расчета.

### **2.1.2. Обзор программных комплексов, используемых в проектировании и расчете сооружений**

Развитие компьютерных технологий, в частности, появление персональных компьютеров, способствовало тому разнообразию ПК, которое мы можем наблюдать сегодня. И если еще 1980-е годы инженеры чертили на кульманах<sup>1</sup> и производили расчеты на микрокалькуляторах, то в начале 2000-х ПК появились во всех проектных организациях, а также их основы стали преподавать в университетах. Понятие «программный комплекс» сменилось более широким понятием «пакет прикладных программ», который включает в себя комплекс программ и программных модулей для решения задач конкретной предметной области.

---

<sup>1</sup> Кульман – чертежный прибор, представляющий собой доску, закрепленную вертикально или под небольшим углом, к которой крепился лист бумаги и устанавливались линейки, которые могли скользить вдоль листа подобно рейсшине.

Все ПК, используемые в строительстве, или Системы автоматизированного проектирования (САПР), можно условно разделить на две группы:

- программы для проектирования сооружений, которые позволяют создать геометрический вид объекта в пространстве и, в некоторых случаях, провести несложные расчеты на прочность, а также осуществить экспорт геометрической схемы в ПК для полноценного расчета на прочность, устойчивость и т.п. К программам для проектирования сооружений относятся зарубежные AutoCAD, Revit Structure, отечественные Мономах, Сапфир, Компас и др. Отдельно стоит отметить технологию BIM-моделирования, (от англ. building information modeling - информационное моделирование зданий и сооружений), реализованную в Autodesk Revit Structure. Данный ПК дает возможность совместной работы всем инженерам, участвующим в изыскании, осуществлять одновременный доступ к модели проектируемого объекта строительства. Проведение расчетов осуществляется в Autodesk Robot Structural, после чего исходная модель в Autodesk Revit Structure может быть автоматически обновлена с учетом полученных результатов для дальнейшей работы с проектом.

- программы для расчета сооружений, которые позволяют проводить расчеты на прочность, устойчивость, деформативность, в линейной и нелинейной постановке, на динамические нагрузки и т.п. Данную группу можно разделить на две подгруппы:

- программы для стандартных расчетов в строительстве, такие как Lira, SCAD, Micro FE, STARK ES, Autodesk Robot Structural. Эти программы позволяют проводить любые прочностные расчеты стержневых, пластинчатых, объемных элементов из любых материалов в линейной и нелинейной постановке, подбирать арматуру из условий прочности и деформативности, учитывать любые динамические нагрузки, а также ветровые и сейсмические нагрузки по нормативам разных стран, имеют связи с графическими программами и текстовыми редакторами.

В докомпьютерный период для расчета стержневых элементов использовались методы строительной механики, основанные на методе сил и методе перемещений, для пластинчатых – методы теории упругости, а также метод стержневых аппроксимаций. Расчеты осложнялись необходимостью решать системы уравнений очень большого порядка, также имел место двойственный, противоречивый подход к конструкциям. Появление метода конечных элементов (МКЭ) в середине 60-х годов прошлого века позволило решить вышеописанные проблемы. На его основе, во главе с инженером Городецким А.С., в Киеве была создана группа программ, которая в дальнейшем получила название ЛИРА.

В России массовое внедрение программных комплексов семейства Лиры началось в 90-е годы (с момента появления персональных компьютеров). В настоящее время семейство программ ЛИРА-САПР представлено следующими основными программами, сопряженными друг с другом: ПК ЛИРА-САПР (расчет строительных и машиностроительных конструкций); ПК Мономах (проектирование и расчета железобетонных и армокаменных конструкций); ЭСПРИ 2013 (Электронный Справочник Инженера); САПФИР 2013 (автоматизация архитектурной части проекта).

В середине 90-х годов часть разработчиков ЛИРА ушла из компании и создала программу SCAD. На сегодняшний день вычислительный комплекс SCAD является универсальной расчетной системой конечноэлементного анализа и имеет целый ряд вспомогательных программ. Формирование и расчет геометрических характеристик различного вида сечений проводится в программах Конструктор сечений, КОНСУЛ, ТОНУС, СЕЗАМ, определение нагрузок и воздействий на здания и сооружения – в программе ВЕСТ, определение коэффициента запаса устойчивости откосов и склонов – в программе ОТКОС, вычисление коэффициентов постели для расчета на упругом основании – КРОСС, импорт данных из архитектурных систем – препроцессор

ФОРУМ. Частные задачи проверки и расчета стальных, каменных, деревянных и железобетонных конструкций по СП выполняются в программах КРИСТАЛЛ, КАМИН, ДЕКОР, ЗАПРОС, АРБАТ. Проектно-конструкторские программы КОМЕТА и МОНОЛИТ.

Российско-немецкий ПК Stark ES в 2003 году распался на два комплекса: MicroFe (развивается немецкой фирмой mb AES и их партнерами "Техсофт") и, непосредственно, STARK ES (развивается российской компанией "ЕВРОСОФТ").

Robot Structures, вышедший в 1985 году в США, стал первой коммерческой версией решения компании Robobat. Спустя шесть лет следующая версия Robot Structures поставлялась уже в 40 стран мира. С каждой новой версией программа делала шаг вперед как в функциональности, так и в удобстве использования. Всё это в 2008 году привело к тому, что права на программу приобрел всемирно известный лидер в области САПР — компания Autodesk. Тогда она получила название Autodesk Robot Structural Analysis и стала важным звеном комплексного BIM-решения Autodesk.

Таким образом, были перечислены основные и наиболее распространенные в отечественной практике расчета зданий и сооружений программы. Их возможности примерно одинаковы, и выбор между ними определяется, во-первых, удобством инженера, во-вторых, фактом приобретения лицензионного программного обеспечения организацией, где работает инженер.

- программы для научных изысканий, с более сложным интерфейсом, но и с более широким кругом решаемых задач, такие как зарубежные NAS-TRAN MSC, ANSYS, Abaqus, Plaxis и др. Данные программы выполняют все задачи из предыдущего пункта за исключением использования нормативных документов, но также имеют дополнительные возможности.

ПК Ansys создавался для решения задач теплопередачи и прочности в линейной постановке в конце 60х годов в США. На сегодняшний день это

целая программная система, объединяющая в себе следующие модули: конструкционный(прочностной) и термический анализ (ANSYS Structural/Mechanical), электромагнитный анализ (ANSYS Emag), гидро-газодинамический анализ (ANSYS CFD: CFX, Fluent), акустика, оптика и другие.

ПК Nastran был создан в 60е годы по заказу агентства NASA (США) для поддержки космических исследований. На сегодняшний день это мощная система для прочностного анализа для строительных и машиностроительных нужд, имеет модули Thermal (решение задач теплообмена: теплопроводность, излучение, конвекция) и Flow ( численного моделирования процессов гидрогазодинамики и тепломассообмена на основе решения уравнений Навье-Стокса в стационарной и нестационарной постановках).

ПК Abaqus также ориентирован на прочностные расчеты конструкций, задачи гидродинамики (CFD), теплопередачи, электромагнетизма (Electromagnit) и акустики, создан в конце 70х в США.

Основное направление работы в ПК Plaxis – геотехнические расчеты. Программа «выросла» из разработок нидерландского ученого, проектировавшего защитное оградительное сооружение реки Шельда, которое спасло бы Нидерланды от наводнений. Его разработки привели в конце 70х годов к созданию программы ELPLAST на языке FORTRAN-IV, определяющий несущую способность упругопластичных грунтов. Затем появилась необходимость разработки на основе ELPLAST решения для осесимметричных задач, и новая программа была названа PLAXIS (PLasticity AXISsymmetry).

Таким образом, мы рассмотрели основные ПК, используемые в строительстве при проектировании и расчете сооружений. Для успешной работы инженеру необходимо иметь в «арсенале» 2-3 ПК для проведения сопоставительных расчетов в особенно сложных случаях.

### 2.1.3. Интерфейс программного комплекса Scad office

Название программного комплекса для расчета сооружений Scad Office (рис. 2.1) расшифровывается как Structure CAD, где CAD – computer aided design.



Рис. 2.1. ПК SCAD Office

При открытии программы появляется окно оздания нового проекта (рис. 2.2), где пользователь задаёт следующие параметры:

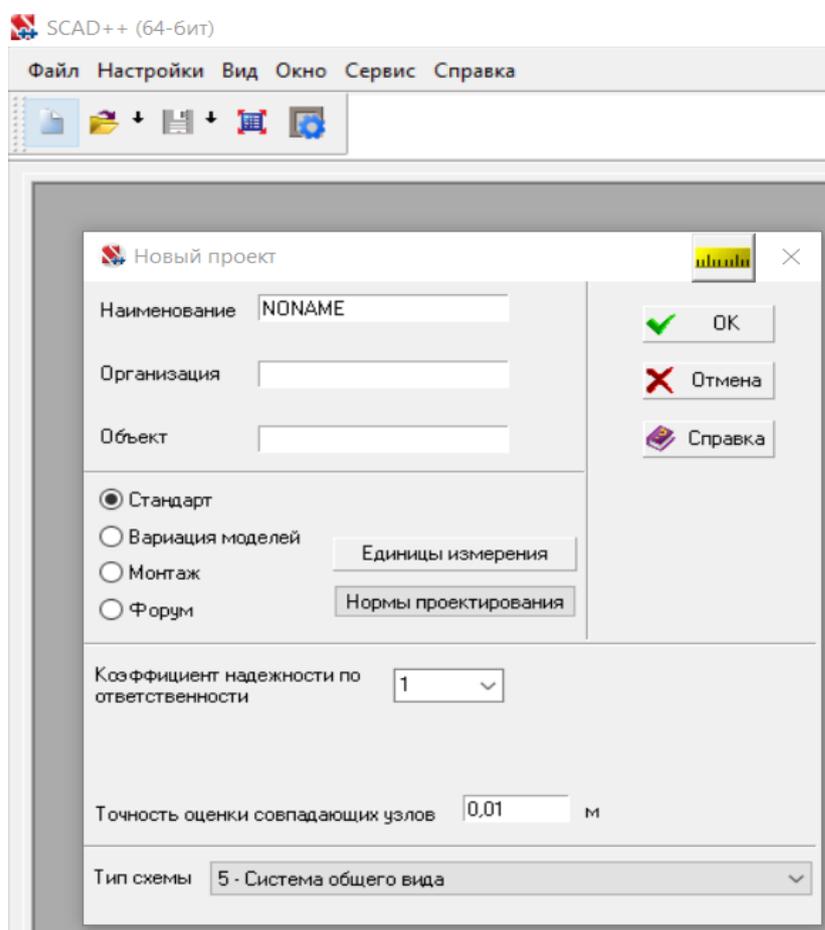


Рис. 2.2. Окно создания проекта

- Название проекта.
- Единицы измерения (размеры по умолчанию представлены в метрах, размеры сечений в сантиметрах, нагрузки в тоннах).

- Нормы проектирования (СП, СНиП или строительные нормы других стран – ДБН или EN) – рис. 2.3.

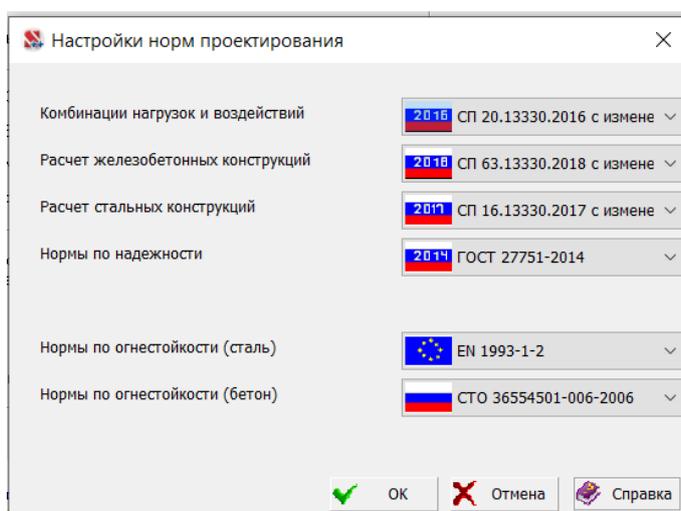


Рис. 2.3. Настройки норм проектирования

- Коэффициент надёжности по ответственности – по умолчанию для обычных учебных проектов принимается равным единице.

- Точность оценки совпадающих узлов – данный параметр следует изменять для решения таких задач, как построение очень мелких узлов и частей конструкций. Для стандартных учебных задач также рекомендуется оставить значение по умолчанию 0,01 м – для программы это команда, что узлы, находящиеся на расстоянии менее этого значения, следует считать единым узлом.

- Тип схемы (рис. 2.4) – один из самых важных параметров. Тип схемы определяет состав и максимальное количество степеней свободы в узлах расчетной схемы и характеризует особенности её напряжённо-деформированного состояния. При некорректном выборе типа схемы всю задачу придётся начинать сначала. Из приведённых на рисунке 4 рассмотрим подробно следующие типы:

- 1 - Плоская шарнирно-стержневая система (этот тип используется для задания плоских ферм);

- 2 – Плоская рама;

- 4 – Пространственная шарнирно-стержневая система –  
пространственная ферма;
- 5 – Система общего вида – пространственная рама.

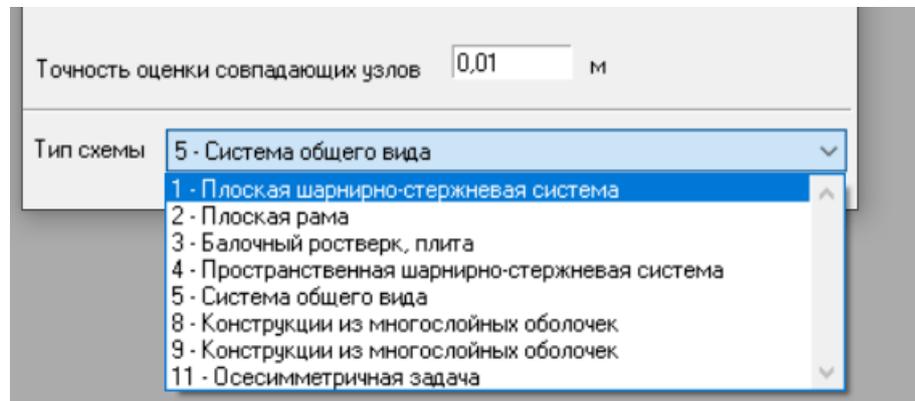


Рис. 2.4. Выбор типа схемы.

Ошибка на данном этапе может привести к тому, что, например, выбрана плоская ферма, а считать собрались пространственную раму. Тогда программа не позволит вам задать координаты узлов по третьему направлению, а все узлы по умолчанию сделает шарнирными.

Когда тип схемы выбран, мы попадаем в окно управления проектом (рис. 2.5).

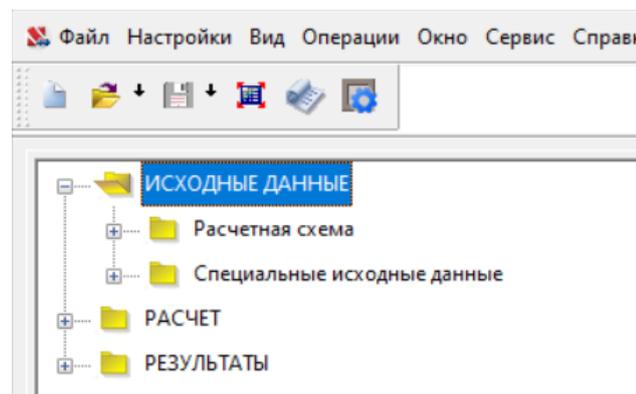
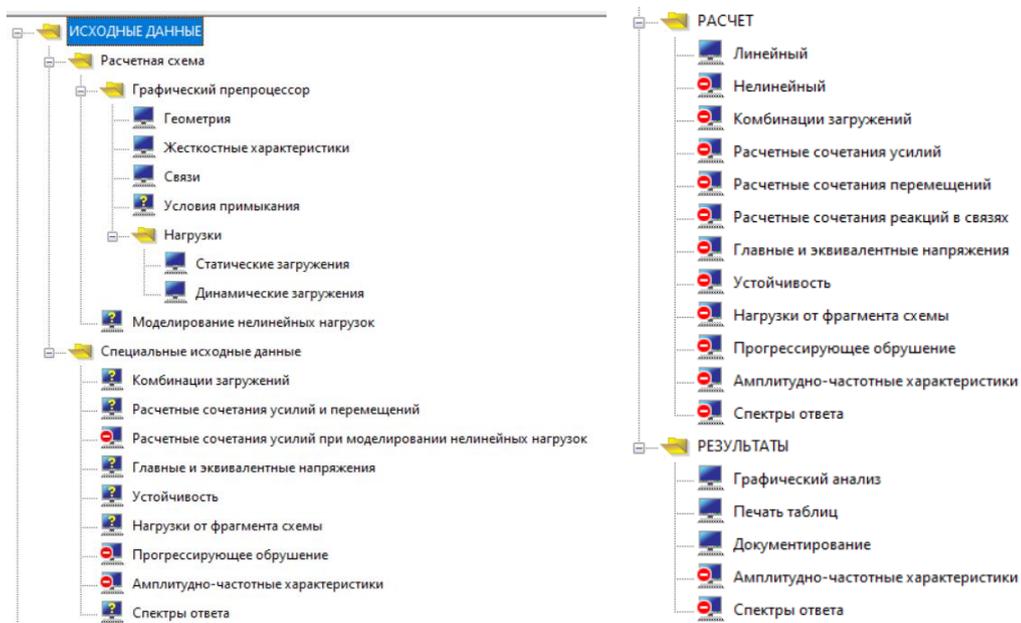


Рис. 2.5. Окно управления проектом.

Окно управления проектом по сути отражает алгоритм решения задачи, который состоит из следующих шагов:

- Препроцессор (Исходные данные) (рис.2.6, а) – мы сами задаем геометрию расчетной схемы, жёсткости, связи и назначаем нагрузки.

- Расчет (рис.2.6, б) – система анализирует введенные нами данные, перемножает матрицы (вспоминаем МКЭ) и выдает результат (пока что сама себе).
- Постпроцессор (Результаты) (рис.2.6, б) – система показывает нам результаты расчёты в виде графиков (эпюр) или таблиц.



а)

б)

Рис.2.6. Окно управления проектом

а) исходные данные

б) расчёт и результаты расчета

Для создания расчётной схемы заходим в Исходные данные – вкладки Расчёт и Результаты недоступны для входа, пока не задана расчётная схема.

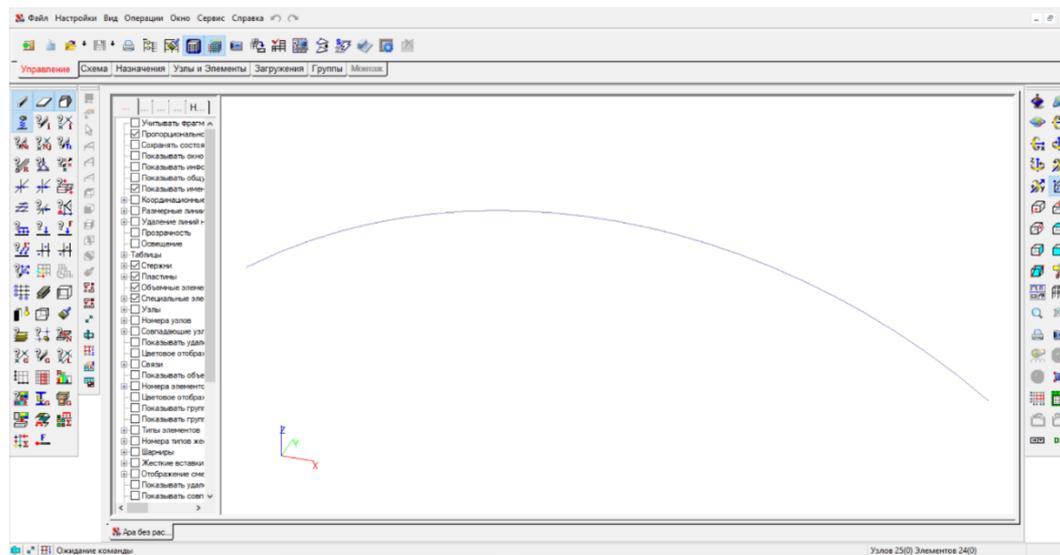


Рис. 2.7. Окно исходных данных

Рассмотрим подробно команды, расположенные на экране. Начнём с панелей, расположенных слева (рис. 2.8, а) и справа (рис. 2.8, б) от рабочего поля.



Рис. 2.8. Панели

а) фильтров,

б) визуализации

На панели фильтров расположена информация об элементах/узлах:

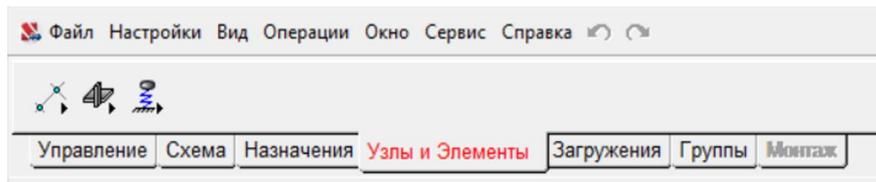
- Номера элементов/узлов
- Связи
- Шарниры
- Нагрузки
- Местные оси, глобальные оси
- Совпадающие узлы
- Отображение групп узлов/элементов

На панели визуализации расположены инструменты для удобства представления схемы:

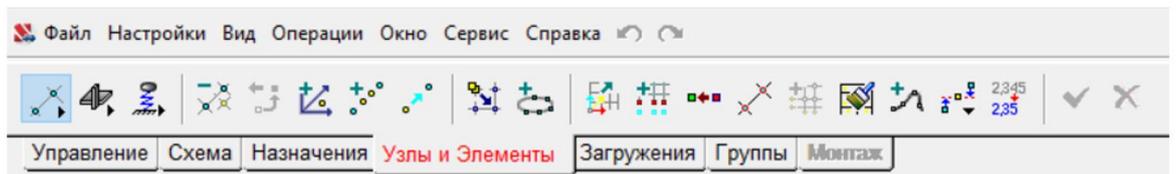
- Поворот вокруг оси

- Вид в пространстве/ плоскости
- Сечение плоскостью
- Фрагментация схемы

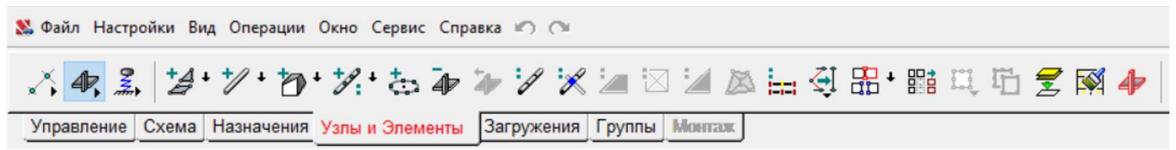
Далее рассмотрим горизонтальную панель, расположенную в верхней части экрана. Создание расчётной схемы в программе начинается с задания узлов и элементов на вкладке Узлы и элементы.



