

Нелинейный анализ строительных конструкций

Оглавление

Тема 1. Физическая нелинейность	2
Лекция 1. Расчет металлических конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 1	2
Лекция 2. Расчет металлических конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 2 ...	26
Лекция 3. Расчет железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 1 .	36
Лекция 4. Расчет железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 2 .	51
Тема 2. Геометрическая нелинейность.....	69
Лекция 5. Расчет конструкций с учетом геометрической нелинейности по деформированной схеме	69
Тема 3. Конструктивная нелинейность.....	94
Лекция 6. Методы расчета сооружений с учетом конструктивной нелинейности	94
Тема 4. Генетическая нелинейность	120
Лекция 7. Методы расчета конструкций с учетом генетической нелинейности	120

Тема 1. Физическая нелинейность

Лекция 1. Расчет металлических конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 1

Современный инженер должен обладать ясным представлением об особенностях деформирования несущих конструкций различной формы под нагрузкой и уметь проводить их расчет на прочность и жёсткость. При обучении инженеров-строителей эти вопросы изучаются в таких курсах как «Сопротивление материалов», «Строительная механика», «Теория упругости и пластичности».

В начале изложения освежим информацию о напряжениях и деформациях в точке тела, поскольку в дальнейшем на эти формулы и соотношения мы будем ссылаться.

Как известно, напряженно-деформированное состояние в точке тела характеризуется **тензором напряжений и тензором деформаций**.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{yx} & 1/2\gamma_{zx} \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{zy} \\ 1/2\gamma_{xz} & 1/2\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные напряжения (в направлении осей x, y, z);

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — касательные напряжения;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — линейные деформации (в направлении осей x, y, z);

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ — угловые деформации (углы сдвига).

Тензор напряжений может быть представлен в виде двух составляющих

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^{\text{ш}} + D_{\sigma} \quad (1.3)$$

$T_{\sigma}^{\text{ш}}$ — шаровой тензор напряжений

$$T_{\sigma}^{\text{ш}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

D_σ – девиатор напряжений

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\text{где } \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Шаровой тензор напряжений соответствует равномерному всестороннему растяжению или сжатию в точке тела.

В теории пластичности широко используется понятие **интенсивности касательных напряжений** τ_i , которое формально определяется как корень квадратный из второго инварианта девиатора напряжений:

$$\tau_i = 2\sqrt{j_2^D} = \sqrt{\frac{1}{6}((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2))} \quad (1.6)$$

и представляет собой касательное напряжение на октаэдрической площадке, т.е. на площадке, равнонаклонной ко всем трём главным напряжениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Интенсивность напряжений определяется по формуле:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\sqrt{j_2^D} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2))} \quad (1.7)$$

$$\text{при этом } \sigma_i = \sqrt{3}\tau_i \quad (1.7a)$$

Соответственно, тензор деформаций может быть представлен также в виде двух составляющих

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^{\text{ш}} + D_\varepsilon$$

$T_\varepsilon^{\text{ш}}$ – шаровой тензор деформаций

$$T_\varepsilon^{\text{ш}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

D_ε – девиатор деформаций

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & 1/2\gamma_{yx} & 1/2\gamma_{zx} \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & 1/2\gamma_{zy} \\ 1/2\gamma_{xz} & 1/2\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

средняя деформация

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (1.9a)$$

Шаровой тензор деформаций характеризует объёмную деформацию в точке тела, а девиатор деформаций – деформацию изменения формы.

В теории пластичности также используется понятие **интенсивности деформаций сдвига** γ_i , которое формально определяется как удвоенный корень квадратный из второго инварианта девиатора деформаций

$$\gamma_i = 2\sqrt{J_2^D} = 2\sqrt{\frac{1}{6}((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2) + \frac{3}{2}[(\gamma_{xy})^2 + (\gamma_{yz})^2 + (\gamma_{zx})^2]} \quad (1.10)$$

и представляет собой деформацию сдвига на октаэдрической площадке.