а)



б)



в)

Рис. 2.9. Вкладки

а) Узлы и элементы

б) узлы

в) элементы

Вначале задаются узлы (рис. 2.9, б), которые затем соединяются стержнями или пластинами (рис. 2.9, в).

Жёсткости стержней и пластин, а также опорные связи задаются на вкладке Назначения (рис. 2.10).

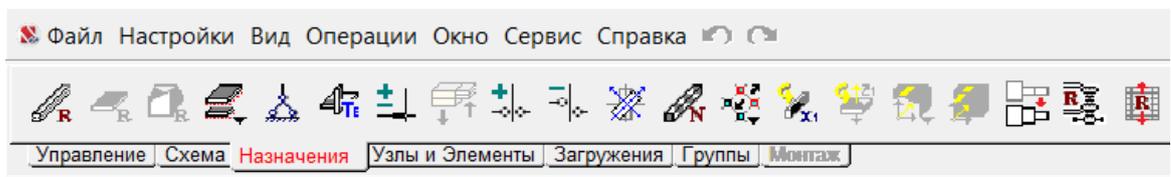


Рис. 2.10. Назначения

Здесь же можно изменить тип элемента, (рис. 2.11) если он не соответствует выбранному типу расчетной схемы. Типы элементов по своей нумерации совпадают с типами схем (рис. 2.4).

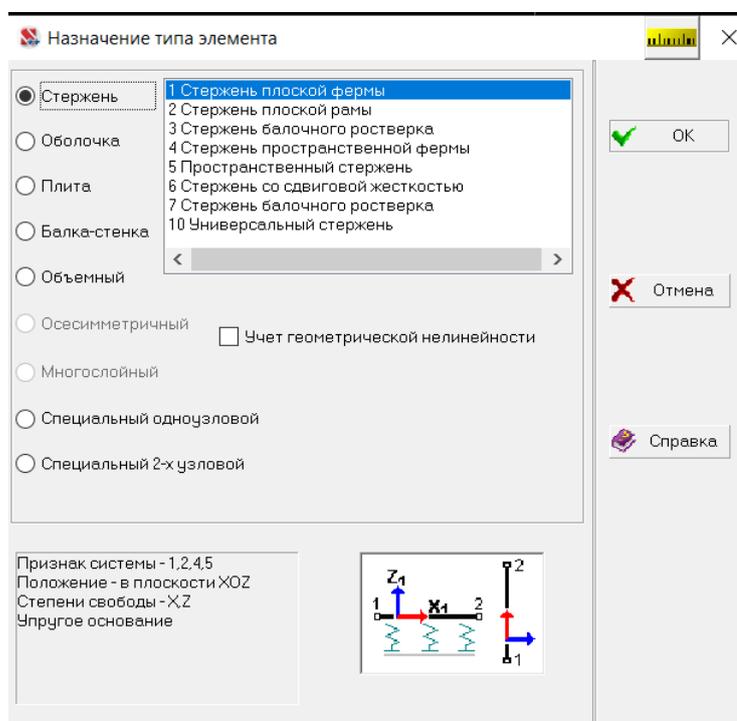


Рис. 2.11. Тип элемента

Вкладка Схема позволяет создавать готовые фермы или поверхности вращения, а также производить действия со схемой: копирование, поворот, масштабирование и т.п.

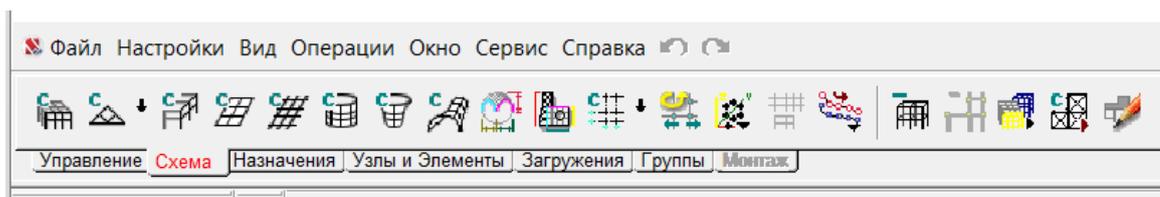


Рис. 2.12. Схема

Очень полезной может оказаться маленькая вкладка внизу слева: она позволяет выбрать элемент или узлы для последующих операций с ними.

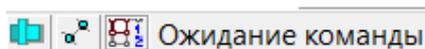


Рис. 2.13. Выбор узлов и элементов

Важное замечание: почти каждое действие в программе необходимо подтвердить нажатием клавиши Enter на клавиатуре или выбора зелёной галочки в верхней части экрана, иначе программа не примет команду к исполнению.



Рис. 2.14. Подтверждение команды

Когда геометрия схемы готова, переходим к заданию нагрузок. Нагрузки задаются во вкладке Загрузки.

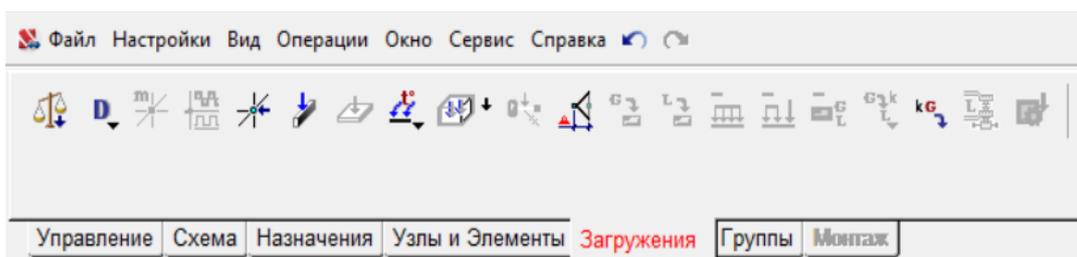


Рис. 2.15. Загрузки

Здесь задаются нагрузки от собственного веса (пиктограмма с весами), динамические воздействия (пиктограмма D), сосредоточенные и распределенные нагрузки, тепловые и кинематические воздействия. Пиктограммы, подсвеченные серым, временно недоступны для выбора, потому что не заданы динамические воздействия для модальных масс, не заданы пластины для задания нагрузок на пластины или не выбрано загрузка для его редактирования.

Во вкладке группы элементы расчётной схемы помечаются как принадлежащие определённым группам. Это необходимо в том случае, когда мы хотим, чтобы программа не просто выдала результаты в виде усилий и перемещений, а произвела проверку на прочность, устойчивость и т.п.

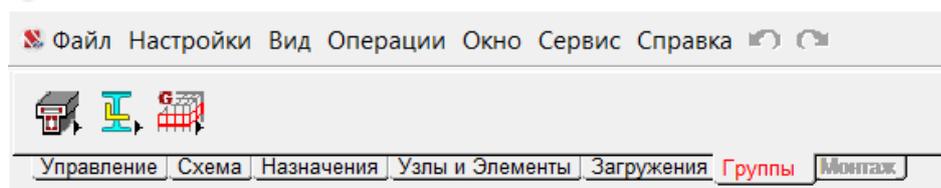


Рис. 2.16. Группы

Вкладка Управление (рис. 2.17) используется для выхода в дерево управления проектом, а также для проверки расчетной схемы. Так, она содержит очень важную команду, называемую Упаковкой данных (рис. 2.18), которая позволяет устранить мелкие ошибки, возникшие при построении схемы.

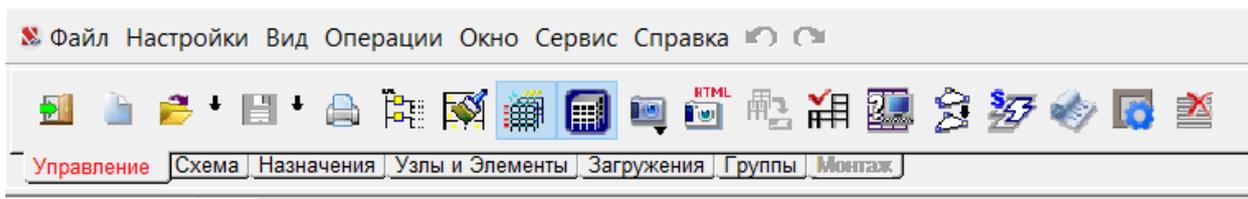


Рис. 2.17. Управление

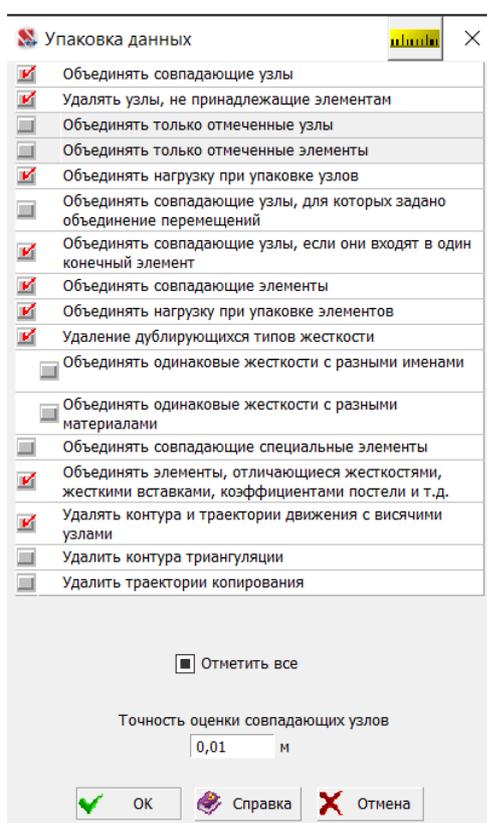


Рис. 2.18. Упаковка данных

Стоит уделить особое внимание способу выделения элементов. Для этого сделаем клик правой кнопкой мыши на свободное пространство рабочего поля, появится вкладка Выбор элементов (рис. 2.19), где можно изменить размер курсора для одиночного выбора

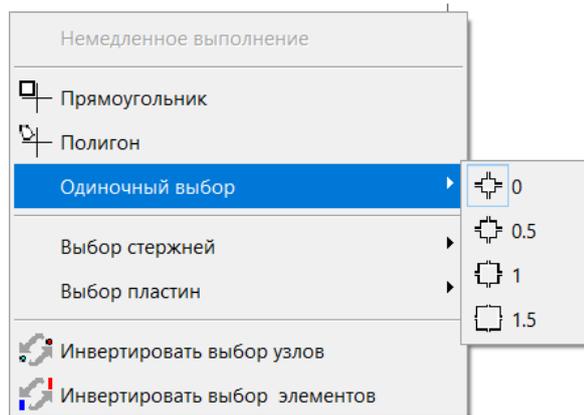


Рис. 2.19. Выбор элементов

Или сразу выбрать несколько стержней (рис. 2.20) или пластин (рис.21), соответствующих определённым требованиям

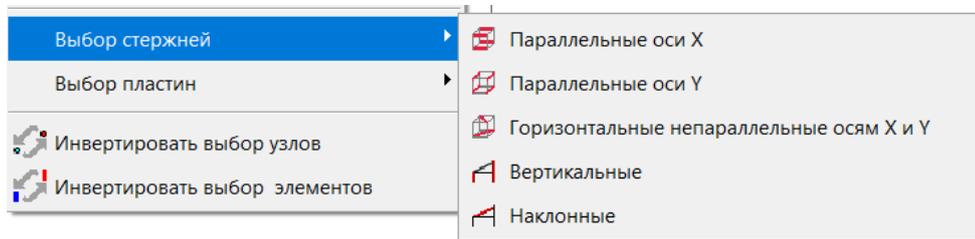


Рис. 2.20. Выбор стержней

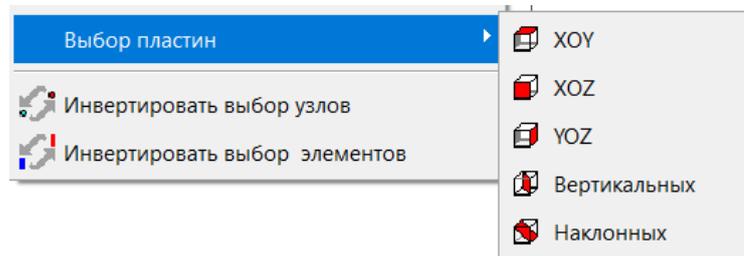


Рис. 2.21. Выбор пластин

Когда расчётная схема готова и проверена (визуально пользователем и самой программой), можно переходить к вкладке расчёт. Расчет для пользователя выглядит так – рисунок 22. Программа раскладывает матрицы и ведёт Протокол расчета, где указывает возможные ошибки расчётной схемы, а также суммарные нагрузки.

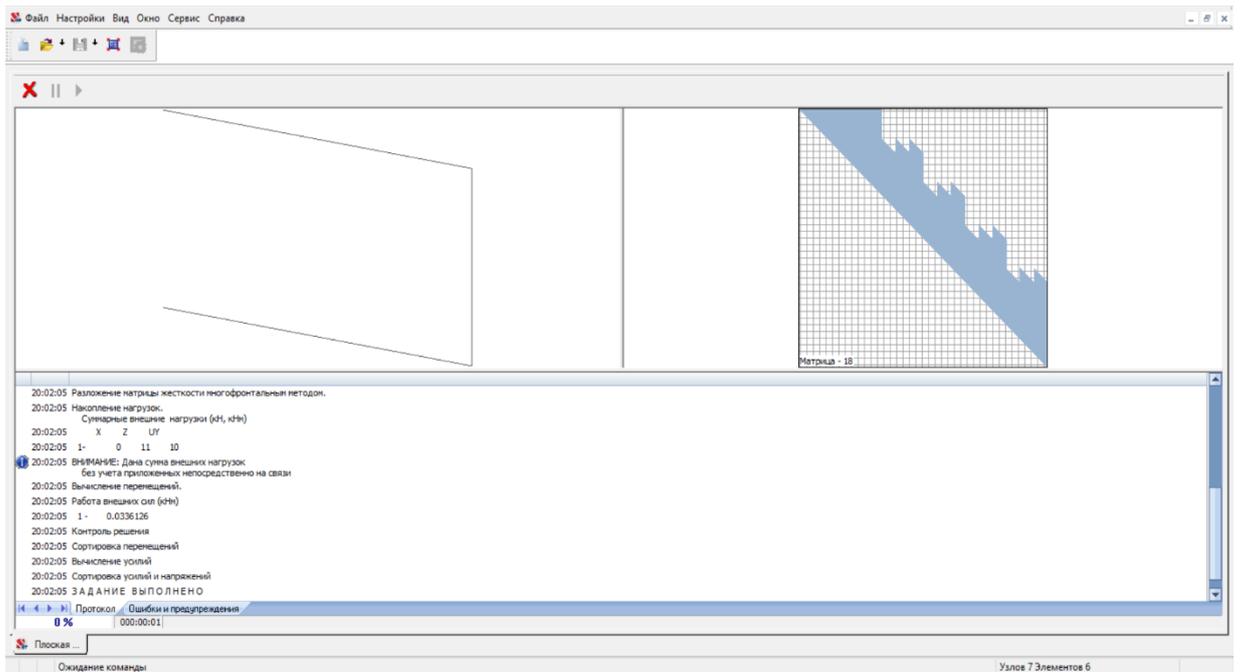


Рис. 2.22. Расчет

По окончании расчёта нажимаем красный крестик в левом верхнем углу экрана (не путать со стандартным крестиком для закрытия программы в верхнем правом углу!) и переходим к результатам расчёта. Здесь снова снова стандартно – Управление и далее идут вкладки, где можем смотреть результаты наших трудов: перемещения и эпюры усилий. Далее расположенные вкладки позволяют получить готовую проверку подобранных сечений элементов.

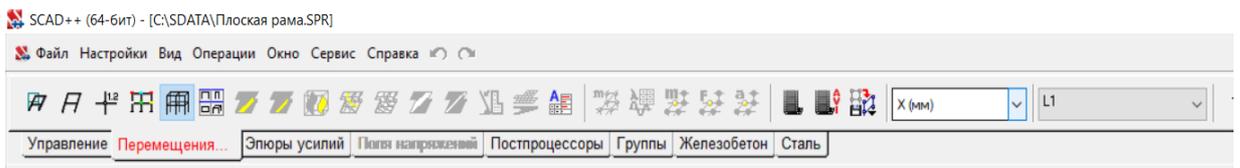


Рис. 2.23. Результаты расчёта.

## 2.6 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Создать расчетную схему в программе можно тремя путями:

- начать с ввода узлов, соединить их элементами, назначить жёсткости и т.п.

- во вкладке Схема выбрать готовую ферму или сетку элементов, максимально подходящую под вашу задачу, создать её и доработать – удалить или добавить некоторые элементы.

- загрузить готовую схему из другой программы (рис.24).

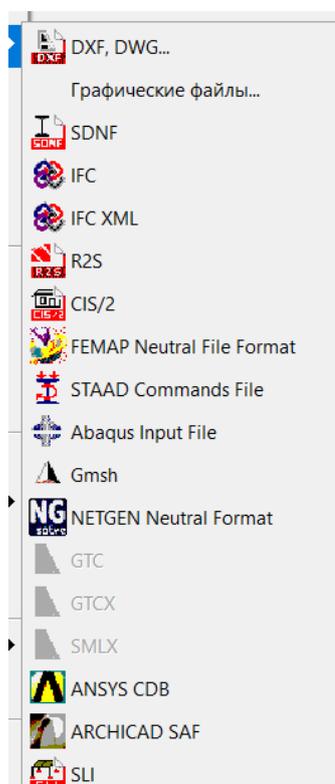


Рис. 2.24. Варианты для импортирования файлов в ПК Scad

И хотя способ под номером три на первый взгляд кажется самым простым, он таит в себе максимальное количество сложностей, так как схему придётся приспособлять под понимание программы SCAD, и это явно не задача для начинающего пользователя программы.

Поэтому построение простых плоских схем будем начинать с ввода узлов по координатам и соединять их элементами (выбран тип схемы Плоская

рама или Плоская шарнирностержневая система). При это SCAD не запрещает ввод узлов в третьем направлении, по оси  $u$ , то есть внутрь экрана (рис.25).

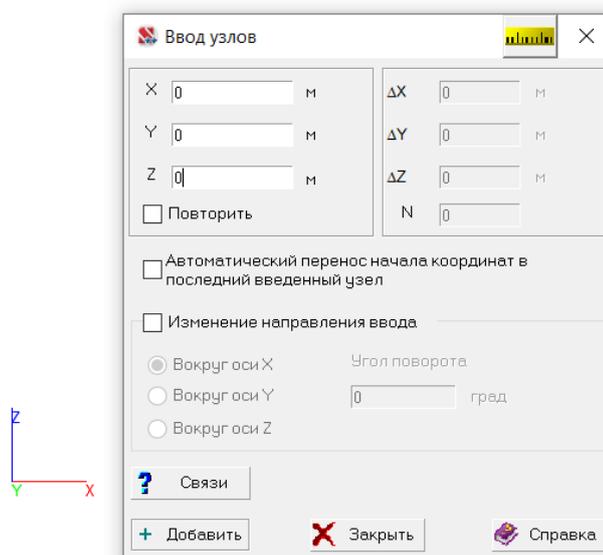


Рис. 2.25. Ввод узлов

Вводим, к примеру, четыре узла по координатам и соединяем их стержнями. Просим программу подсветить номера узлов и элементов, выбрав соответствующую команду в окне фильтров, слева от рабочего поля (рис. 2.26).

Как альтернативу вводу узлов по координатам, можно использовать команду Ввод узлов на расстоянии от отмеченных во вкладке Узлы. Например, введены два нижних узла рамы, верхние узлы введём на заданном расстоянии (рис.27), указав это самое расстояние по вертикали (приращение по оси  $z$ ) и количество узлов (можно ввести два раза через каждые 4 м). Выделим узлы и подтвердим команду нажатием зеленой галочки или клавиши Enter на клавиатуре.

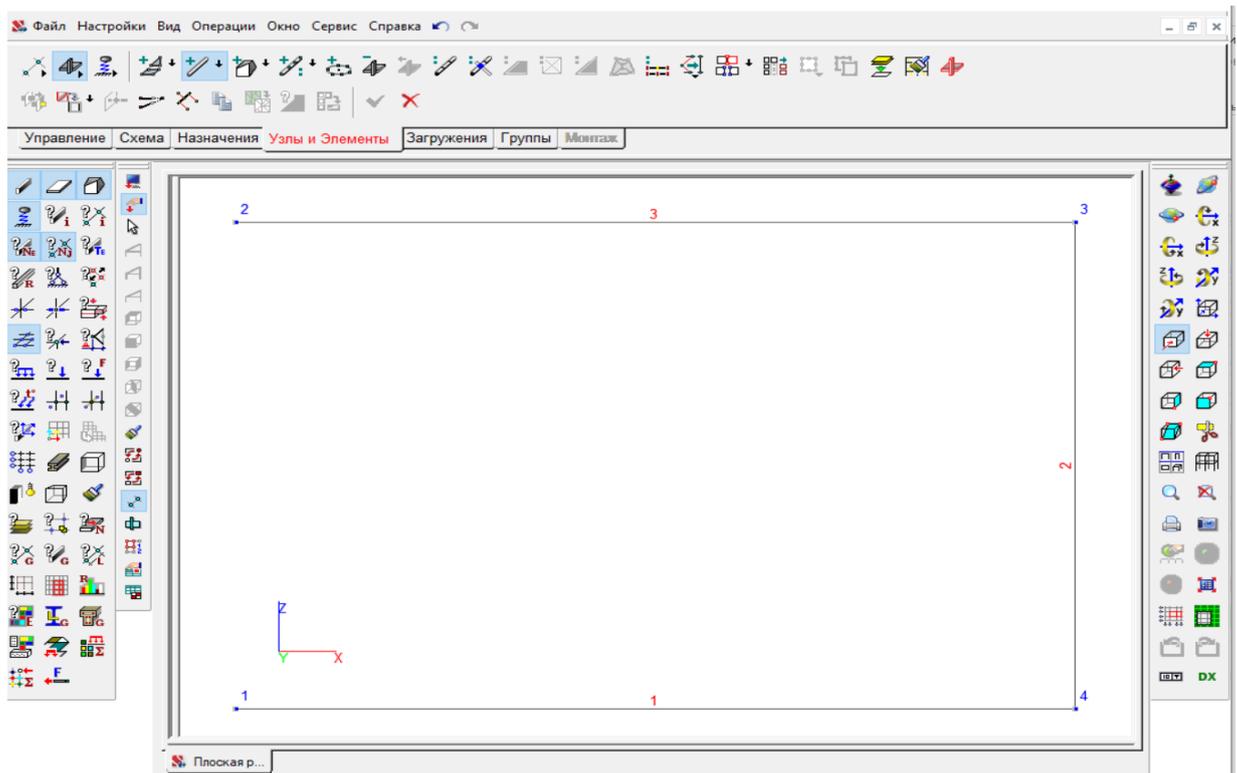
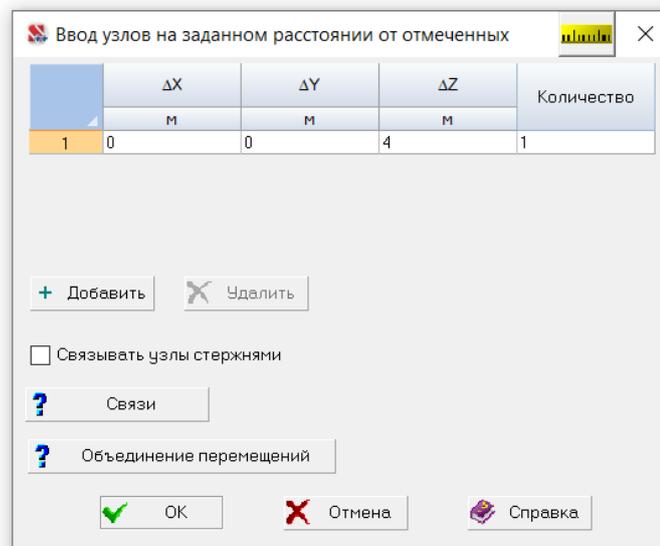


Рис. 2.26. Отображение номеров узлов и элементов



1

2

Рис. 2.27. Ввод узлов на заданном расстоянии от отмеченных

И еще одна альтернатива создания рамы – работа с готовой рамой и редактирование её до «своего» варианта. На вкладке Схема выбираем Генерацию прототипа рамы, открывается окно (рис. 2.28). Вводим свои данные: имеем по одному пролету с расстоянием в 4 м. Можно назначить

жёсткости и поставить опоры на данном этапе. Подтверждаем действие и приступаем к редакции готовой схемы (рис. 2.29, а).

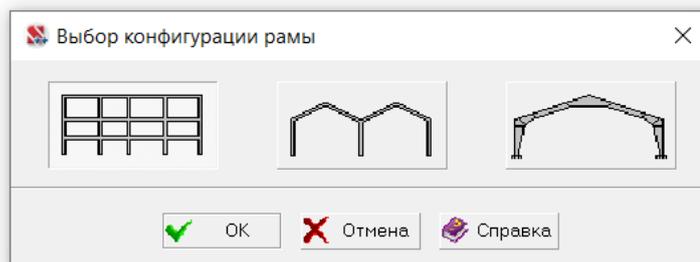


Рис. 2.28. Выбор конфигурации рамы

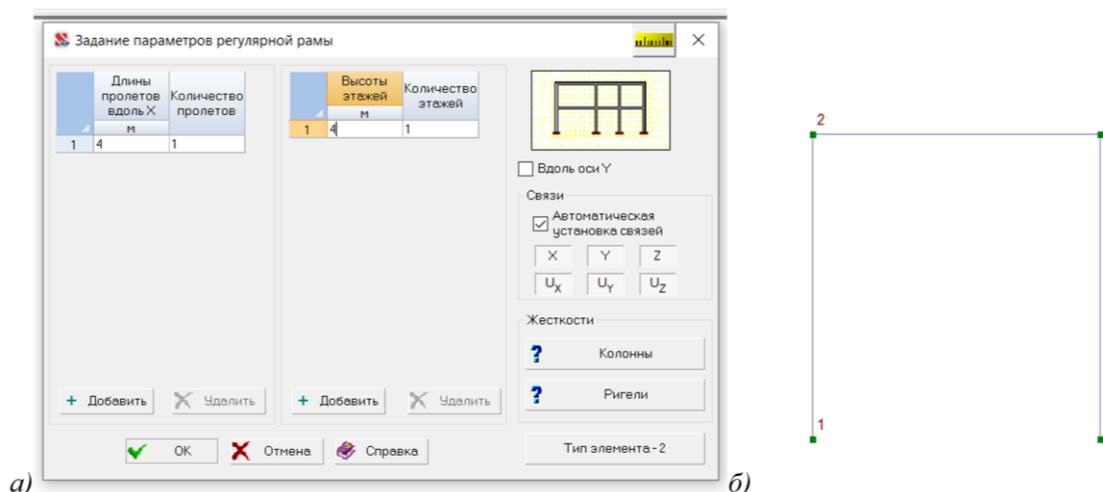


Рис. 2.29. Создание рамы

а) задание параметров рамы

б) готовая к редакции рама

С рамой на рис. 2.29, б) необходимо дополнительно поработать: стержень между узлами 1-2 удалить (команда Удаление стержней на вкладке Элементы), стержень между узлами 1-3 добавить.

Переходим к изучению вкладки Назначения (рис.30).

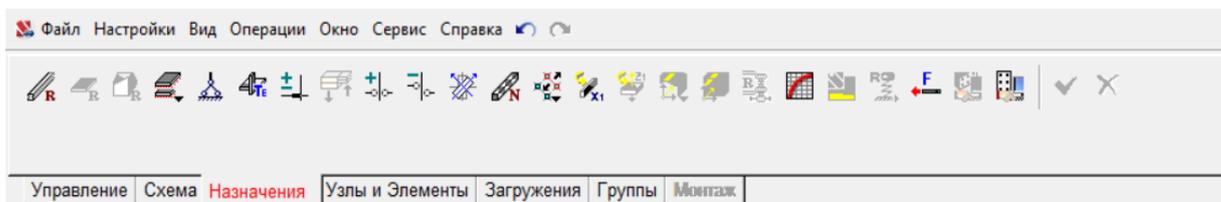


Рис. 2.30. Назначения

Самая первая команда – Назначение жёсткости стержню. Вы помните, что жёсткость можно назначать параллельно с вводом стержней, но можно и

после построения геометрии схемы. Окно назначения жесткостей показано на рисунке 31.

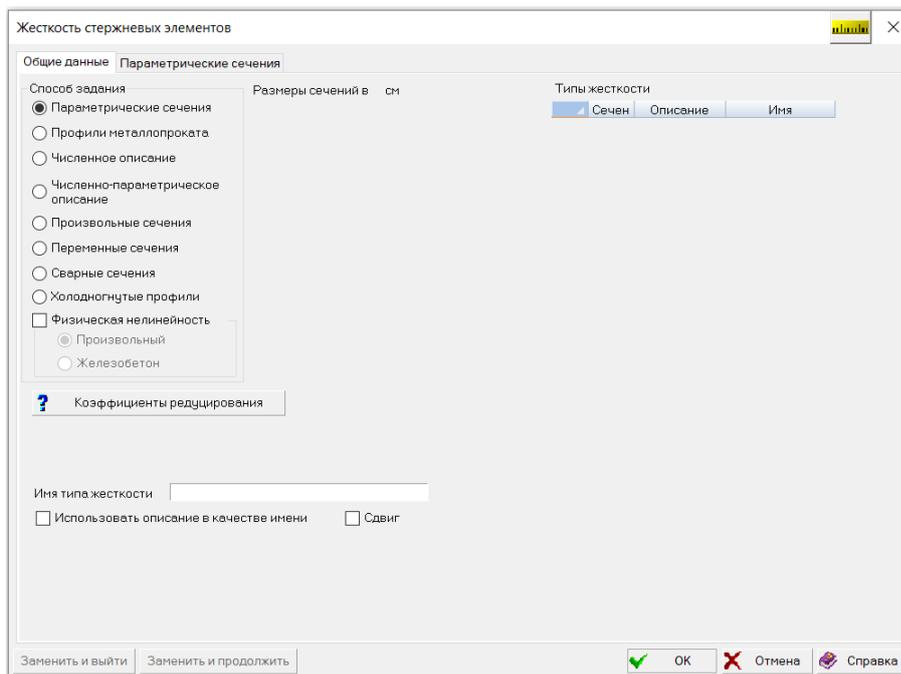


Рис. 2.31. Жёсткость стержневых элементов

Реализованные в программном комплексе задания физико-механических характеристик стержневых элементов позволяют описать их численно, через геометрические характеристики параметрических (типовых) сечений, назначить из выбранного сортамента металлопроката, выполнить численно-параметрическое назначение жёсткости (одновременное задание параметрического сечения и численного описания), а также назначить жесткостные характеристики, используя результаты работы подпрограммы Конструктор сечений. В последней версии программы добавлены Переменные сечения, Сварные сечения, Холодногнутые профили и Учёт физической нелинейности.

Рассмотрим создание параметрического сечения (рис. 2.32).

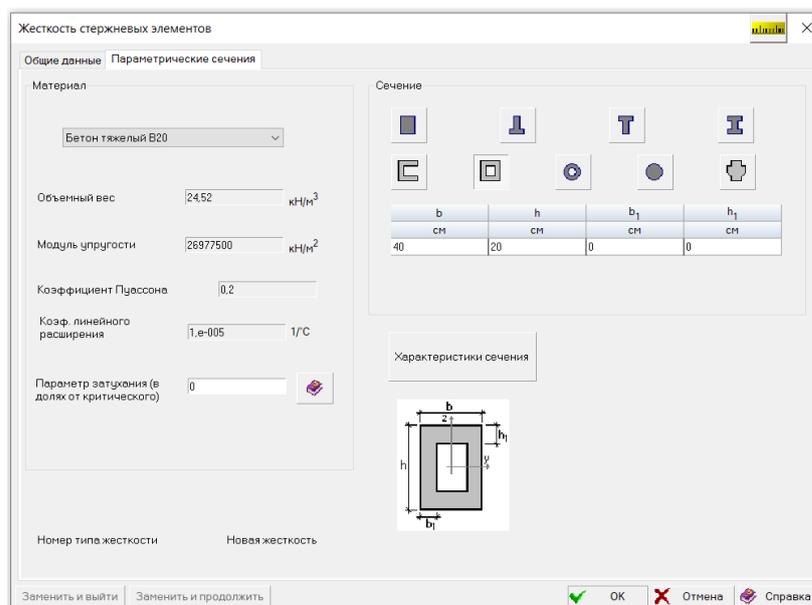


Рис. 2.32. Задание параметрического сечения.

Выбираем тип сечения, указываем размеры сечения в сантиметрах, если не указано иное, обязательно выбираем тип материала! Характеристики сечения SCAD рассчитывает сам. Далее нажимаем ОК и выделяем на схеме те элементы, которым нужно назначить текущий тип жёсткости. Номер типа жёсткости назначается в порядке создания типов жёсткости, его можно отобразить нажатием соответствующей команды на панели фильтров. Также в окне на рис.31 можно задать имя типа жёсткости, которое будет отображаться вместо номера. При вводе имени текущий тип жёсткости должен быть выделен, для сохранения имени нажимаем **Заменить и выйти** или **Заменить и продолжить**. Для отображения имени жёсткости на пиктограмму Номера типов жёсткости нажимаем правой кнопкой мышки и ставим галочку у команды **Отображение имён жесткостей** (внизу окна) (рис.33).

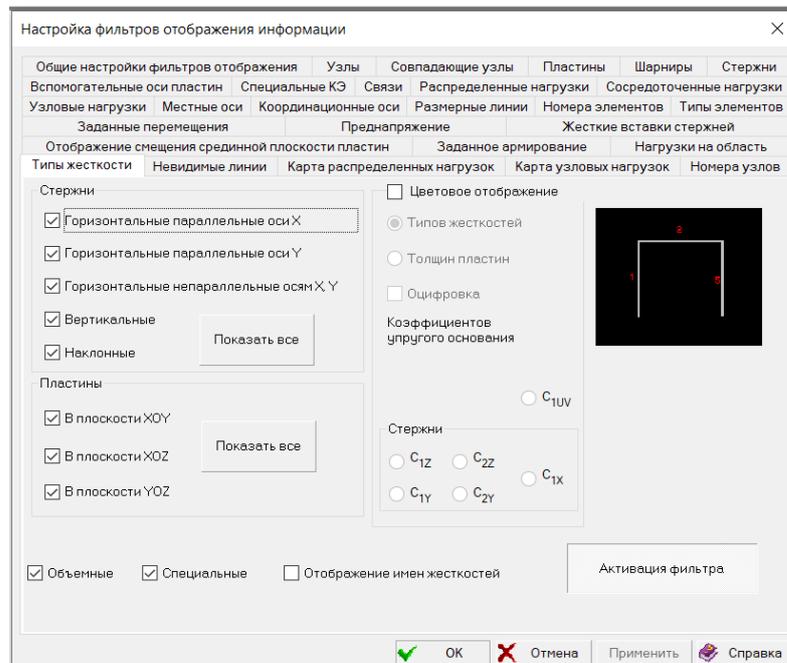


Рис. 2.33. Отображение имён жесткостей

Рассмотрим установку связей в узлах (рис.34). Для плоской рамы в каждой точке, как вы помните из курса Теоретической механики, доступны только три степени свободы. Когда перемещение по данному направлению запрещено – ставим галочку. Обратим внимание, что можно добавить направления к существующим или произвести полную замену. Ниже в форме таблицы 2.1 рассмотрим возможные опоры и соответствующие им связи в SCAD.

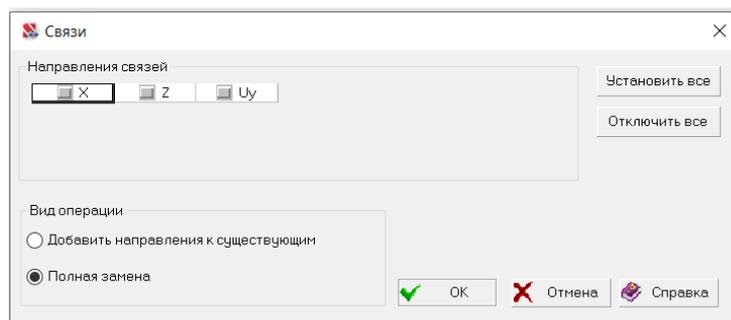
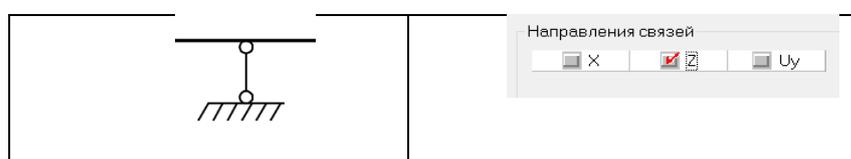
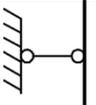
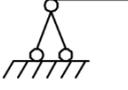
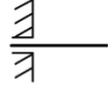


Рис. 2.34. Установка связей в узлах

Таблица 2.1.

### Назначение связей



	<p>Направления связей</p> <input checked="" type="checkbox"/> X <input type="checkbox"/> Z <input type="checkbox"/> Uy
	<p>Направления связей</p> <input checked="" type="checkbox"/> X <input checked="" type="checkbox"/> Z <input type="checkbox"/> Uy
	<p>Направления связей</p> <input checked="" type="checkbox"/> X <input checked="" type="checkbox"/> Z <input checked="" type="checkbox"/> Uy
	<p>Направления связей</p> <input type="checkbox"/> X <input checked="" type="checkbox"/> Z <input checked="" type="checkbox"/> Uy

Рассмотрим команду Установка-удаление жёстких вставок. Жесткие вставки используют для учёта эксцентрисности стыковки элементов в узлах. Вставка между эксцентричными элементами стержня с очень большой, но конечной жесткостью, как это представляется интуитивно возможным, приводит к резкой потере точности вычислений. Для обхода этой вычислительной трудности в комплексе SCAD предусматривается возможность использовать бесконечно жесткие вставки по концам стержневых элементов. Жесткие вставки могут описываться двумя способами: в общей системе координат расчетной схемы или в местной системе координат по любому направлению. Эта команда используется, например, в таких случаях, когда нужно обеспечить поэтажное сопряжение балок рабочей площадки промздания.

При вводе в местной системе координат местная ось  $X_1$  элемента проходит от узла 1 к узлу 2, а длины жёстких вставок задаются в виде длин проекций на соответствующие местные оси. При вводе в общей системе координат длины жестких вставок задаются в виде проекций на оси общей системы координат, т.е. как векторы, направленные от узла к гибкой части стержня.

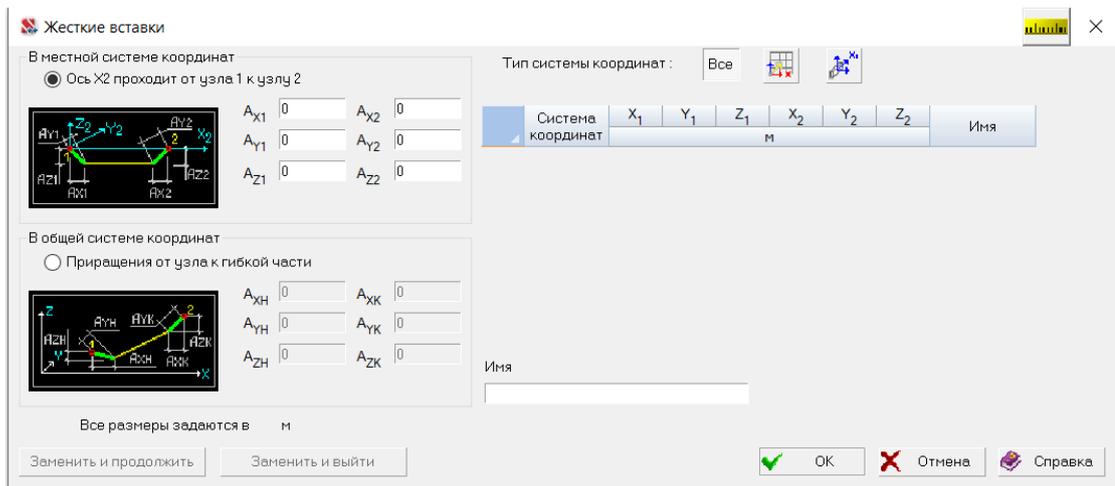


Рис. 2.35. Установка жёстких вставок.

Рассмотрим установку шарниров. Возвращаясь к выбору типа схемы, вспомним, что в шарнирно-стержневой системе шарниры установлены в узлах по умолчанию. Если выбрана плоская рама или система общего вида, то мы можем поставить шарниры в узлы (для SCADa – в стержни!) «принудительно». Окно установки шарниров показано на рисунке (рис.36).

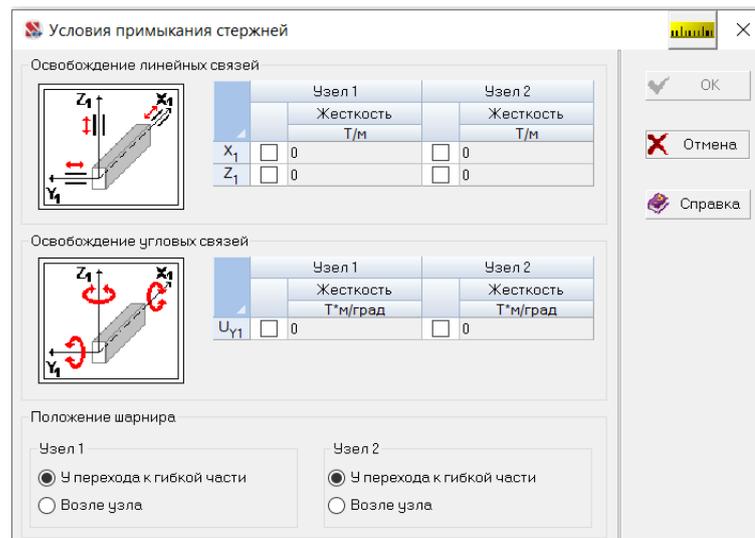


Рис. 2.36. Установка шарниров.

Программа предлагает два варианта шарниров: для освобождения линейных связей или угловых (наш классический вариант). Шарнир для освобождения линейных может быть представлен как ползун (рис.37), который упоминается при рассмотрении Теории линий влияния, когда в балке определяется линия влияния поперечной силы.

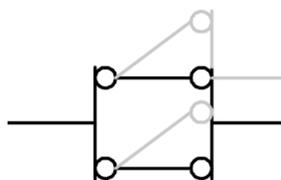


Рис. 2.37. Ползун.

Как уже упоминалось, шарниры в программе ставятся не в узлы, а в стержни! Соответственно, программа и пользователь должны «договориться», где у стержня начало (первый узел) и конец (второй узел). Такой «договор» заключается по направлению местной оси каждого стержня –  $X_1$ . Начало местной системы координат – начало стержня, направление оси  $X_1$  – его конец. Рассмотрим расположение местных осей на рис.38: для вертикального стержня, соединяющего узлы 3 и 4, узел 3 является первым, узел 4 – вторым. Местная система координат и общая система координат могут совпадать, но это совершенно не обязательно.

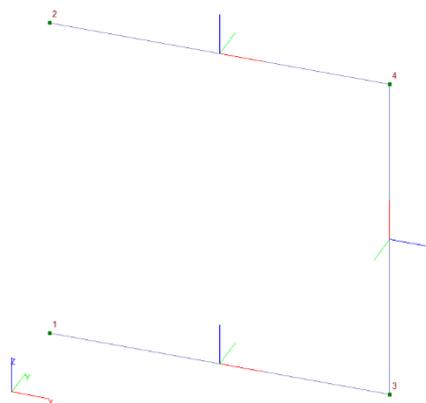


Рис. 2.38. Местная система координат стержней рамы.

Рассмотрим установку шарниров на примере рамы с затяжкой и промежуточным шарниром (рис. 2.39, а). Для стержня под номером 10 (рис. 2.39, б) поставим угловые шарниры и в 1-ый узел, и во 2-ой узел в окошке (рис. 2.36), подтвердим действие (ОК) и выделим стержень №10 (не узлы!!!!). Промежуточный шарнир можно установить или на стержень №4, или на стержень №5 (и туда, и сюда – не надо!). Если выбираем стержень №4 – то ставим во 2-й узел, если стержень №5 – ставим в 1-й узел. Результат показан

на рисунке 39, в). Отображение шарниров производится соответствующей командой на панели фильтров.

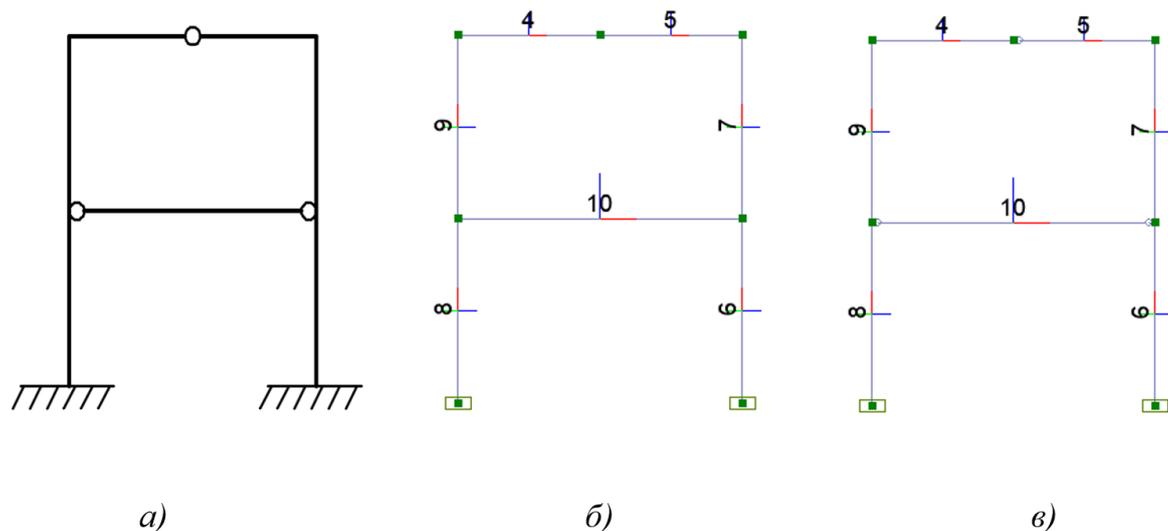


Рис. 2.39. Установка шарниров

а) исходная схема

б) направления местных осей стержней

в) установленные шарниры

Иногда бывает необходимо поменять направление местных осей, то есть повернуть сечение. Вращение сечения осуществляется командой Ориентация местных осей инерции (рис. 2.40).