Кроме интенсивности деформации сдвига пользуются также понятием **интенсивности деформаций**:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}[(\gamma_{xy})^2 + (\gamma_{yz})^2 + (\gamma_{zx})^2]} \quad (1.11)$$

при этом

$$\varepsilon_i = 1/\sqrt{3}\gamma_i \quad (1.11a)$$

При расчёте элементов конструкций за пределами упругости часто пользуются приращениями деформацией и скоростями деформаций.

Тензор приращений деформаций имеет вид

$$T_{d\varepsilon} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x & 1/2d\gamma_{xy} & 1/2d\gamma_{xz} \\ 1/2d\gamma_{yx} & d\varepsilon_y & 1/2d\gamma_{yz} \\ 1/2d\gamma_{zx} & 1/2d\gamma_{zy} & d\varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.11б)$$

Тензор приращение деформаций можно представить в виде суммы шарового тензора приращений деформаций и девиатора приращений деформаций

$$T_{d\varepsilon} = T_{d\varepsilon}^{\text{III}} + D_{d\varepsilon} \quad (1.11в)$$

$T_{d\varepsilon}^{\text{III}}$ – **шаровой тензор приращений деформаций**

$$T_{d\varepsilon}^{\text{III}} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1.11г)$$

$D_{d\varepsilon}$ – **девиатор приращений деформаций**

$$D_{d\varepsilon} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x - d\varepsilon_0 & 1/2d\gamma_{xy} & 1/2d\gamma_{xz} \\ 1/2d\gamma_{yx} & d\varepsilon_y - d\varepsilon_0 & 1/2d\gamma_{yz} \\ 1/2d\gamma_{zx} & 1/2d\gamma_{zy} & d\varepsilon_z - d\varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1.11д)$$

Интенсивность приращения деформаций

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}[(d\gamma_{xy})^2 + (d\gamma_{yz})^2 + (d\gamma_{zx})^2]} \quad (1.11е)$$

По аналогии вводится понятие для **интенсивности приращения пластических деформаций**:

$$d\varepsilon_i^n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x^n - d\varepsilon_y^n)^2 + (d\varepsilon_y^n - d\varepsilon_z^n)^2 + (d\varepsilon_z^n - d\varepsilon_x^n)^2 + \frac{3}{2}[(d\gamma_{xy}^n)^2 + (d\gamma_{yz}^n)^2 + (d\gamma_{zx}^n)^2]} \quad (1.11ж)$$

$$\text{где } d\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z)$$

Если обозначить

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \xi_x; \quad \frac{d\varepsilon_y}{dt} = \xi_y; \quad \frac{d\varepsilon_z}{dt} = \xi_z; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \eta_{xy}; \quad \frac{d\gamma_{yz}}{dt} = \eta_{yz}; \quad \frac{d\gamma_{zx}}{dt} = \eta_{zx},$$

то данные величины образуют **тензор скоростей деформаций**

$$T_\xi = \begin{pmatrix} \xi_x & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_y & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{zx} & \frac{1}{2}\eta_{zy} & \xi_z \end{pmatrix} \quad (1.11з)$$

который можно представить в виде **шарового тензора скоростей деформаций**

$$T_\xi^{\text{III}} = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1.11к)$$

и **девиатора скоростей деформаций**

$$D_\xi = \begin{pmatrix} \xi_x - \xi_0 & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_y - \xi_0 & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{zx} & \frac{1}{2}\eta_{zy} & \xi_z - \xi_0 \end{pmatrix} \quad (1.11л)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{3}(\xi_x + \xi_y + \xi_z) \quad \text{где } \xi_0 \text{ — средняя скорость деформации.}$$

Интенсивность скорости деформаций определяется по формуле

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)} \quad (1.11м)$$

После того как мы освежили представление о напряжениях и деформациях в точке тела, перейдем к основным гипотезам и уравнениям теории упругости.

Рассматривается тело заданной формы, материал которого имеет известные механические свойства. На тело действуют заданные нагрузки и наложены некоторые связи. Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в теле.

При решении подобных задач вводятся следующие допущения:

1. Материал тела представляет собой сплошную среду.
2. Материал тела считается однородным.
3. Материал тела считается изотропным, т.е. его механические свойства в каждой точке одинаковы во всех направлениях.