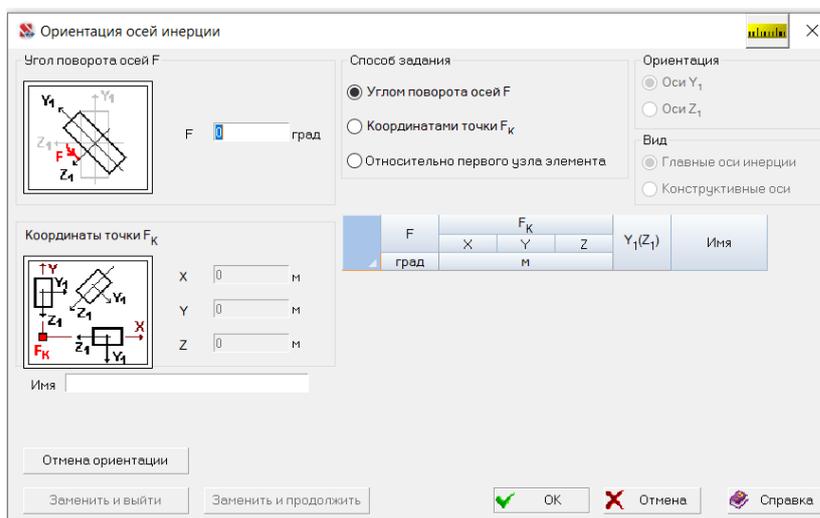


Рис. 2.40. Установка шарниров.

Для изменения направления оси  $X_1$  также есть команда (рис.41)

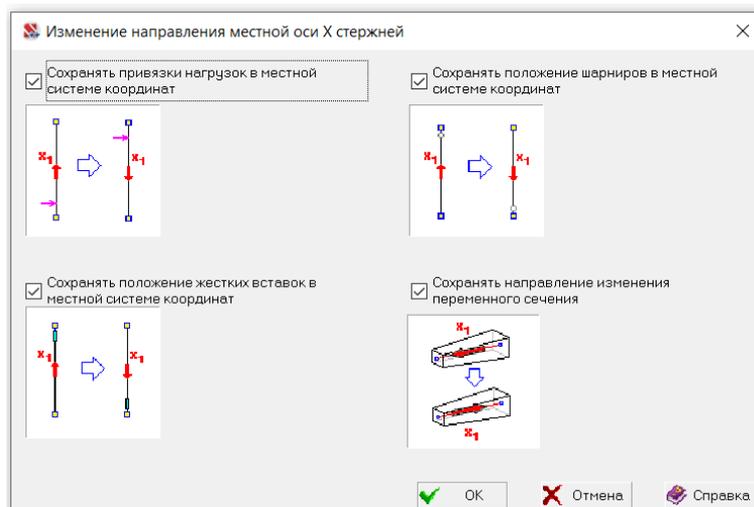


Рис. 2.41. Установка шарниров.

И, наконец, часто в больших объектах случается так, что создано очень много типов жесткостей, в основе которых лежит одно сечение. Программа может объединить дублирующиеся жёсткости (рис.42).

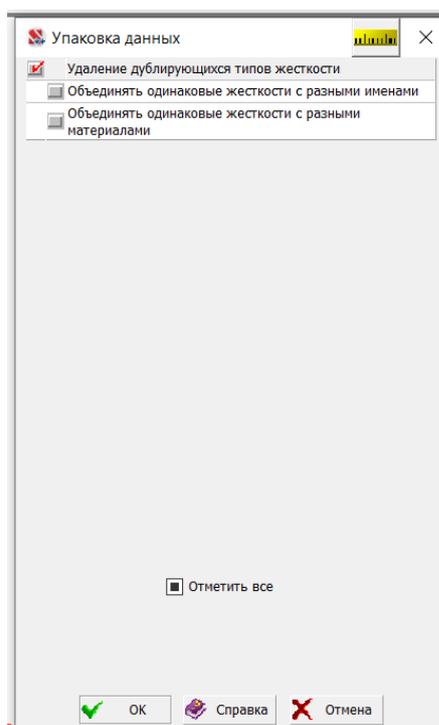


Рис. 2.42. Удаление дублирующихся типов жёсткостей.

Переходим к вкладке Загрузки: тут назначаются и сохраняются нагрузки на конструкцию (рис.43). Первая и самая важная для любой конструкции нагрузка – Собственный вес (пиктограмма с часами). Система на

основании длин элементов и поперечных сечений с выбранными материалами учитывает собственный вес сама. Пользователю остаётся назначить только коэффициент неучтённости (рис.44).

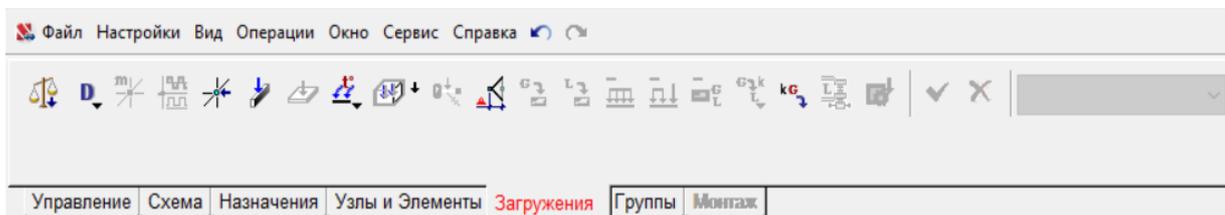


Рис. 2.43. Удаление дублирующихся типов жёсткостей.

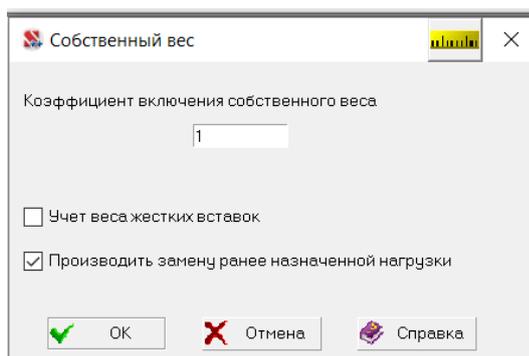


Рис. 2.44. Собственный вес.

Следующее по порядку загрузке – динамическое. Здесь назначаются все виды динамических нагрузок (рис. 2.45): сейсмические, ветровые воздействия, производится расчёт на собственные и вынужденные колебания и пр.

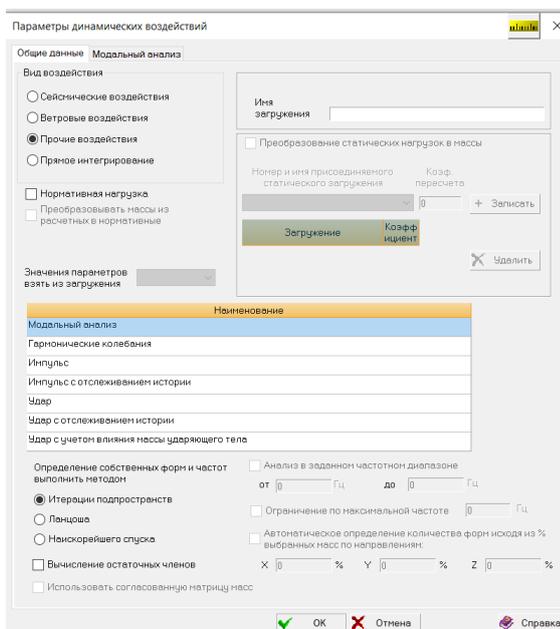


Рис. 2.45. Динамическое нагружение.

Две следующих пиктограммы серого цвета – недоступны к выбору – тоже относятся к динамическим воздействиям. Они станут активными, когда будет создано динамическое нагружение.

Далее идёт набор нагрузок, знакомых из курса Строительной механики: нагрузки на узлы, на стержни, температурные и кинематические воздействия.

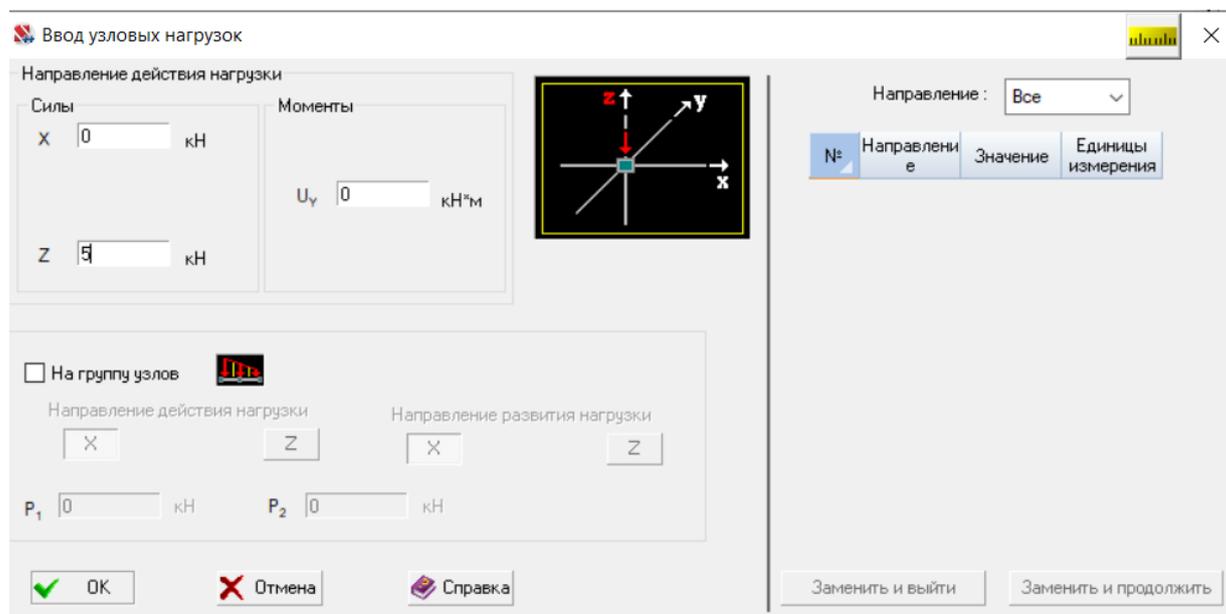


Рис. 2.46. Ввод узловых нагрузок.

При вводе силового воздействия нагрузки по осям задаются поочередно, то есть если нужно задать вертикальную нагрузку, что сила по оси X и момент должны быть равны нулю. Положительное направление нагрузки указывается рядом, соответственно, если в задании сила направлена в другую сторону, то она указывается со знаком «-».

Тепловые или температурные воздействия задаются в окошке (рис. 2.47). По умолчанию программа предлагает рассмотреть изменение температуры вдоль оси  $X_1$ , однако в классических задачах Строительной механики рассматривается изменение температуры по высоте сечения, то есть по оси  $Z_1$  или  $Y_1$ .

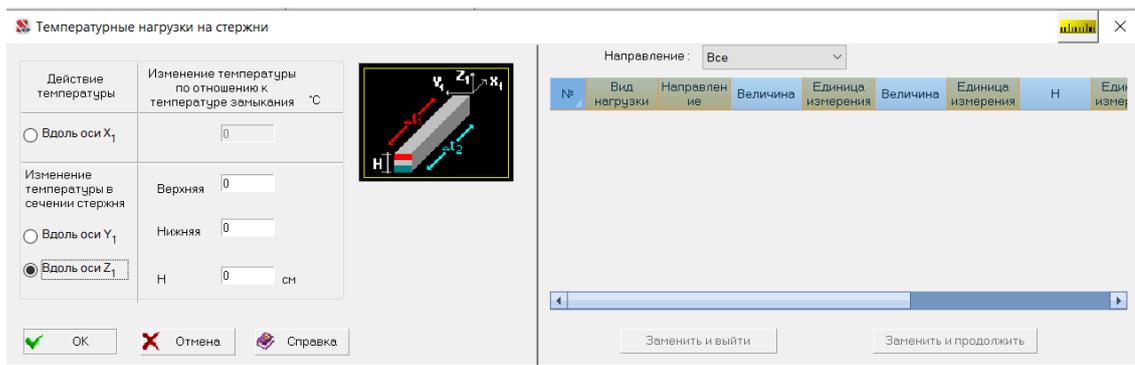


Рис. 2.47. Температурные нагрузки на стержни.

### С кинематическим воздействием всё проще и привычнее

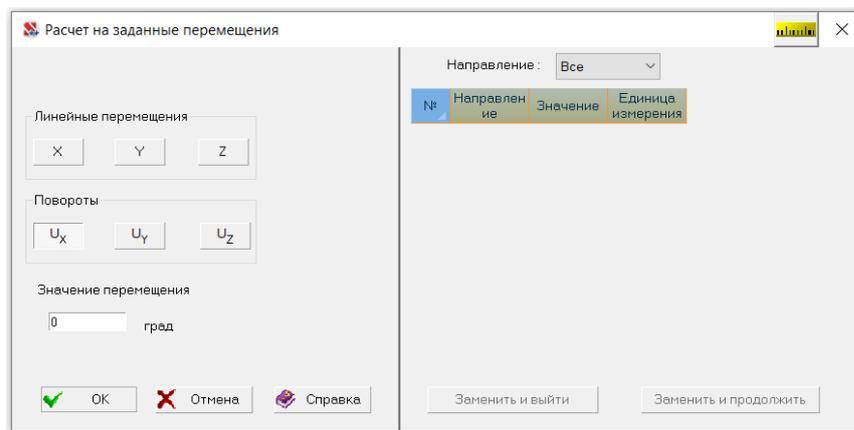


Рис. 2.48. Кинематическое воздействие.

Отображение приложенной нагрузки осуществляется также соответствующими командами с панели фильтров, причём отдельно выбирается тип нагрузки и в дополнение значение это самой нагрузки.

Сохранение загрузки производится следующим образом (рис.49). Вводим название загрузки, выбираем тип и вид нагрузки (рис. 2.50). Далее нажимаем Записать как новое, если создаётся новое загрузке, или Заменить, если необходимо заменить существующее.

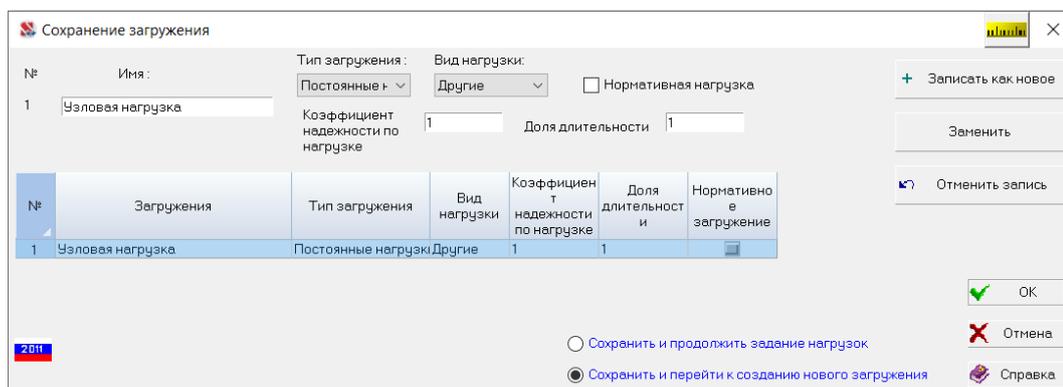


Рис. 2.49. Сохранение загрузки.

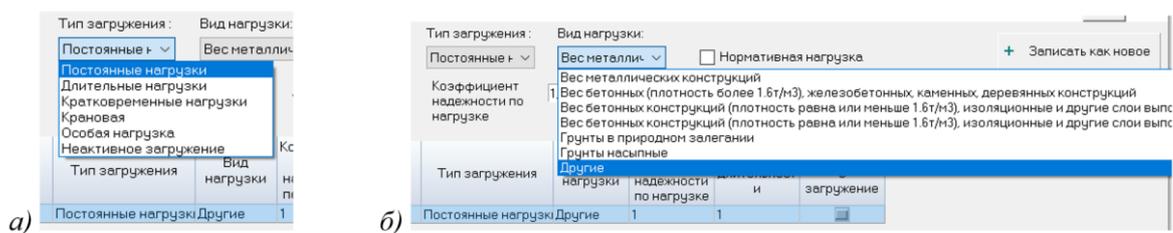


Рис. 2.50. Сохранение загрузений

а) тип загрузки

б) вид нагрузки

Слева от команды Сохранение загрузения расположена команда Сохранение группы нагрузок. Группы нагрузок создаются также, как загрузения, или из загрузений. И далее можно по соответствующей команде собрать новое загрузение из имеющихся групп нагрузок – это альтернатива сочетаниям нагрузок. И аналогично сокращению дублирующихся жесткостей, здесь также можно выполнить упаковку загрузений, убрав лишние или пустые.

Перед отправкой на расчёт выполняем упаковку схемы, отправляемся в дерево проекта и выполняем Линейный расчёт. Приступаем к изучению Протокола расчёта (рис.51, б). Исходная схема с нагрузками показана на рисунке 51, а. Рассмотрим равновесие системы:

- по оси X действует распределенная нагрузка  $1 \cdot 2 = 2$  кН;
- по оси Z действует сосредоточенная нагрузка 5 кН;
- изгибающий момент вокруг оси Y равен 7 кНм.

Все данные совпали с протоколом, значения сил и моментов указаны со знаком «плюс», так как совпадают с положительным направлением, указанным на рис. 2.46. При расчёте на динамическое воздействие в Протоколе будет указано распределение моадльных масс, в случае ошибок задания схемы – подробный перечень узлов и элементов, в которых эти ошибки оказались допущены.

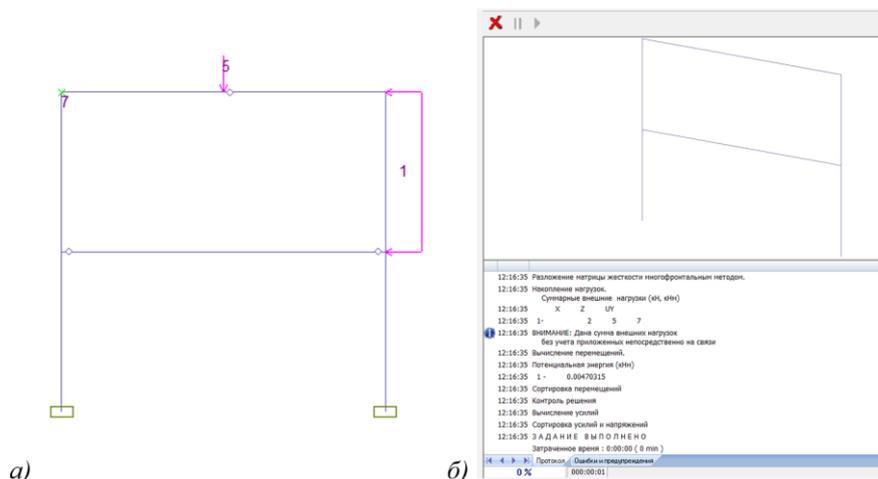


Рис. 2.51. Анализ суммарных нагрузок

а) нагрузки на схеме

б) нагрузки в протоколе

Если задание выполнено, переходим к Результатам расчёта. Первая вкладка по порядку – это Перемещения (рис. 2.52), а вовсе не Усилия, которые мы привыкли определять первыми в Строительной механике.

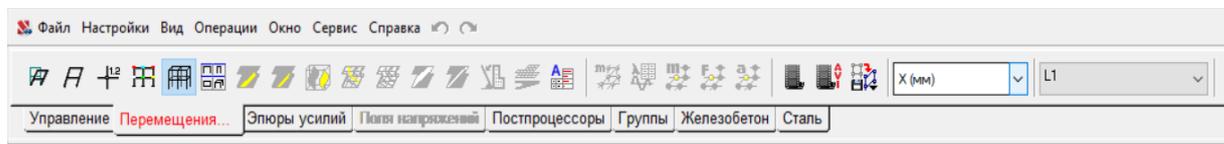


Рис. 2.52. Вкладка Перемещения

Почему? Потому что инженер для этого изучает Строительную механику и смежные дисциплины, чтобы понимать работу конструкции и «чувствовать» куда и на сколько под действием приложенной нагрузки будет смещаться та или иная рама.

В этой вкладке можно отобразить деформированную схему с указанием перемещений в каждом узле по направлению осей или узнать суммарное перемещение (рис. 2.53).

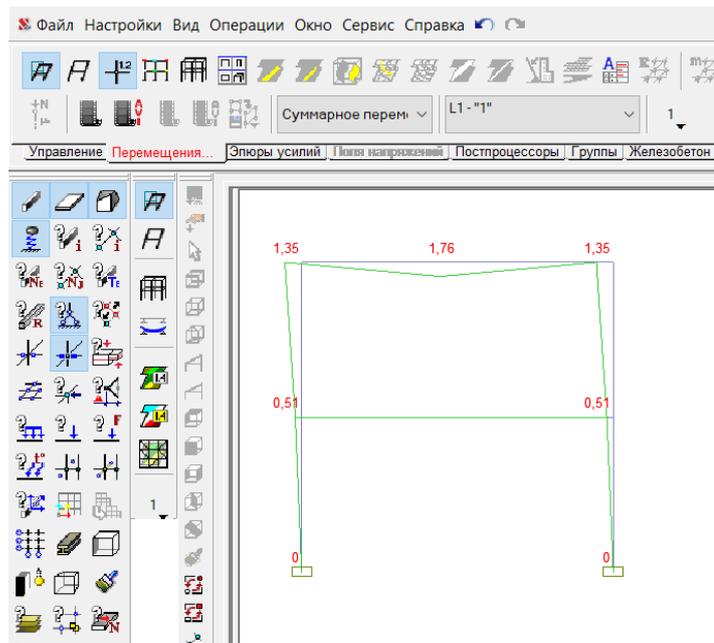


Рис. 2.53. Вкладка Перемещения

Если чутьё инженера одобрило деформированную схему, переходим к рассмотрению усилий в элементах. Тут всё стандартно: эпюры  $M$  (рис.54, а),  $Q$ ,  $N$  (рис. 2.54, в) расположены на соответствующих волокнах. Знаки на этих эпюрах отсутствуют, но они указаны рядом со значениями. Кстати, самое сложное для студентов – отыскать на панели фильтров команду для отображения значений усилий – укажем её специально на рис. 2.54, а и б.

Подробно эпюру в стержне можно рассмотреть, выбрав команду на панели фильтров: информация о стержне – эпюры усилий (рис.55, а, б).