4. Деформации в точках тела (относительные удлинения ε и углы сдвига γ) считаются малыми. Это допущение говорит о том, что под действием нагрузки размеры тела существенно не меняются.

5. Материал тела является идеально упругим (форма и размеры тела полностью восстанавливаются после устранения причин, вызывающих деформации), а между деформациями и напряжениями существует линейная зависимость (закон Гука).

Для решения задачи теории упругости в данной постановке используются следующие уравнения:

1. Статические уравнения:

а) дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

где X, Y, Z - проекции объемных сил, отнесенных к единице объема;

б) статические граничные условия (условия на поверхности)

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = p_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = p_y \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = p_z \end{cases} \quad (1.13)$$

здесь $l = \cos(\hat{x}\nu)$, $m = \cos(\hat{y}\nu)$, $n = \cos(\hat{z}\nu)$

ν — нормаль плоскости, касательной к поверхности тела;

p_x, p_y, p_z – проекции поверхностной нагрузки на оси координат x, y, z соответственно.

2. Геометрические уравнения:

а) связь между деформациями и перемещениями (уравнения Коши)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{cases} \quad (1.14)$$

здесь u, v, w – компоненты перемещения, параллельные соответствующим осям x, y, z .

б) уравнения неразрывности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

3. Физические уравнения:

а) обобщенный закон Гука для изотропного тела.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)};$$

здесь E и G - модули упругости при растяжении и сдвиге, соответственно, а μ – коэффициент Пуассона.

Обобщенный закон Гука может быть записан в другой форме - в форме Лямэ:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta; & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

где $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$$\lambda = \frac{2\mu G}{(1 - 2\mu)}$$

При решении задач теории упругости необходимо определить поле перемещений u, v, w ; поле деформаций, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$; поле напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Для нахождения пятнадцати неизвестных в линейной теории упругости имеется пятнадцать уравнений: (1.12), (1.14) и (1.16). Найденные пятнадцать функций должны удовлетворять статическим граничным условиям (1.13) и уравнениям неразрывности деформаций (1.15).

Приведенные пятнадцать уравнений линейной теории упругости решают разными методами в зависимости от того, какие неизвестные функции (перемещения или напряжения) принимают за основные. Поэтому одну и ту же задачу теории упругости можно решать в перемещениях, напряжениях или смешанным способом, используя определенную систему дифференциальных уравнений.

В настоящее время основная задача строительной механики формулируется в широком плане: расчёт конструкций должен дать исчерпывающее представление об их работе на всех этапах нагружения (включая этап разрушения). Очевидно, что в такой постановке эта задача не может быть решена методами линейной строительной механики. Действительно, форма и размеры конструкции при определенных нагрузках существенно изменяются и принцип малости перемещений становится неприемлемым. Далее, начиная с определенного уровня напряженного состояния закон Гука у всех материалов

перестает соблюдаться и заменяется нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями.

Отсюда следует, что для решения основной задачи расчета конструкций нужно отказаться от простых предпосылок линейной теории и перейти к более широким и сложным обоснованиям нелинейной теории.

Прежде всего, нужно отказаться от предпосылки расчёта по недеформированному состоянию, который предполагает малость перемещений. При этом возникает нелинейность, называемая **геометрической нелинейностью**. В этом случае в теорию вводят нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями, которые позволяют учитывать влияние изменения формы и размеров конструкции на её напряженно-деформированное состояние.

Замена закона Гука нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями составляет сущность так называемой **физической нелинейности**.

Известна классификация задач нелинейной теории упругости, составленной В.В. Новожиловым [1], которая предусматривает четыре типа этих задач: 1) линейные физически и геометрически; 2) нелинейные физически, линейные геометрически; 3) линейные физически, нелинейные геометрически; 4) нелинейные физически и геометрически. Эта классификация была составлена в середине прошлого века, когда введение в расчет двух видов нелинейности представляло определенные трудности для получения решения. В настоящее время с развитием вычислительной техники и численных методов расчета эти задачи не представляют непреодолимых трудностей.

Приведенная выше классификация может быть расширена с введением в нее понятий **конструктивной и генетической нелинейности**, о которых мы будем рассказывать в других лекциях.

Рассмотрим более подробно вопросы учёта физической нелинейности материала в расчётах, в т.ч. в **расчётах металлических конструкций**.

Поведение большинства конструкционных материалов (в том числе металлов) характеризуется отклонением от закона Гука, связанным с явлением

пластичности и образованием остаточной (пластической) деформации после разгрузки.

Представление о сопротивлении твёрдого тела изменению формы дают опыты по растяжению цилиндрических образцов под действием постепенно увеличивающейся силы P . В верхней части рисунка 1 нанесены диаграммы растяжения мягкой стали и меди, а в нижней части - диаграммы сжатия этих материалов.

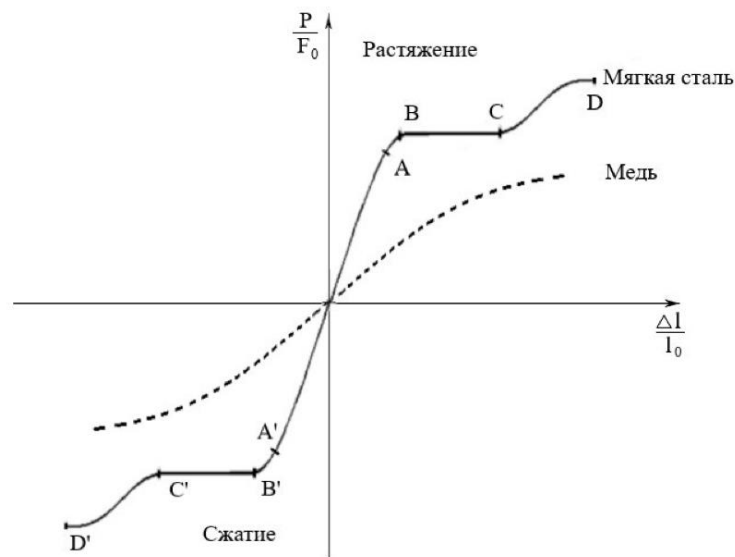


Рис.1. Диаграмма растяжения/сжатия для меди и мягкой стали

По вертикали отложено напряжение, P/F_0 , где F_0 – начальная площадь сечения стержня, а по горизонтали - относительное удлинение, $\Delta l/l_0$, где l_0 – начальная длина образца. Точка А соответствует так называемому пределу пропорциональности и лежит несколько ниже предела упругости (точка В), после которого уже появляются остаточные деформации и удлинения быстро увеличиваются; обнаруживается характерная площадка текучести ВС, за которой напряжение вновь начинает возрастать. Участок CD характеризует состояние упрочнения материала.

Диаграмма сжатия таких материалов подобна диаграмме растяжения, хотя напряжения, отвечающие точкам A' , B' , C' , D' по величине обычно несколько больше напряжений, соответствующих точкам А, В, С, D. Напряжение, характерное для площадки ВС называется пределом текучести σ_t .

Для некоторых пластических металлов (например, отожженная медь, алюминий и др.) кривая растяжения лишена площадки текучести и практически не имеет прямолинейного участка; остаточные деформации обнаруживаются при самых незначительных нагрузках.

Если нагрузку уменьшить, то кривая разгрузки ABC (рис. 2) в общем близка к прямой линии; последняя имеет такой же наклон, как и линия упругого участка; величина остаточной деформации измеряется отрезком OC.

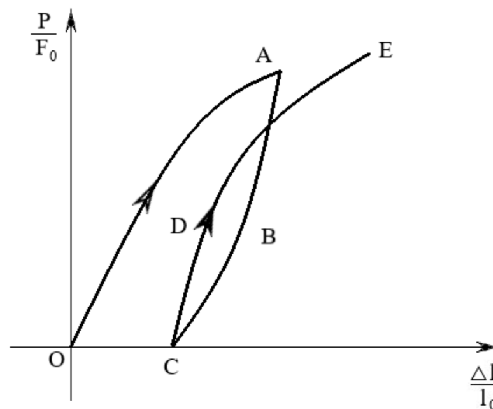


Рис.2. Диаграмма растяжения. Кривая разгрузки.