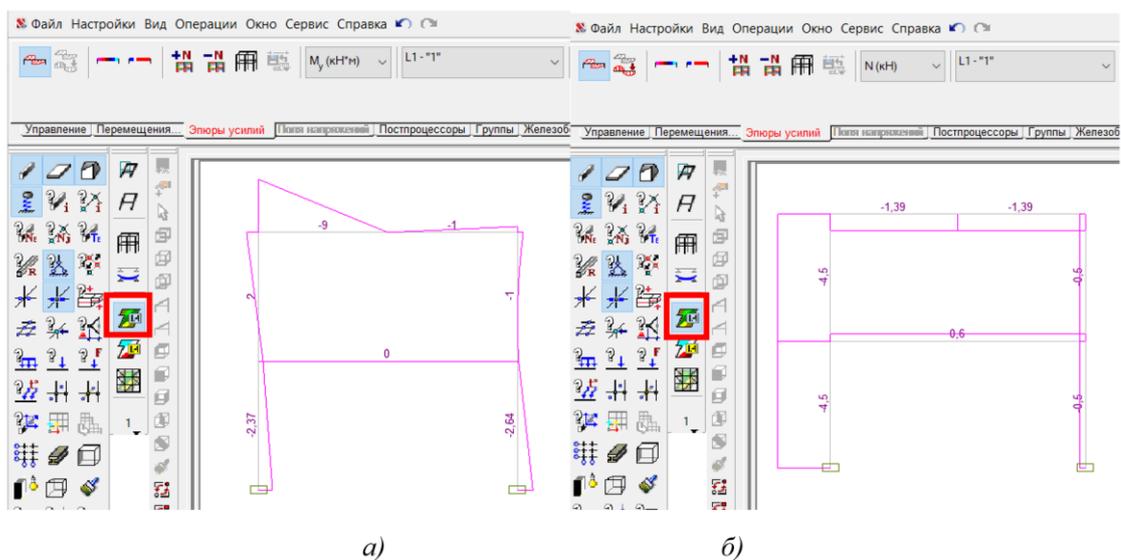


Рис. 2.54. Эпюры усилий

- а) эпюра изгибающих моментов
- б) эпюра продольных сил
- в) команда отображения значений усилий на эпюрах на панели фильтров

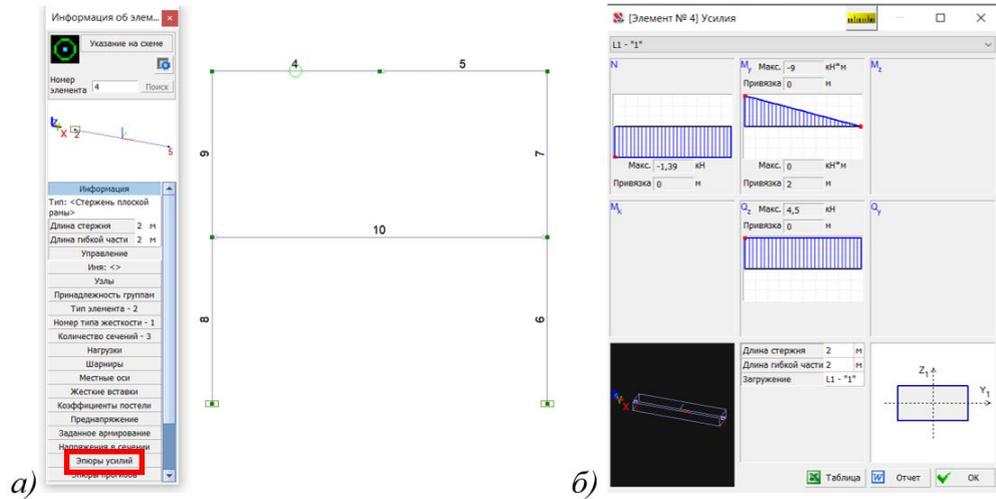


Рис. 2.55. Анализ усилий в элементе

- а) информация об элементе
- б) усилия в элементе

Рассмотрим также результаты расчёта в виде таблиц MS Word или MS Excel. Для этого в экране управления проектом выбираем вкладку Документирование и стрелками выбираем то, что хотим получить в текстовом отчёте, например, Усилия (рис.56, а, б).

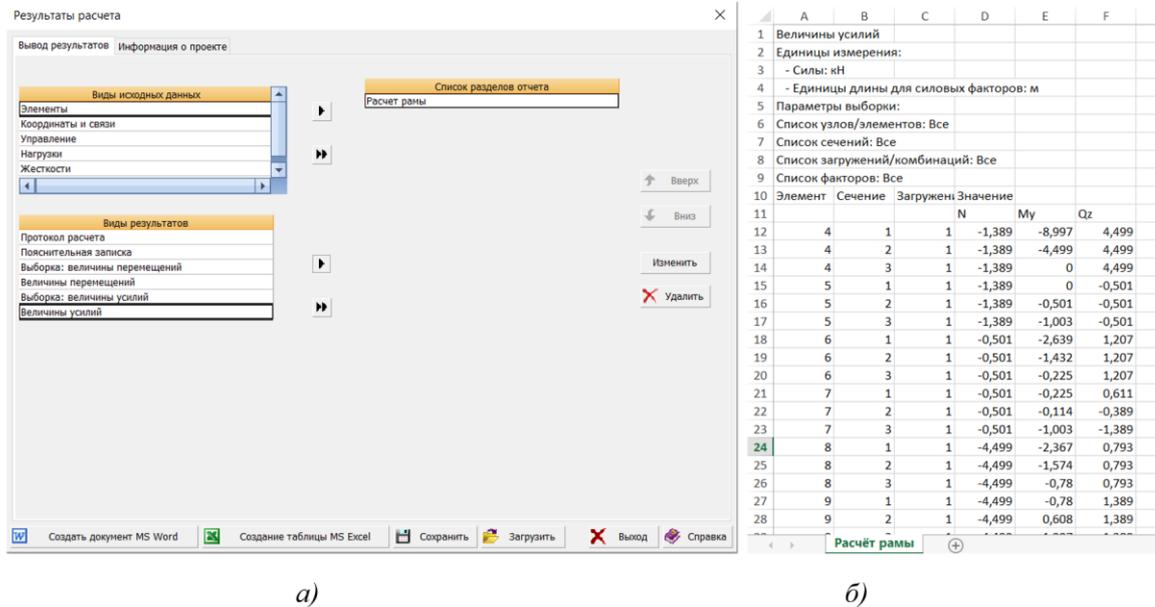


Рис. 2.56. Результаты расчёта

- а) Вывод результатов расчёта в формате документа
- б) файл с результатами

## 2.7 РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрим особенности расчёта пространственных конструкций в программном комплексе SCAD Office. Теперь мы располагаем не двумя осями координат, а тремя, и выбор типа схемы (рис. 2.4) ограничен схемой 4 (шарнирно-стержневая система) или 5 (система общего вида). Напомним, что у типа схемы №4 по умолчанию во все узлы ставятся шарниры, причём на схеме эти шарниры видны не будут. Тип схемы №5 – пространственная рама с жёсткими по умолчанию узлами.

Для пространственных схем с повторяющимися элементами более удобным окажется создание схемы не вкладку Узлы и элементы, а через вкладку Схема. Создадим таким образом пространственный рамный каркас, выбрав тип схемы №5 – система общего вида.

Отправляемся во вкладку Схема – Генерация прототипа рамы (рис. 2.28). Выбираем первый вариант рамы и вводим параметры: длины, опоры и присваиваем жёсткости колоннам и ригелям (рис. 2.57). Заметим, что программа напоминает нам, что типы элементов соответствуют типу схемы - №5. По умолчанию рама окажется в плоскости XOZ, но при желании её можно расположить в плоскости YOZ, отметив галочкой команду «вдоль оси Y».

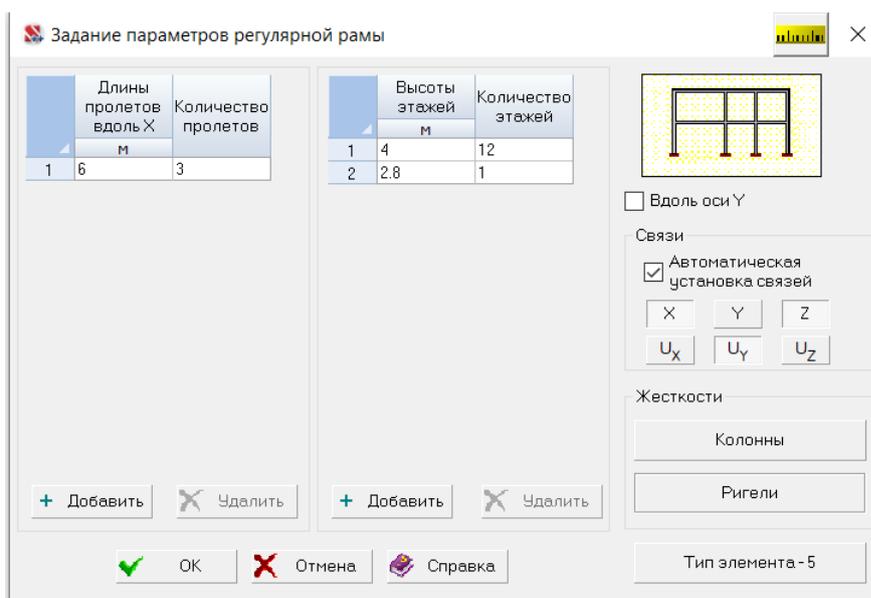


Рис. 2.57. Задание параметров рамы

Сечения, выбранные для колонн и ригелей, представлены на рис.58.

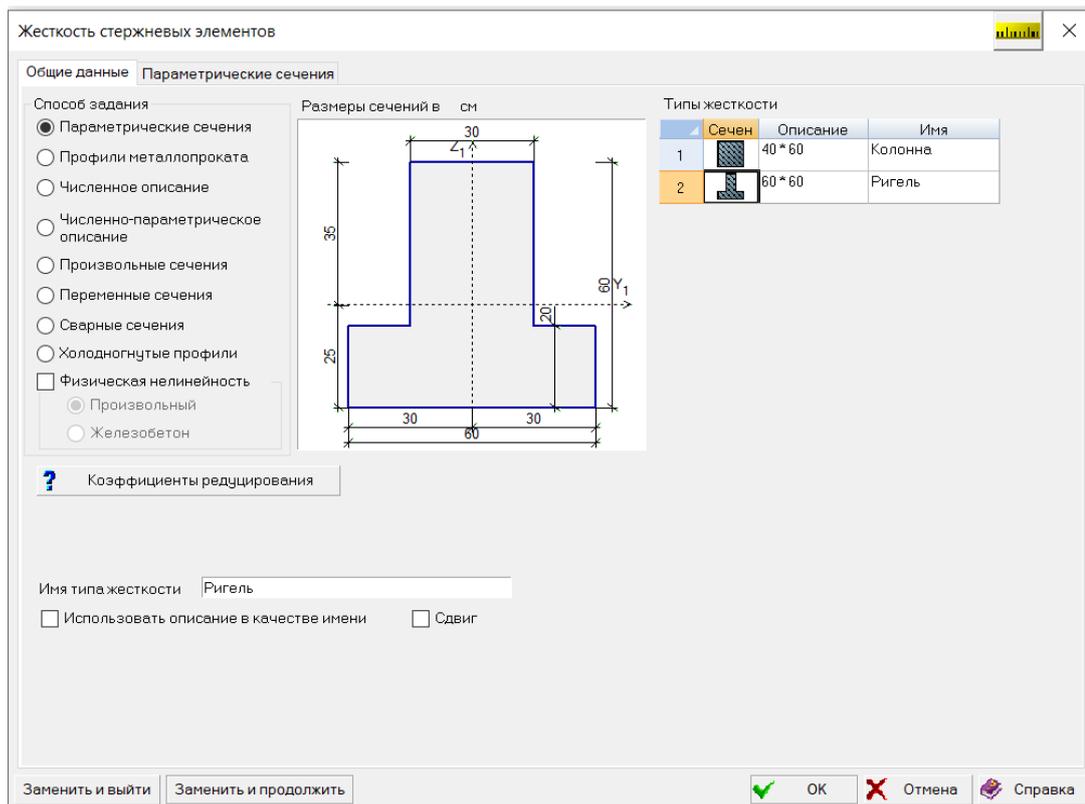


Рис. 2.58. Жёсткости колонн и ригелей

Рама показана на рис. 2.59, а. Выполним некоторые визуальные проверки правильности создания готовой схемы:

- 1) Измерим длины стержней командой Определение расстояния между узлами на панели фильтров (рис. 2.59, б)

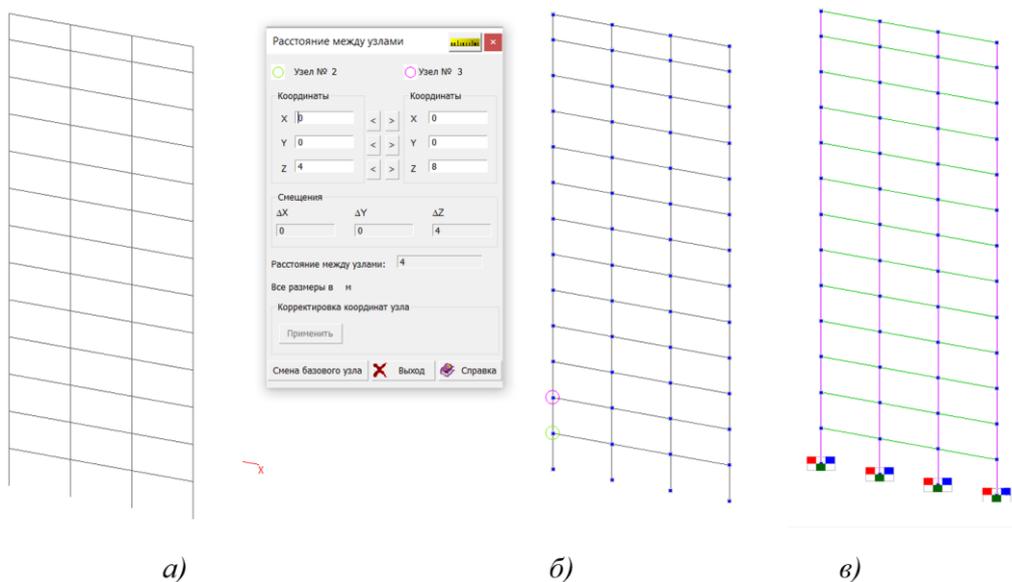


Рис. 2.59. Проверки для рамы  
а) рама

- б) проверка длин  
в) проверка жесткостей и связей

2) Проверим корректность назначения жесткостей. Удобнее всего это сделать, нажав правой кнопкой мыши команду Номера типов жесткостей на панели и фильтров и поставить галочку напротив команды «Цветовое отображение жесткостей» (рис. 2.59, в).

3) Проверим корректность назначения опорных связей. Удобнее всего это сделать, нажав правой кнопкой мыши команду Связи на панели и фильтров и поставить галочку напротив команды «Цветовое отображение связей» (рис. 2.59, в).

Переходим к заданию нагрузки. Зададим распределенную вертикальную нагрузку 40кН/м на все горизонтальные стержни, нажмём ок, и далее нам нужно будет выделить все горизонтальные стержни, что достаточно трудоёмко. Воспользуемся командой Выбор горизонтальных стержней, параллельных оси ОХ, расположенной слева на панели фильтров, обведём прямоугольником схему: выделены окажутся, действительно, только горизонтальные стержни (рис. 2.60, а). Подтвердим выделение и получим раму с нагрузкой (рис.60, б), выбрав соответствующие команды отображения на панели фильтров.

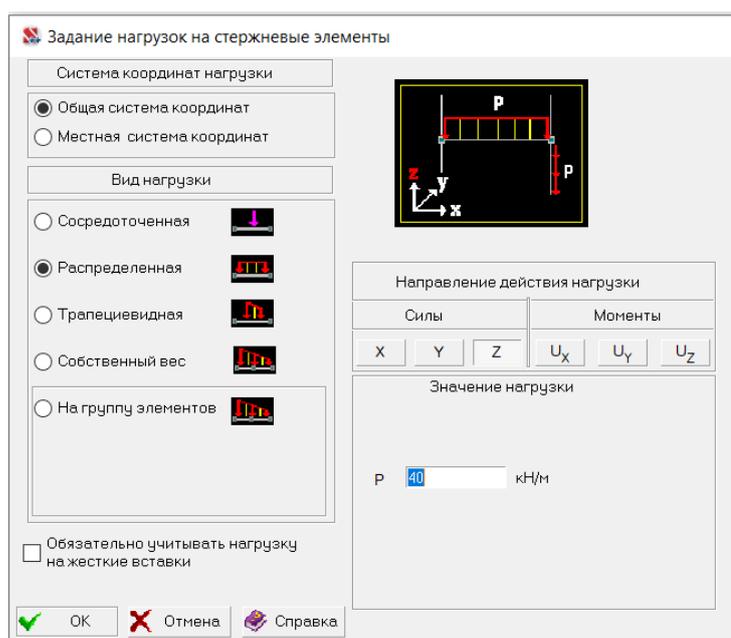


Рис. 2.59. Нагрузка на раму

Сохраняем текущее загрузжение, выбрав тип загрузжения Длительные нагрузки, и нажимаем кнопку записать как новое.

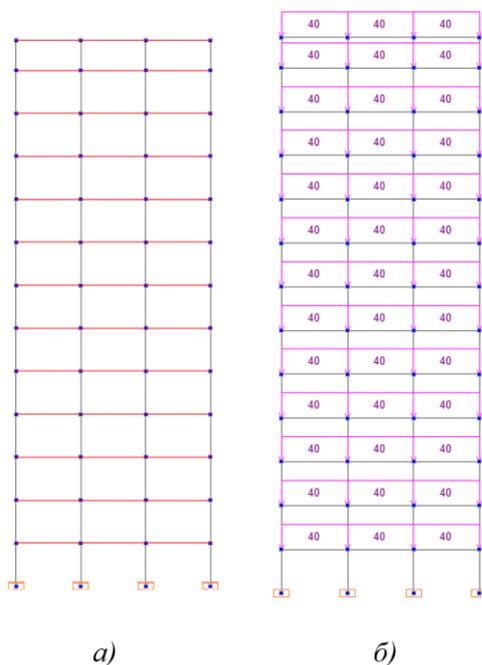


Рис. 2.60. Загрузка рамы

- а) Выделение горизонтальных стержней рамы
- б) Нагрузка на раму

Теперь из плоской схемы создадим пространственную, выбрав команду Дублирование вдоль оси вкладки Схема. Для ригелей продольного направления выберем те же сечения, что у ригелей.

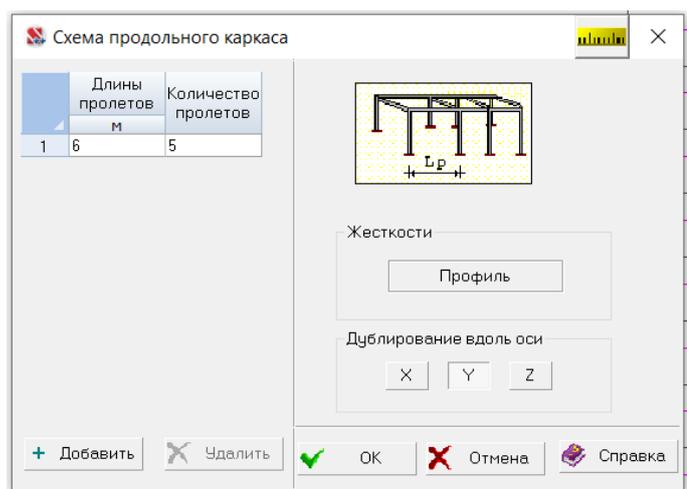


Рис. 2.61. Дублирование вдоль оси Y

Получаем пространственный каркас с уже введёнными опорами, жесткостями и нагрузками (нагрузки тоже оказались скопированы). Производим Линейный расчет и переходим в Результаты расчета.

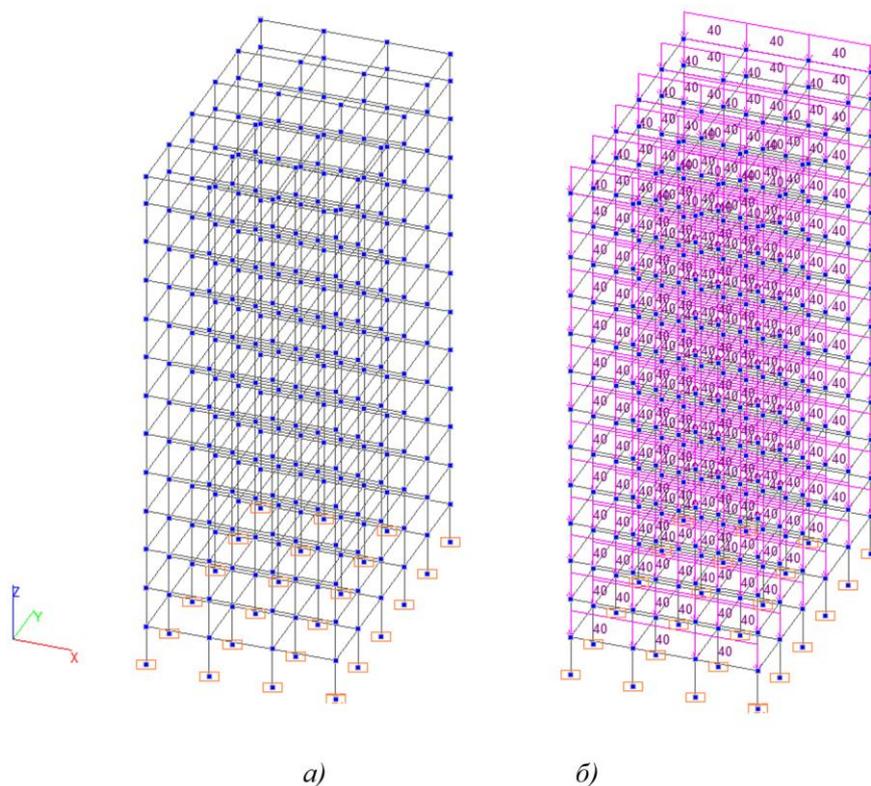


Рис. 2.62. Загрузка пространственного каркаса

а) пространственный каркас

б) нагрузка на каркас

Для удобства просмотра результатов нужно фрагментировать одну грань, например, переднюю. Это можно сделать двумя путями:

1) Выбрать команду Проекция на плоскость  $XOY$  на панели визуализации, выбрать команду Фрагментация рамкой, выделить нужный участок и нажать значок зеленого сигнала светофора. Для возвращения к исходной схеме используется команда Исходное отображение схемы на той же панели визуализации.

2) Выбрать команду Сечение плоскостью на панели визуализации. Сечение в вертикальной или горизонтальной плоскости производится по одной лишь точке, принадлежащей этой плоскости. Можно провести также и наклонное сечение, но как мы помним из геометрии, для этого нужно хотя

бы три точки, принадлежащих данной плоскости. Пиктограммы этой команды представлены на рис. 2.63. Далее подтверждаем сечение, выбрав зеленый сигнал светофора. Возврат к исходной схеме производится аналогично п.1.