Опыты с чистым сдвигом (кручением трубы) приводят к кривым деформации, вполне аналогичным кривым растяжения. В теории пластичности кривые деформации обычно схематизируют. На рисунке 3 показана подобная схема зависимости между деформацией сдвига γ и касательным напряжением τ в опытах с чистым сдвигом. В начале при $\tau < \tau_s$ материал подчиняется закону Гука.

$$\tau = G\gamma$$

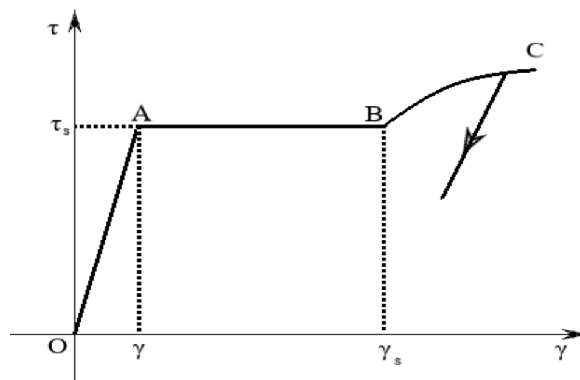


Рис.3. Схема зависимости между деформацией сдвига γ и касательным напряжением τ в опытах с чистым сдвигом

Затем наступает фаза текучести АВ, характеризующаяся нарастанием деформации сдвига при неизменном касательном напряжении

$$\tau = const = \tau_s$$

Это состояние продолжается до тех пор, пока γ не достигнет величины γ_s , которую условно называют **предельным сдвигом текучести**. С этого момента материал переходит в фазу упрочнения ВС, где

$$\tau = g(\gamma)\gamma$$

Как ранее отмечалось, для установления связи между напряжениями и деформациями в условиях одноосного напряжённого состояния на основании эксперимента строят диаграмму растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ (см. рис. 1). Причём напряжения и деформации определяются как

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

При этом не учитывается изменение первоначальной площади поперечного сечения образца F_0 и предполагается равномерное деформирование образца по его длине l_0 . График зависимости между напряжениями и деформациями, построенный без учёта изменения площади поперечного сечения испытываемого образца, называется **условной диаграммой растяжения**. Для построения **действительной диаграммы растяжения** до образования шейки необходимо растягивающую силу относить к действительной площади поперечного сечения образца

$$\sigma_g = \frac{P}{F};$$

До образования шейки условную деформацию можно считать равной действительной деформации [2,3]. После того как образовалась шейка, напряжённое состояние в образце становится **неодноосным и неоднородным**. В этом случае нужно строить только действительную диаграмму деформирования на основании анализа напряжённого состояния в шейке.

Решение задачи о напряжённом состоянии в точках наименьшего поперечного сечения шейки растянутого образца приведены в ряде работ [3,4,5]. Выражения для интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i при одноосном

напряжённом состоянии $\left(\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \varepsilon_1 = \varepsilon; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2}\right)$ с учётом формул (1.7) и (1.11) имеют вид:

$$\sigma_i = \sigma; \varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma \quad (1.19)$$

По формулам (1.19) и диаграмме растяжения материала можно подсчитать σ_i и ε_i , а также построить соответствующую диаграмму деформирования.

Если материал несжимаемый ($\varepsilon_0=0$ или $\mu = 0,5$), то из формулы (1.19) следует, что диаграмма деформирования материала совпадает с диаграммой растяжения.

Для аналитического описания зависимостей между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i за пределами упругости диаграммы деформирования (так же, как и диаграммы растяжения) схематизируются, т.е. отдельные участки заменяются кривыми или прямыми линиями, имеющими достаточно простое математическое описание и хорошо совпадающими с экспериментально полученными диаграммами.

Примеры аппроксимации некоторых С приведены на рисунках 4 а, б, в, г, д, е.