Рис. 2.63. Сечение плоскостью

Перемещения и усилия в передней грани приведены на рис. 2.64

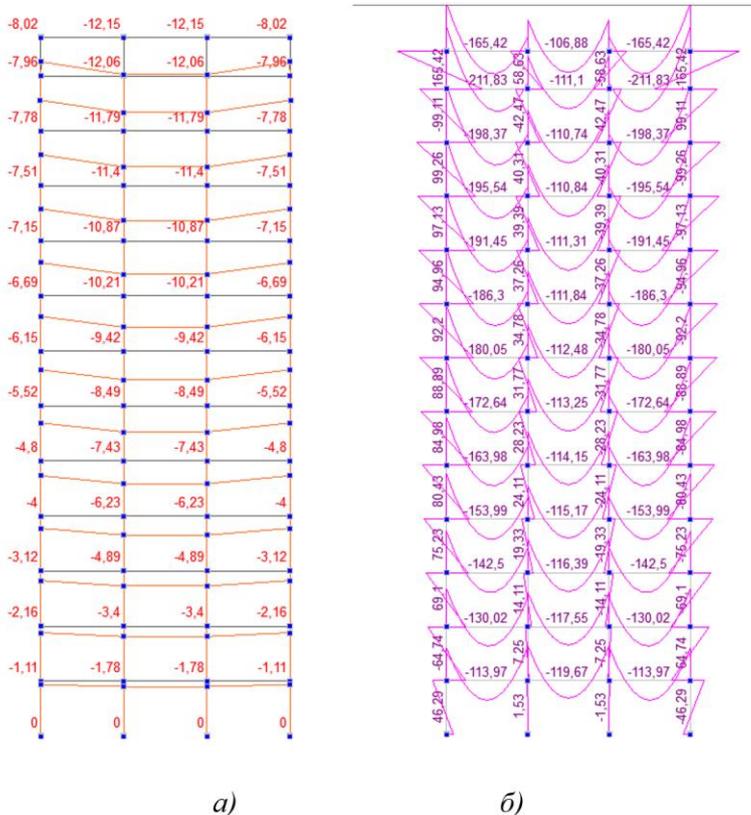


Рис. 2.64. Результаты расчета

а) деформированная схема

б) эпюра изгибающих моментов

Проведём анализ данных рис. 2.64. Деформированная схема выглядит логично: прогиб направлен по вертикали вниз, симметричен. Изгнутая линия выглядит «топорно» и грубо, потому что горизонтальные элементы достаточно длинные. Если ригели поделить на несколько частей, то эпюра прогибов будет иметь более гладкий вид. Для этого вернёмся в Исходную схему,

выделим все ригели, параллельные оси X, как уже делали ранее, и произведём их разбивку на 6 частей (рис. 2.65).

Снова производим Линейный расчёт, отсекаем одну грань и видим, что эпюра прогибов стала не только более гладкой визуально (рис. 2.66, а), но и более точной (рис. 2.66, б): прогиб в середине пролёта оказался равен 13,12 мм вместо данных прошлого расчёта – 12,15 мм.

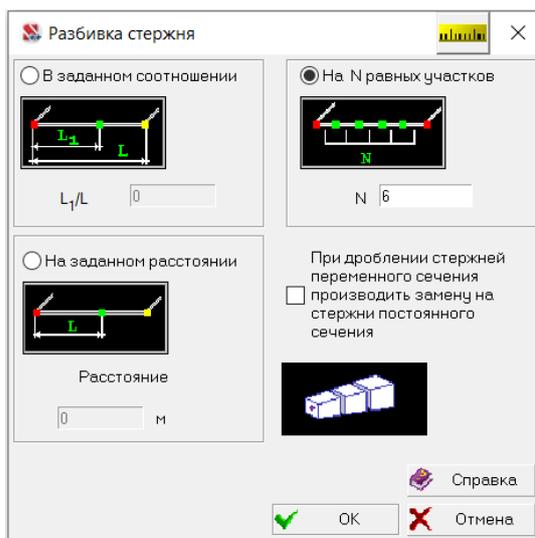
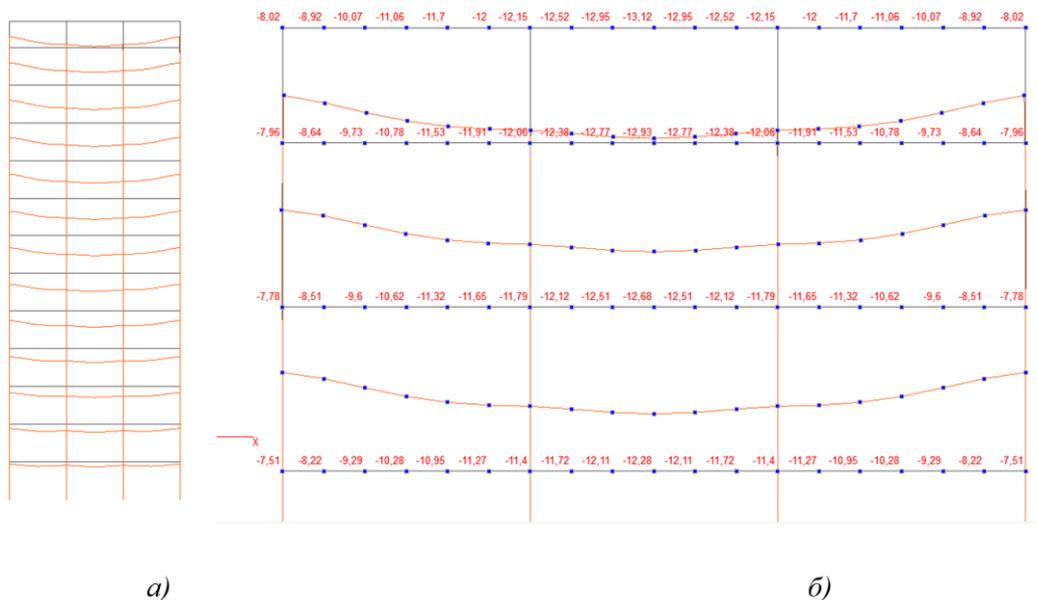


Рис. 2.65. Разбивка стержня



а)

б)

Рис. 2.66. Результаты расчёта

а) деформированная схема

б) значения прогибов

На эпюругибающих моментов дробление не повлияло – все те же значения мы могли бы увидеть, используя команду Информация об элементе – Эпюры. Эпюры также довольно логичные, по ним видно, что узлы рамы жёсткие, то есть момент в них присутствует.

Рассмотрим далее команду Копирование схемы на вкладке Схема. Для начала создаём элемент схемы, который в дальнейшем будем копировать. Элемент выберем также готовый, на вкладке Схема по команде Генерация прототипа фермы.

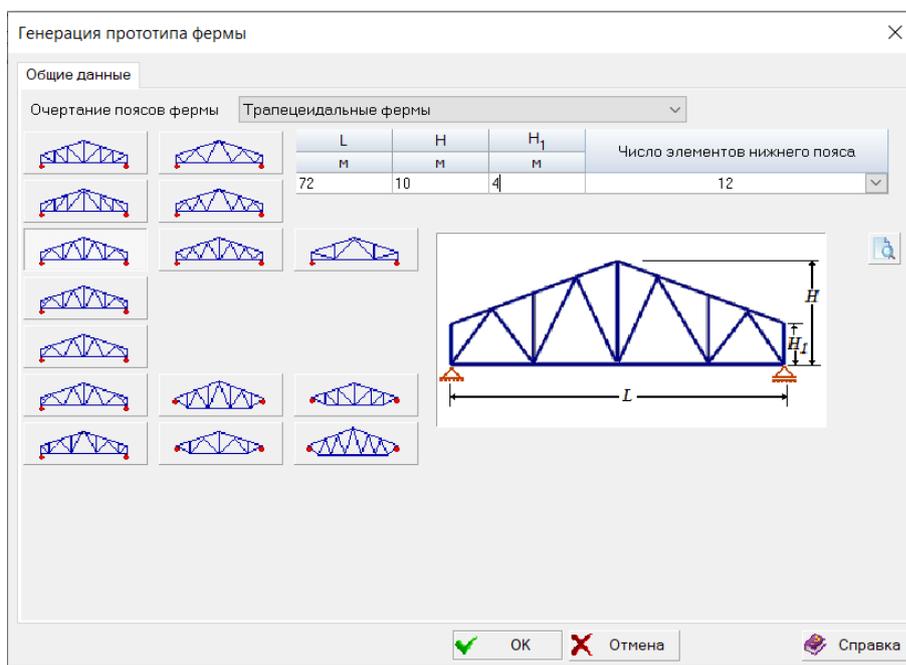


Рис. 2.67. Генерация прототипа фермы

Правую часть удалим, а начало координат перенесём в левый нижний угол схемы для удобства копирования.

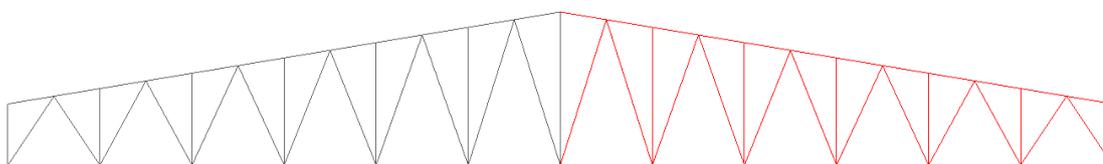


Рис. 2.68. Удаление стержней

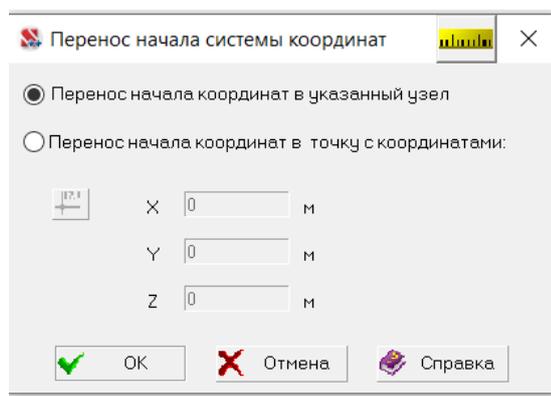


Рис. 2.69. Перенос начала системы координат

Отобразим начало координат, выбрав соответствующую команду на панели фильтров

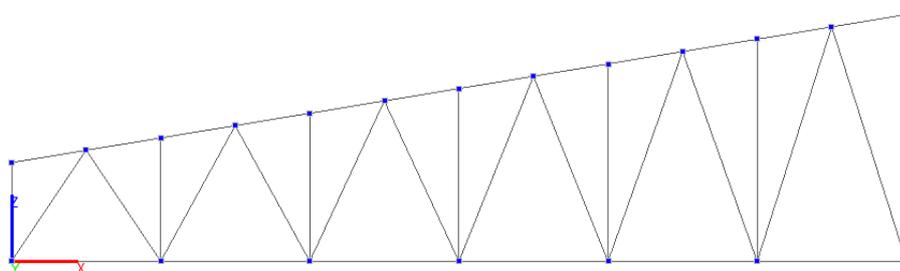


Рис. 2.70. Отображение начала системы координат

Перед копированием схемы выделим узлы, которые при копировании должны порождать новые стержни. Это все узлы верхнего и нижнего поясов, кроме тех, что находятся на оси Z (рис. 2.71). Если выделить стержни, то будут рождаться пластины.

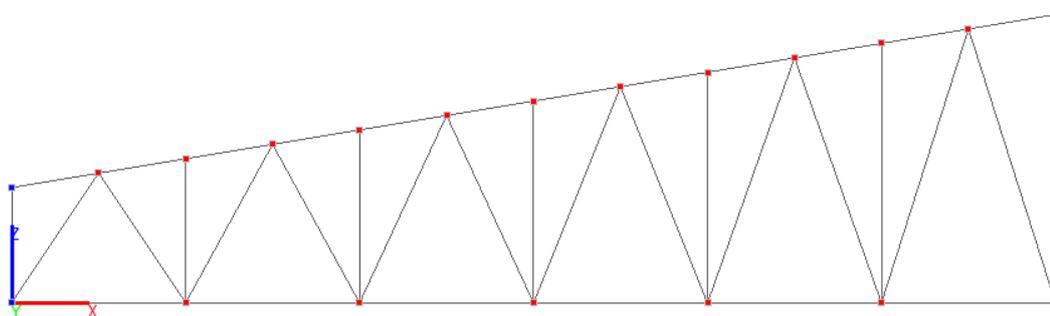


Рис. 2.71. Выделение узлов

Переходим к команде Копирование схемы вкладки Схема. Будем производить циклическую симметрию вокруг оси Z. Угол между двумя соседними элементами рамы составит 15 градусов, соответственно, всего элементов в схеме будет 24 (рис. 2.72).

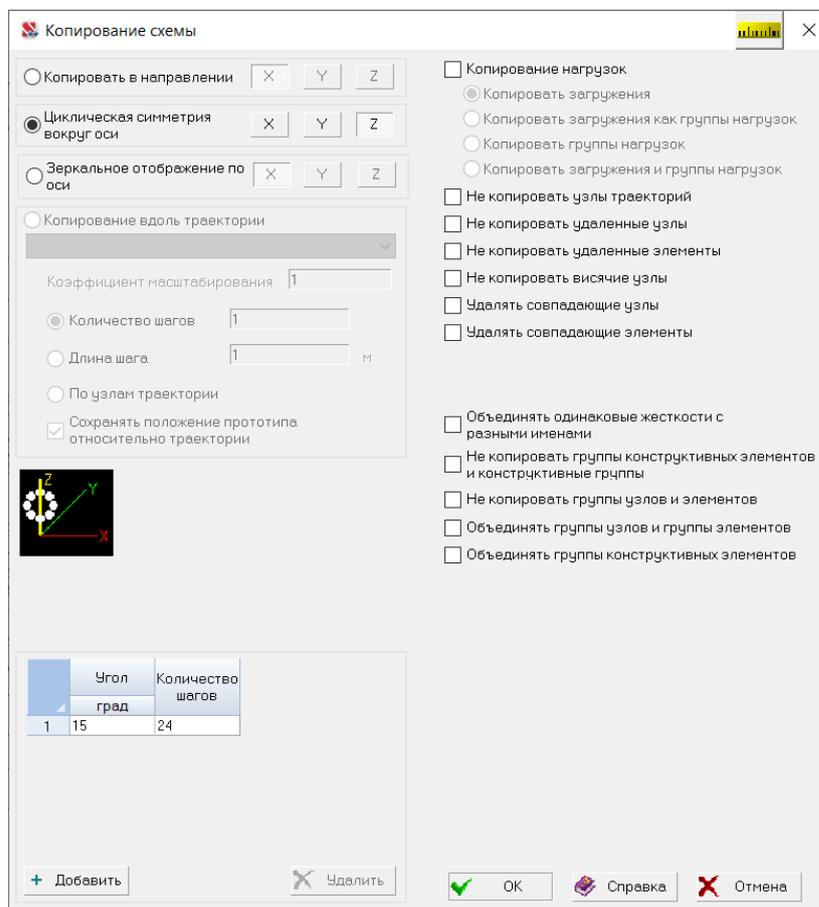


Рис. 2.72. Копирование схемы

Результат копирования представлен на рис. 2.73.

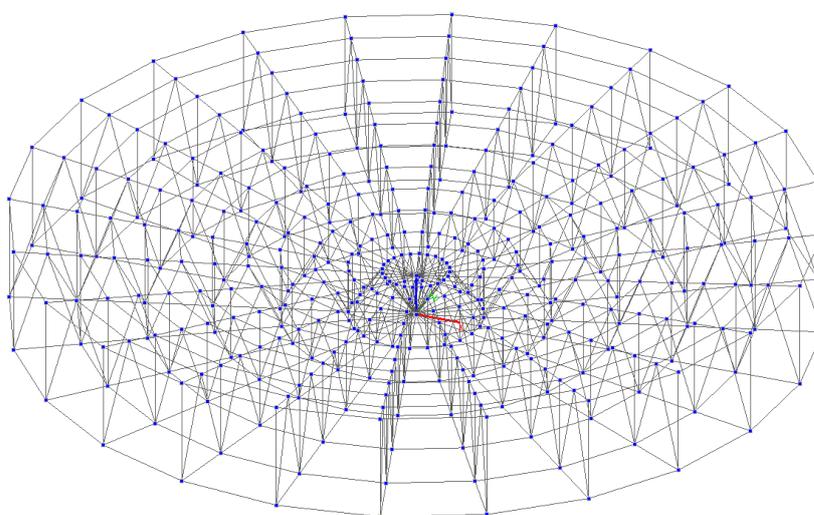


Рис. 2.73. Результат копирования схемы

## 2.8 РАСЧЁТ ПЛАСТИНЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Как уже упоминалось, в программных комплексах существует возможность изображения элементов в виде стержней, пластин (оболочек) и объемных тел, а также их комбинаций. Как в Строительной механике, так и в компьютерных расчётах, пластинчатые элементы входят в более высокий и более продвинутый класс задач. Поэтому для начала поговорим о теории расчёта пластин.

Пластины - конструктивные элементы, у которых один размер (толщина) значительно меньше двух других характерных размеров (размеров в плане). Последние, в свою очередь, имеют один порядок:  $h \ll a, b$

Наиболее часто встречаются в инженерной практике прямоугольная и круглая пластины.

При расчете пластин вводятся понятия о срединной плоскости и линейном элементе. Плоскость, которая делит пластину пополам по толщине, называется *срединной плоскостью*.

Отрезок прямой, соединяющий внешние поверхности пластины перпендикулярно к срединной плоскости, называется *линейным элементом*. Длина линейного элемента равна толщине пластины  $h$ .

Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью пластины называется *контуром*.

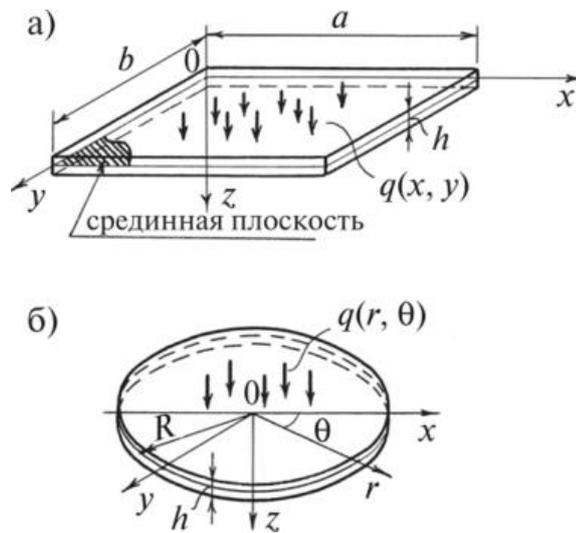


Рис. 2.74. Пластины

а) прямоугольная пластина

б) круглая пластина

Пластина может быть соответствующим образом закреплена по контуру, а также может иметь промежуточные опоры. Часть контура пластины может быть свободна от закреплений.

В срединной плоскости обычно располагаются координатные оси, например, оси  $Ox$  и  $Oy$  для прямоугольной пластины. Ось  $Oz$  направляется перпендикулярно к срединной плоскости.

Пластины могут быть постоянной или переменной толщины. Пластины, являющиеся конструктивными элементами строительных конструкций, как правило, имеют постоянную толщину.

Изгиб пластины вызывается действием поперечных нагрузок, перпендикулярных к срединной плоскости. При изгибе пластина искривляется, и ее срединная плоскость превращается в изогнутую поверхность. Точки срединной плоскости получают при изгибе поперечные перемещения (прогибы)  $w$ .

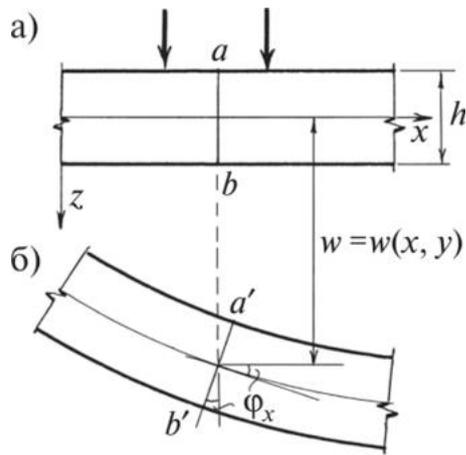


Рис. 2.75. Пластина

а) пластина

б) изгиб пластины

В зависимости от соотношения между основными размерами пластины и ее прогибом пластину можно отнести к различным категориям.

К категории *толстых плит* относятся пластины, у которых толщина составляет  $1/3$  -  $1/5$  от минимального размера в плане. Толстые плиты встречаются в инженерной практике в качестве массивных элементов фундаментов зданий, гидротехнических сооружений, опорных конструкций станков и т.п. Расчет толстых плит производится, по существу, как трехмерных тел на основании уравнений пространственной задачи теории упругости.

К категории *гибких пластин* относятся пластины, у которых прогибы соизмеримы с толщиной ( $w > h/4$ ). Такие пластины применяются в приборостроении, авиастроении (элементы обшивки самолетов и ракет) и т.п. Расчет гибких пластин производится с помощью уравнений, учитывающих геометрическую нелинейность задачи.

Пластины, используемые в строительных конструкциях, чаще всего можно отнести к категории *тонких пластин*. Это железобетонные плиты и панели жилых и промышленных зданий, металлические настилы, днища резервуаров и т.п. Для тонких пластин обычно принимаются следующие соотношения:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5} \div \frac{1}{80}; w \leq 4, \quad (1)$$

где  $a$  — наименьший размер пластины в плане.

Для расчёта пластин используется Техническая теория изгиба. Рассмотрим её основные гипотезы.

1. Линейный элемент ( $ab$ ) при изгибе остается прямым и перпендикулярным к изогнутой срединной поверхности пластины.
2. Длина линейного элемента при изгибе не изменяется.

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

3. Взаимное давление между продольными слоями пластины отсутствует.

4. Перемещения точек срединной плоскости в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$  (продольные перемещения) полагаются малыми величинами в сравнении с прогибом и в силу этого не учитываются. Таким образом, принимается, что

$$u(x, y, 0) = 0, v(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

При этом в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения (сжатия) и сдвига, то есть она является нейтральной.

Линейные и угловая деформации определяются по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Напряжения в пластинах при изгибе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (5)$$



Рис. 2.76. Срединная плоскость и произвольный слой пластины

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  изменяются по линейному закону и равны нулю на уровне срединной плоскости

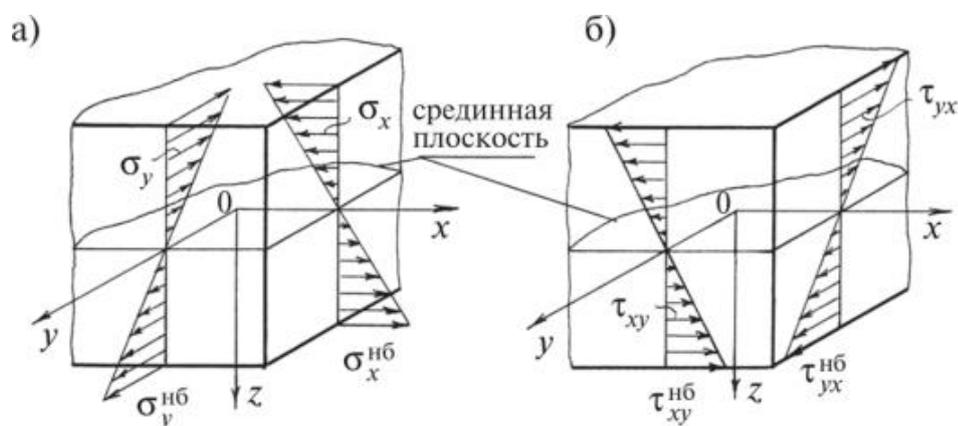


Рис. 2.77. Напряжения в пластинах

Касательные напряжения  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  изменяются по толщине пластины по закону квадратной параболы, так же как касательные напряжения в балках прямоугольного сечения при изгибе. Максимальных значений они достигают в точках срединной плоскости.

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{cases} \quad (6)$$

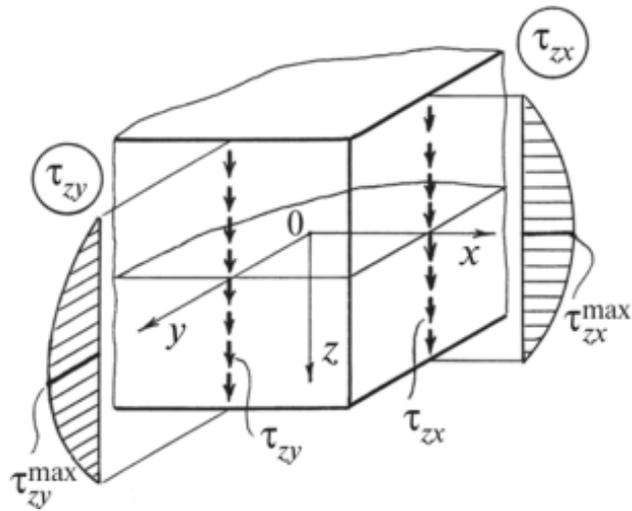


Рис. 2.77. Касательные напряжения в пластинах

Напряжение  $\sigma_z$  изменяется по закону кубической параболы и намного меньше  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ . Им далее можно пренебречь.

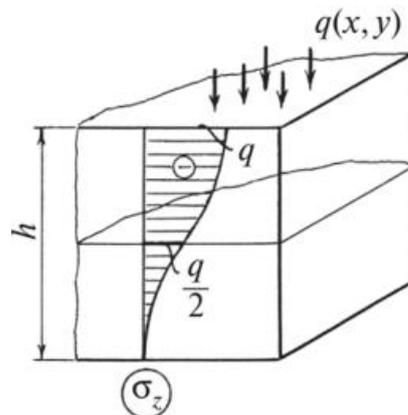


Рис. 2.77. Напряжение  $\sigma_z$  в пластинах

Основное уравнение, описывающим изгиб тонких пластин - часто называется уравнением Софи Жермен — Лагранжа.

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad (7)$$

D - Цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (8)$$

Внутренние усилия в пластинах при изгибе описываются следующими выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = N_y = S = 0; \\ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} = M_{yx} = H = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{array} \right. \quad (9)$$

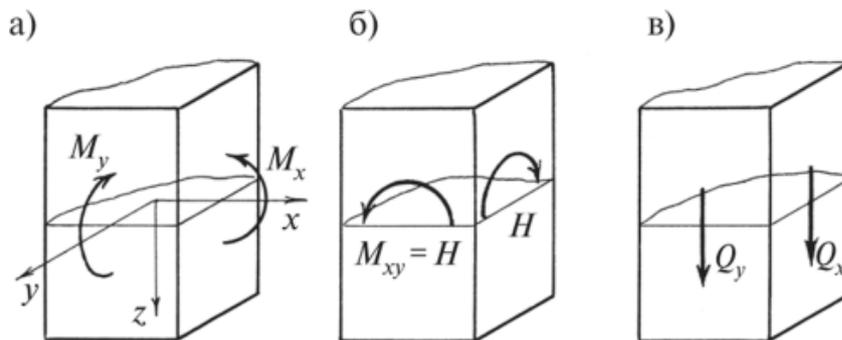


Рис. 2.78. Внутренние усилия в пластинах при изгибе

Переходим к построению пластинчатых элементов в программном комплексе. Ввод пластин производится на вкладке Элементы и команда будет доступна только в том случае, если уже введены минимум 3 узла.

Возможен ввод трёхузловых и четырёхузловых пластин. Сразу можно назначить жёсткость – выбрать материал и толщину, а также свойства пластины, вспомним их: изотропия – одинаково во всех направлениях, анизо-

тропия – разные свойства в разных направлениях, ортотропия – разные свойства во взаимно перпендикулярных направлениях. Когда свойства выбраны, геометрию пластины можно задать списком узлов или указать узлы на схеме.

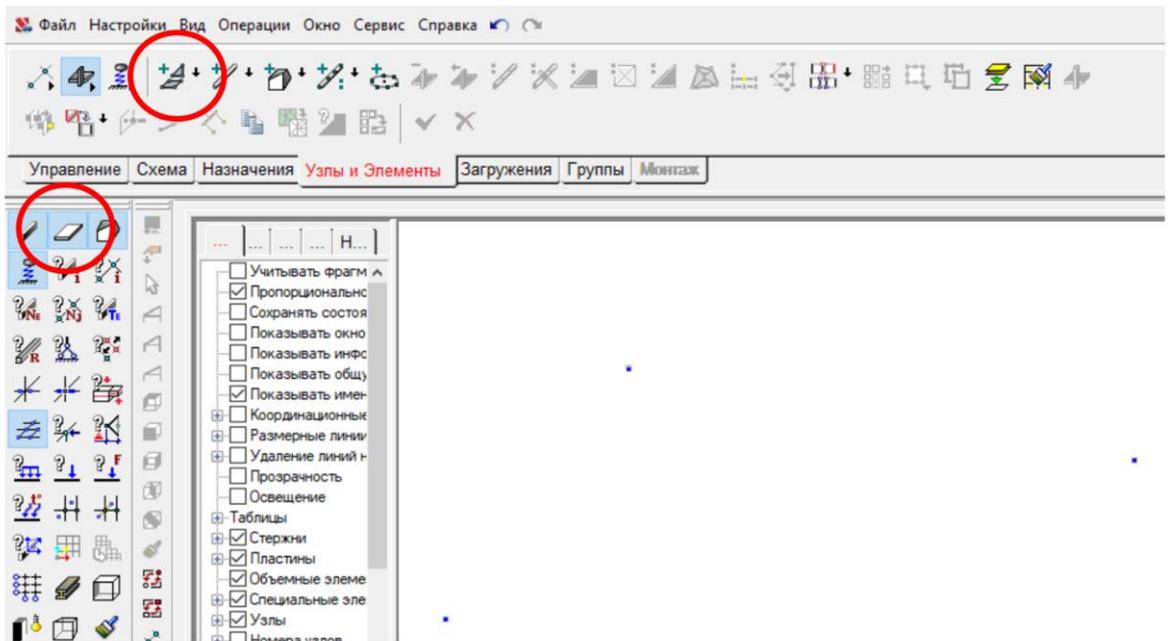
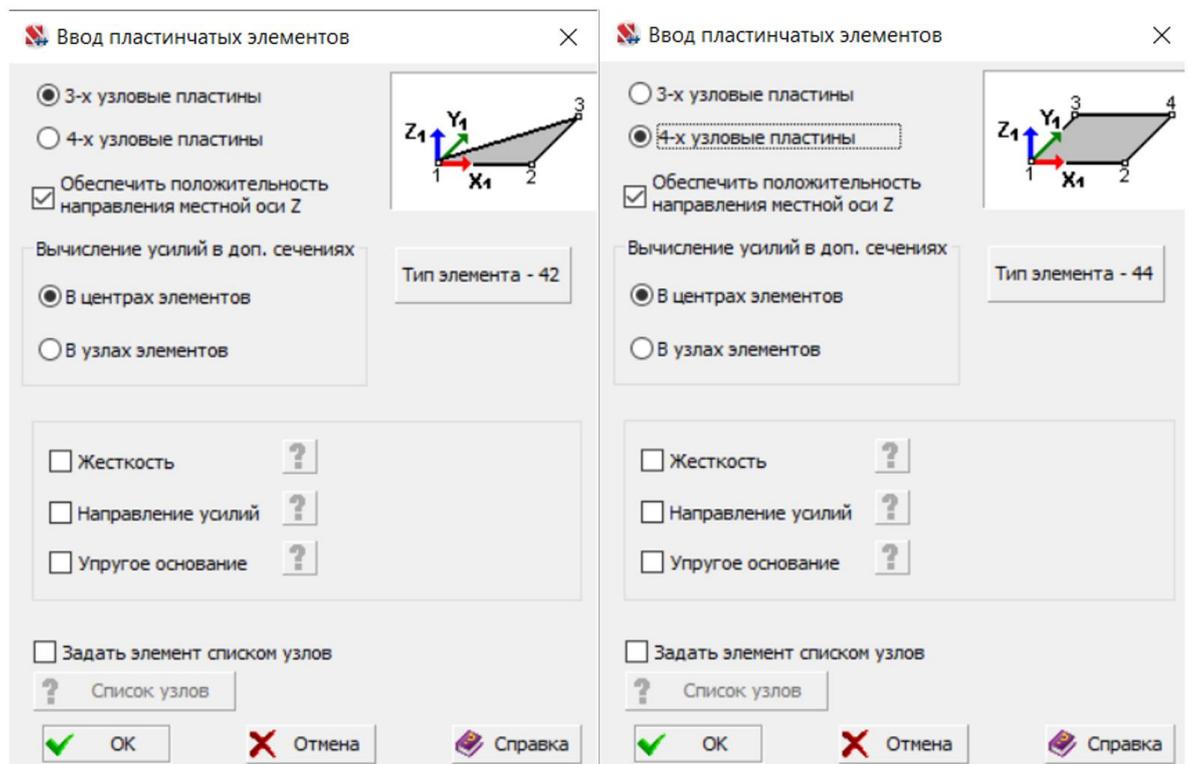


Рис. 2.79. Ввод и отображение пластин



а)

б)

Рис. 2.80. а) Ввод трехузловых пластин, б) ввод четырехузловых пластин

Жесткость пластины задаётся аналогично стержням, но тут важен только один размер – толщина.

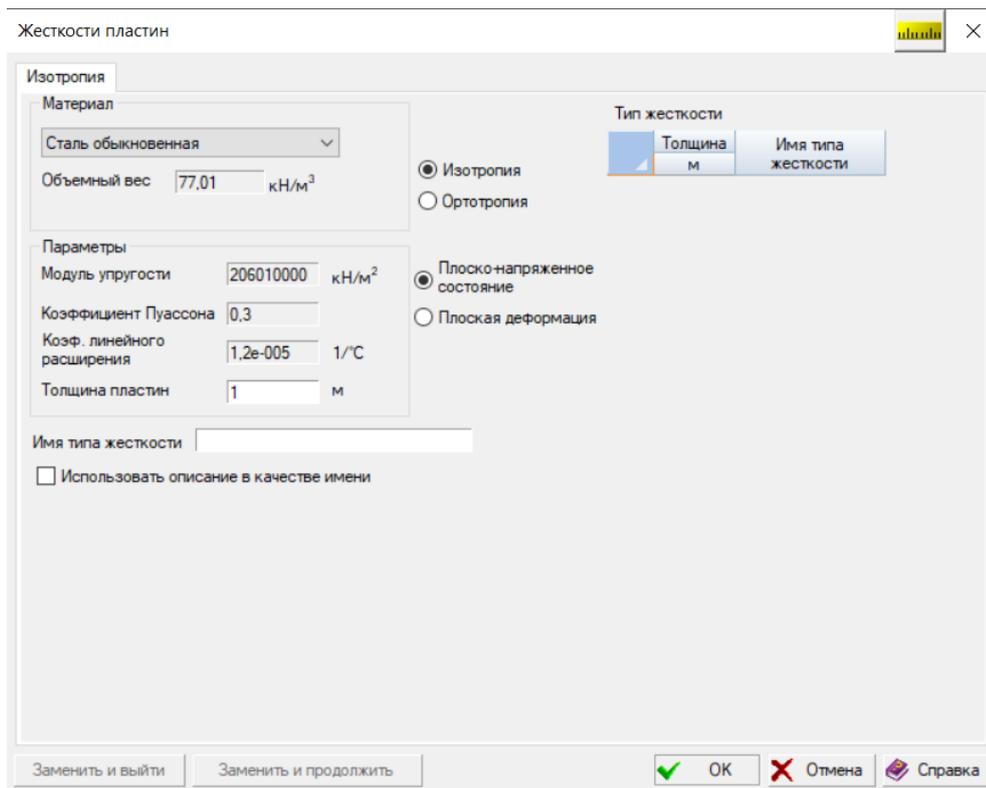


Рис. 2.81. Жёсткость пластин

После подтверждения ввода данных на рис. 2.81 выбираем на схеме узлы, поочередно выбирая левой кнопкой мышки, или задаём списком с номерами. Подтверждаем выделение – получаем пластины (рис. 2.82)

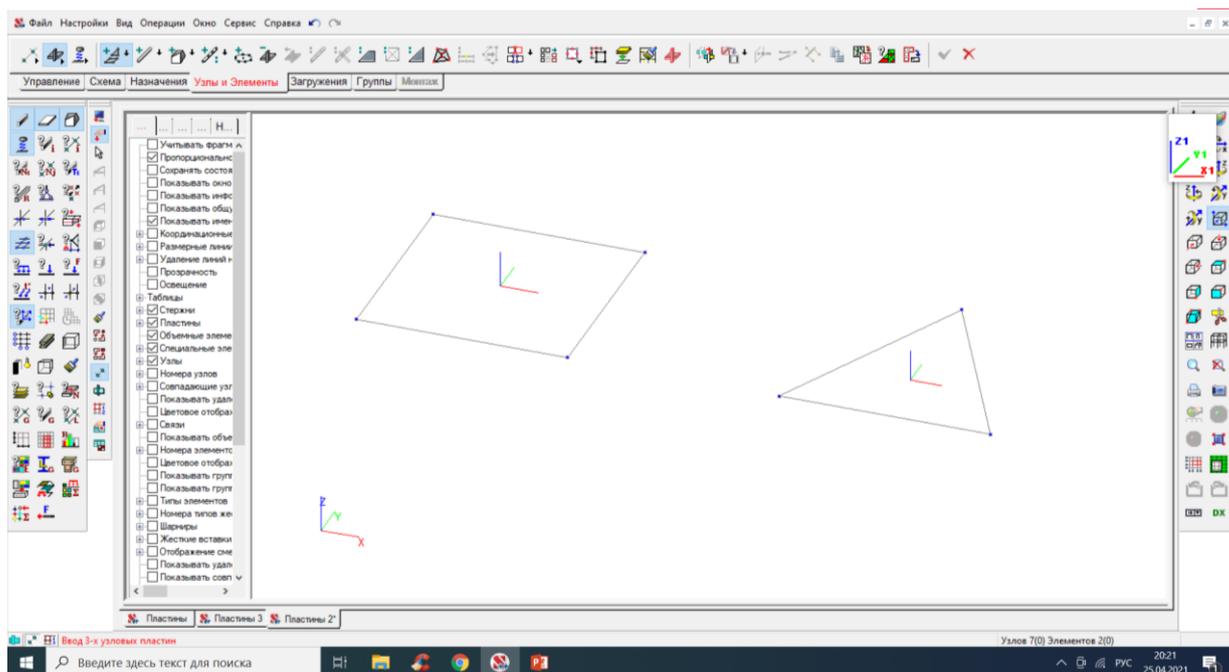


Рис. 2.82. Пластины

Рассмотрим далее операции на вкладке Элементы, которые можно производить с пластинами:



Рис. 2.83. Операции с пластинами

- Дробление 4-узловых пластин (рис. 2.84)
- Дробление 3-узловых пластин (рис. 2.84)
- Дробление пластин с учетом промежуточных узлов (рис. 2.85)
- Присоединение/ отсоединение дополнительных узлов
- Дробление пластин по линии пересечения (рис. 2.86)
- Объединение 3-узловых пластин в 4-узловые.

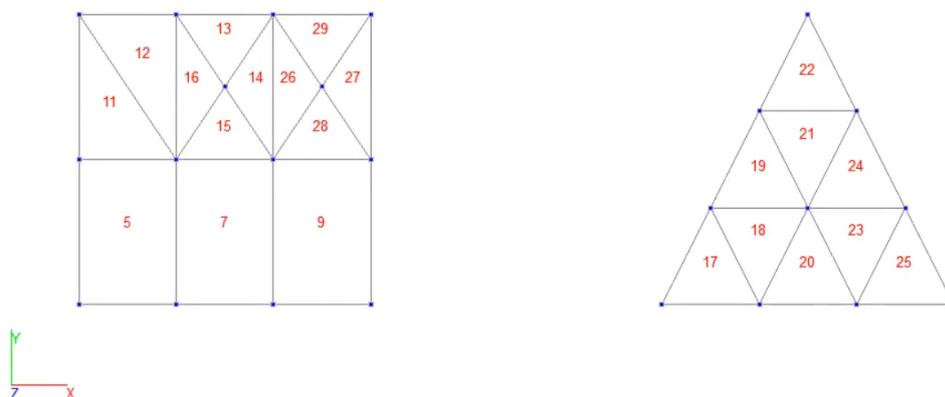


Рис. 2.84. Дробление пластин

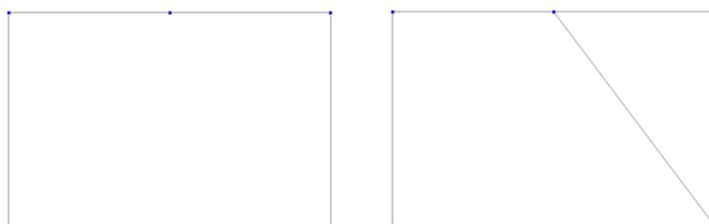


Рис. 2.85. Дробление пластин с учетом промежуточных узлов

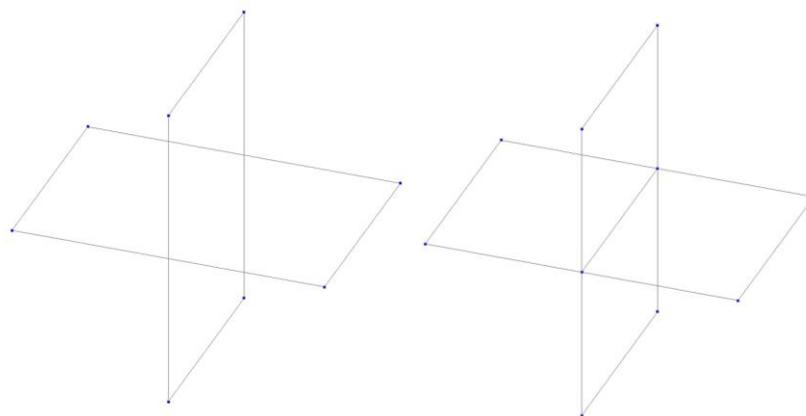


Рис. 2.86. Дробление пластин по линии пересечения

Помимо назначения жесткостей на вкладке Жёсткости можно производить следующие операции с пластинами:

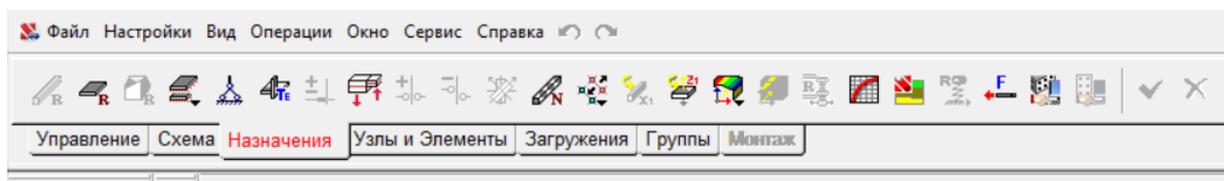


Рис. 2.87. Вкладка Назначения

- Назначение упругого основания
- Изменение срединной плоскости
- Изменение направления оси Z
- Переход к напряжениям вдоль заданного направления для пластин

Рассмотрим команды на вкладке Схема, которые позволяют загружать готовые схемы конструкций

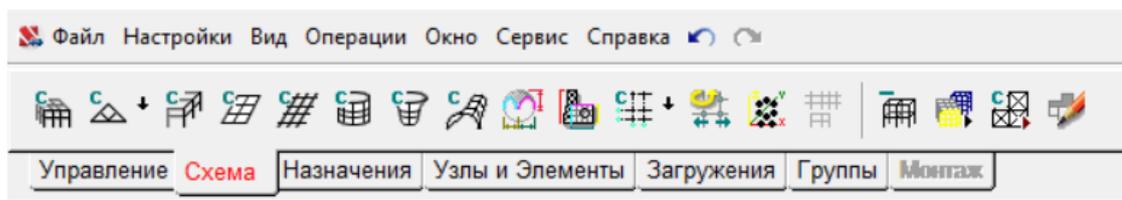


Рис. 2.88. Вкладка Схема

- Генерация прямоугольной сетки элементов на плоскости

- Создание поверхности вращения
- Генерация произвольной сетки элементов на плоскости

Как уже упоминалось при рассмотрении теории МКЭ, для расчёта каждый элемент делится на более мелкие конечные элементы. Иногда пользователь производит это самостоятельно, но есть и автоматический режим такого деления. Данная операция называется триангуляция — разбиение геометрического объекта на симплексы (simple – англ. простой), то есть более простые элементы. Например, на плоскости это разбиение на треугольники, откуда и происходит это название от английского triangle – треугольник.

Рассмотрим создание сетки в режиме Генерация произвольной сетки на плоскости вкладки Схема. Задаём контур с отверстиями и генерацию сетки КЭ элементов на плоскости.

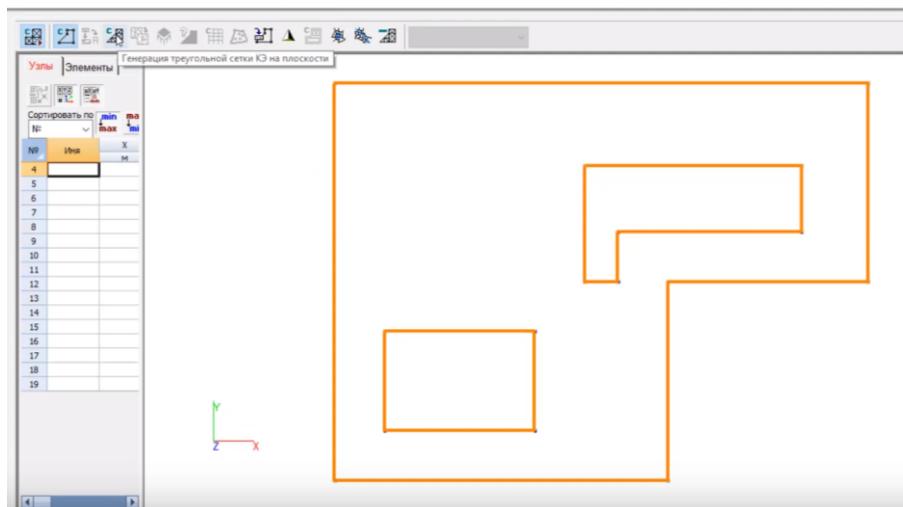


Рис. 2.89. Контур с отверстиями

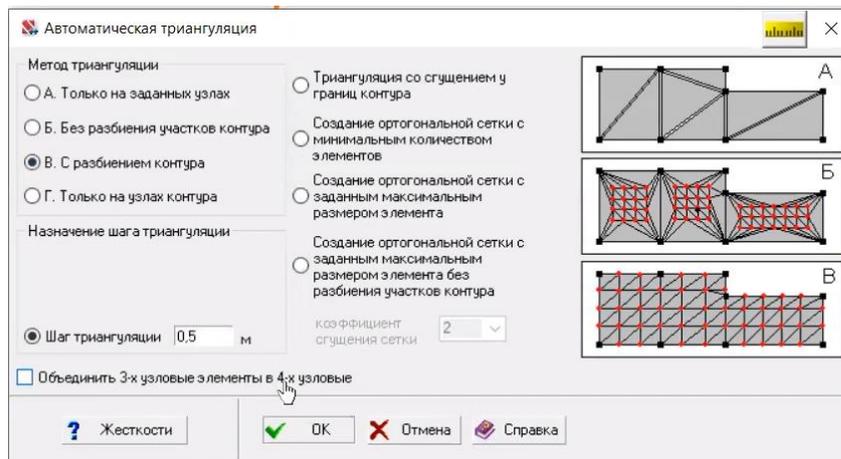


Рис. 2.90. Автоматическая триангуляция

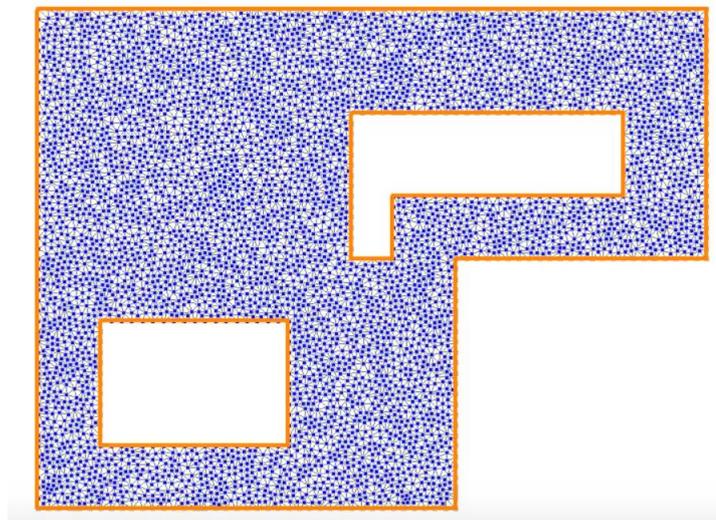


Рис. 2.91. Автоматическая триангуляция контура

Рассмотрим расчёт пластины, созданной через вкладку Схема – Генерация пластинчатой схемы, закреплённой по трём сторонам (опоры у пластин ставятся в узлы, как и в случае со стержнями).

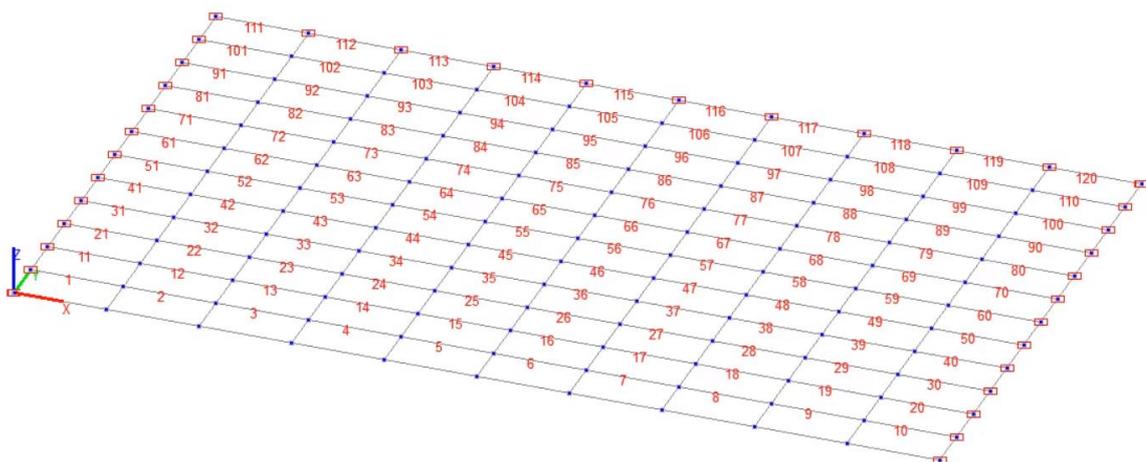


Рис. 2.92. Пластина

Задаём распределенную нагрузку на всю пластину (рис. 2.93), сохраняем загрузку, производим Линейный расчёт и переходим к просмотру Результатов расчета. Для начала смотрим деформированную схему (рис. 2.94). Прогиб максимален в середине пролёта и равен нулю на опорах. Сама пластина оказалась окрашена в серый цвет, как так вышло?

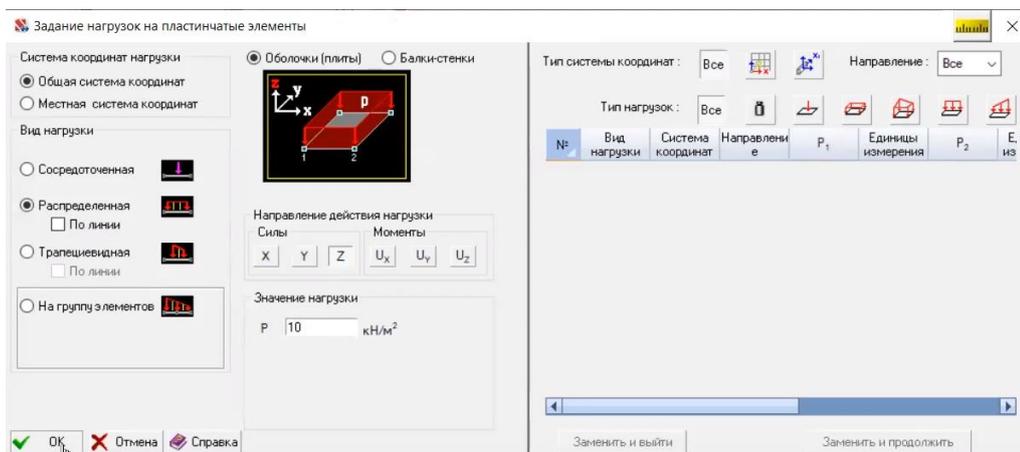


Рис. 2.93. Загрузка пластины нагрузкой

Для более наглядного восприятия схемы была включена команда удаление линий невидимого контура на панели фильтров (рис.95). Помимо заливки пластин серым (чтобы было удобнее визуальнo отличить их от стержней), можно отобразить толщину пластины, а также профиль стержня – двутавр и швеллер будут смотреться на картинке намного нагляднее – хотя для расчёта эта команда никаких функций не несёт.

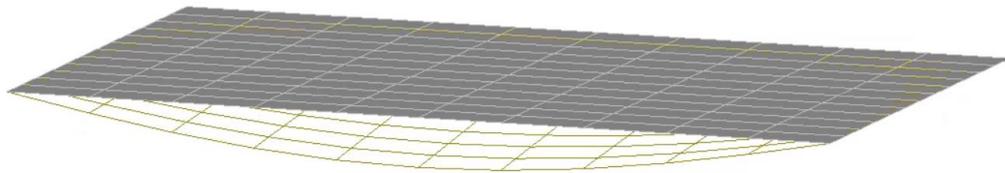


Рис. 2.94. Деформированная схема пластины

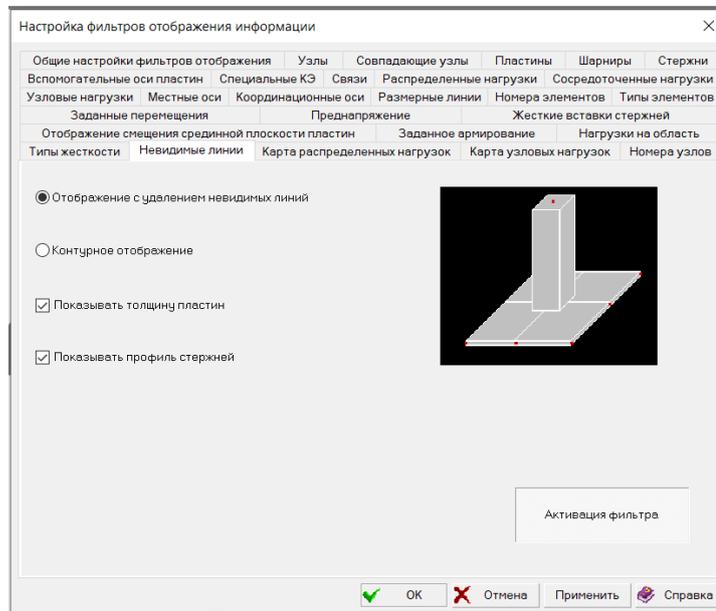


Рис. 2.95. Настройка фильтров отображения информации

Переходим к анализу усилий. Однако вкладка Эпюры усилий неактивна – действительно, эпюр в классическом понимании в пластинах нет. Зато активна следующая по порядку вкладка Поля напряжений - именно тут находится то, что нас интересует. На рис. 2.96 представлены возможные усилия и напряжения, которые могут быть отображены в пластинах.

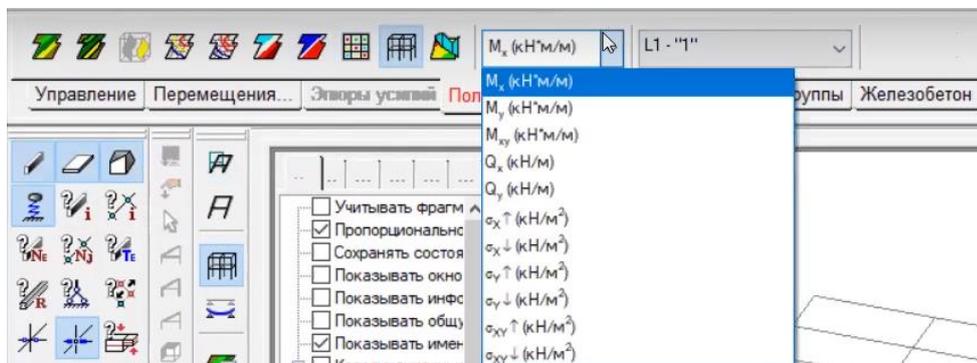


Рис. 2.96. Вкладка Поля напряжений

На рис. 2.97 показаны напряжения (усилия)  $M_y$  в пластине.

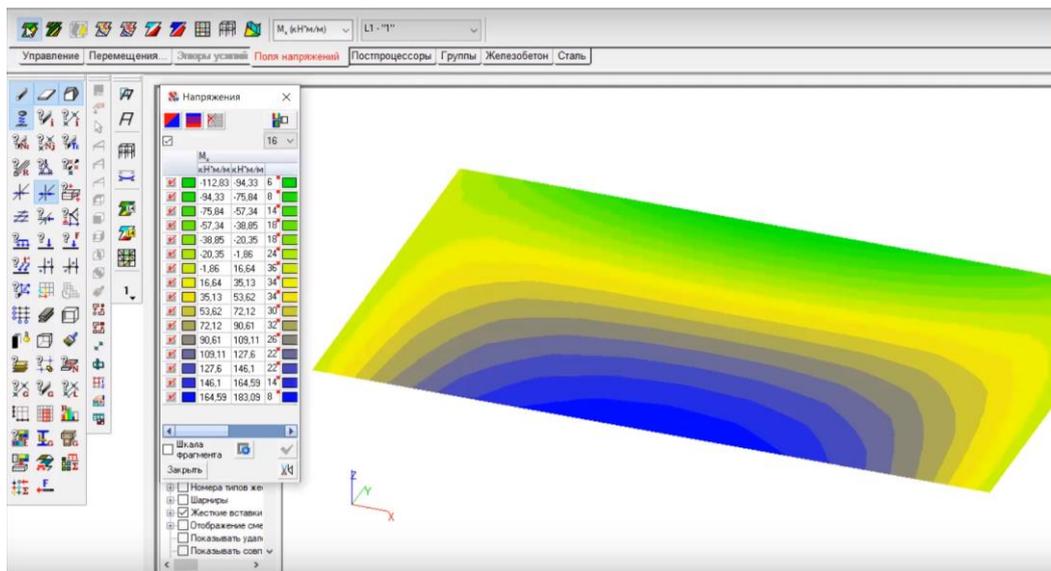


Рис. 2.97. Напряжения (усилия) в пластине

Рассмотрим далее создание поверхности вращения из пластинчатых элементов на вкладке Схема. Создадим цилиндр с указанными параметрами (рис.98) и жёсткостью (рис.99).

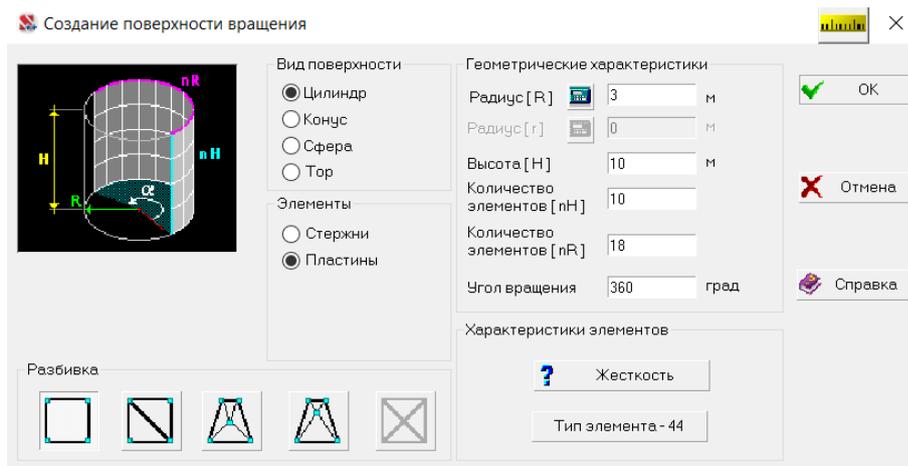


Рис. 2.98. Создание поверхности вращения

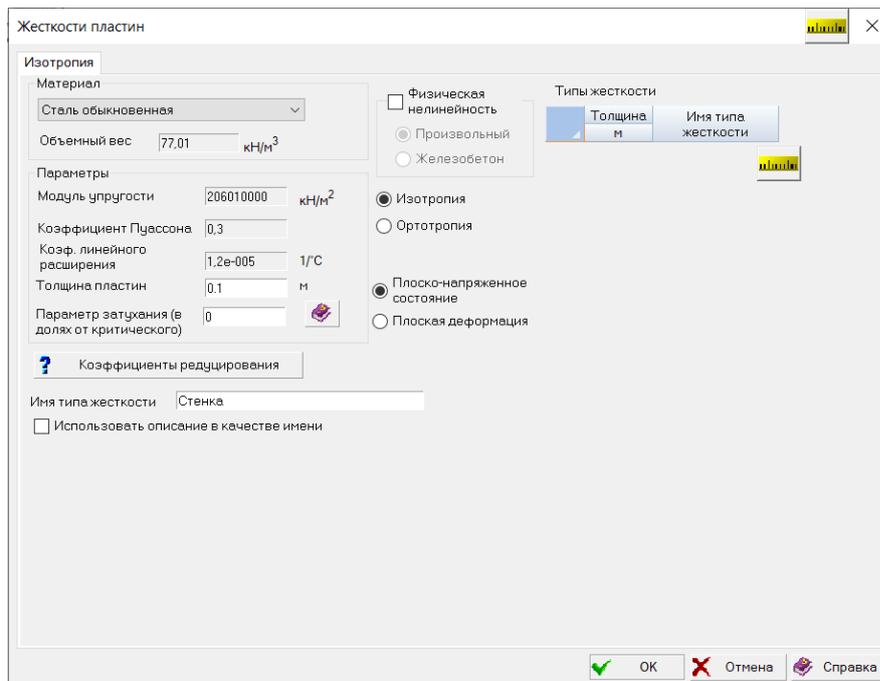


Рис. 2.99. Назначение жёсткости стенки цилиндра

Обратим внимание на тип элемента на рис. 2.98 – тип элемента 44, четырёхугольный конечный элемент (КЭ) оболочки

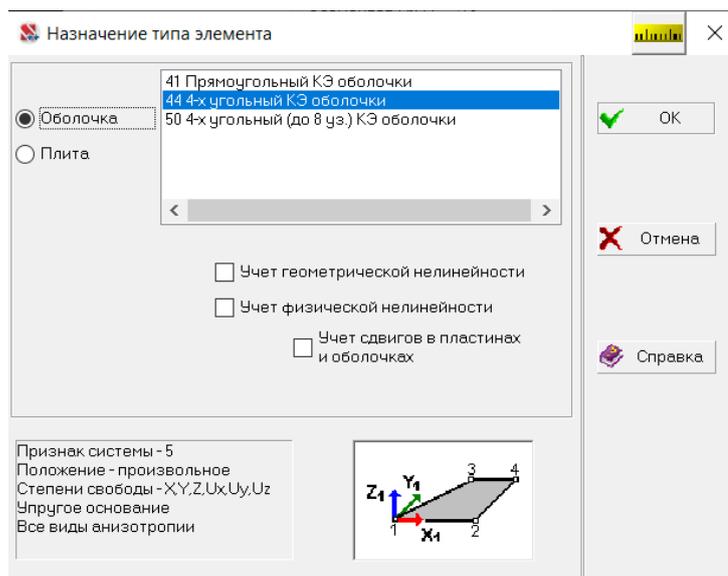


Рис. 2.100. Тип элемента

Получаем результат: на рис. 2.101, а, представлена стандартная схема цилиндра, на рис. 2.101, б, показана схема с использованием команды рис. 2.95 (удаления линий невидимого контура и отображения толщины пластины).

Проиллюстрируем далее возможности масштабирования в заданной плоскости: Схема – Геометрические преобразования. Увеличим диаметр двух верхних и двух нижних поясов цилиндра в два раза.

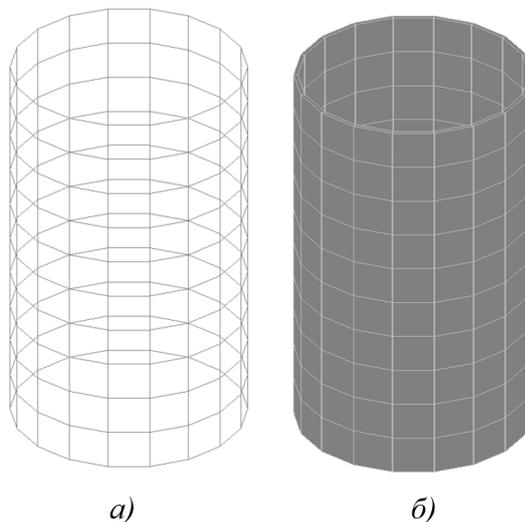


Рис. 2.101. а) Схема цилиндра, б) отображение линий невидимого контура

Для этого выбираем узлы указанных поясов командой Отметка узлов (нижний левый угол экрана) (рис. 2.102) и открываем команду Геометрические преобразования (рис. 2.103) – масштабируем в заданной плоскости в 2 раза.

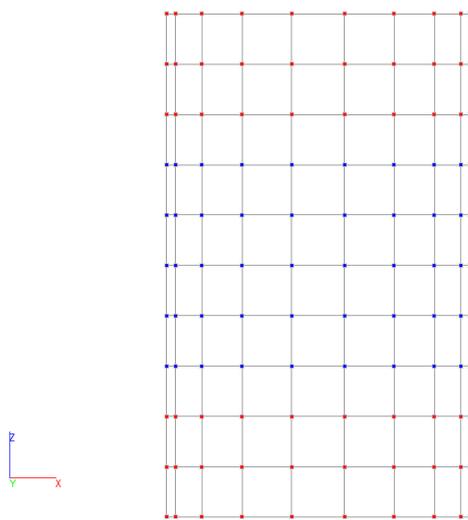
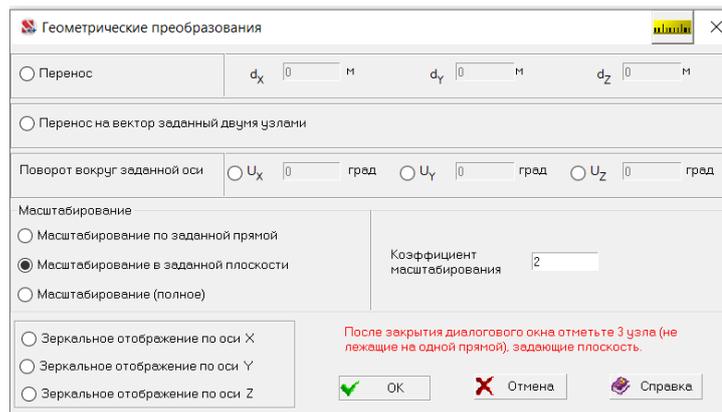
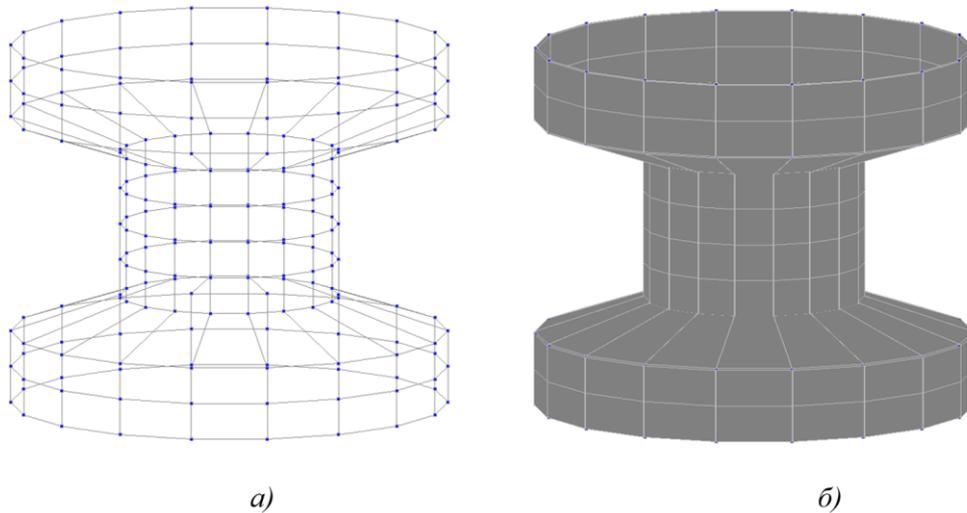


Рис. 2.102. Выбор узлов



*Рис. 2.103. Геометрические преобразования*

После подтверждения команды выбираем 3 узла любого уровня из отмеченных и получаем обновлённую схему – рис. 2.104, а – и с удалением линий невидимого контура и отображением толщины пластин – рис. 2.104, б.



*Рис. 2.104. Схема цилиндра*  
*а) обновлённая схема цилиндра*  
*б) отображение с удалением линий невидимого контура*