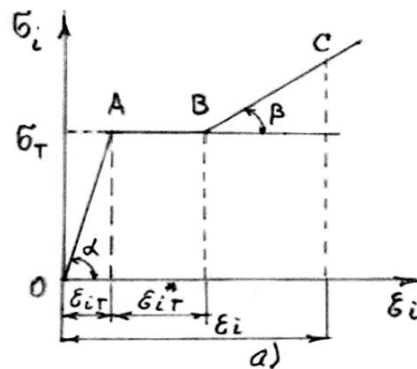


Рис. 4а. Диаграмма деформирования с площадкой текучести и линейным упрочнением

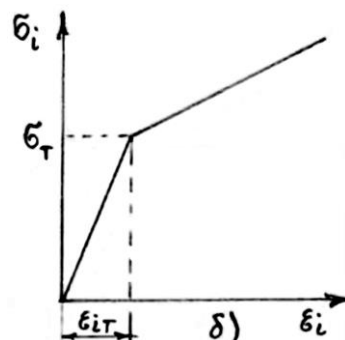


Рис. 4б. Диаграмма деформирования при отсутствии площадки текучести

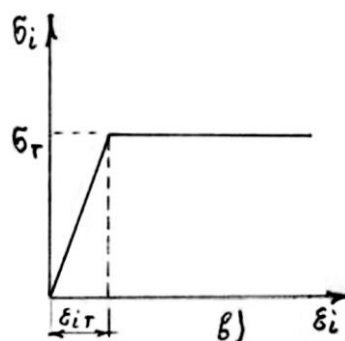


Рис. 4в. Диаграмма деформирования идеально упруго-пластического тела

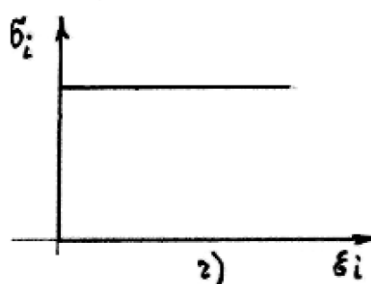


Рис. 4г. Диаграмма деформирования жёстко-пластического тела

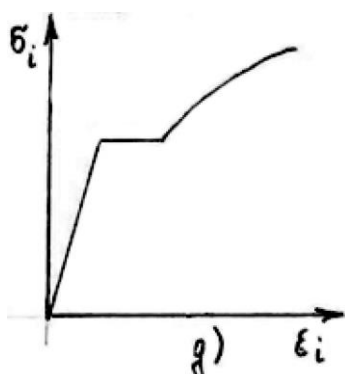


Рис. 4д. Диаграмма деформирования с площадкой текучести и степенным упрочнением

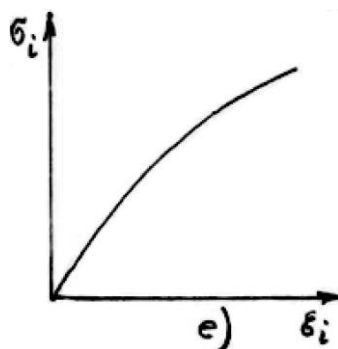


Рис. 4е. Диаграмма деформирования, в которой отсутствует площадка текучести и диаграмма аппроксимируется степенной функцией не только в области упрочнения, но и во всем интервале изменения деформаций

На рисунке 4а приведена диаграмма деформирования с площадкой текучести и линейным упрочнением. Аналитическая зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформации ε_i для такой диаграммы имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{на участке } OA: \sigma_i &= 3G\varepsilon_i \\ \text{на участке } AB: \sigma_i &= \sigma_T \\ \text{на участке } BC: \sigma_i &= \sigma_T + H(\varepsilon_i - \varepsilon_{iT}^*), \\ \text{где } H & - \text{модуль упрочнения.} \end{aligned} \quad (1.20)$$

На рисунке 4б представлена диаграмма деформирования при отсутствии площадки текучести; на рисунке 4в – диаграмма деформирования идеально упруго-пластического тела; на рисунке 4г – диаграмма деформирования жёстко-пластического тела; на рисунке 4д – диаграммы деформирования с площадкой текучести и степенным упрочнением; на рисунке 4е – диаграмма деформирования, в которой отсутствует площадка текучести и диаграмма аппроксимируется степенной функцией не только в области упрочнения, но и во всем интервале изменения деформаций.

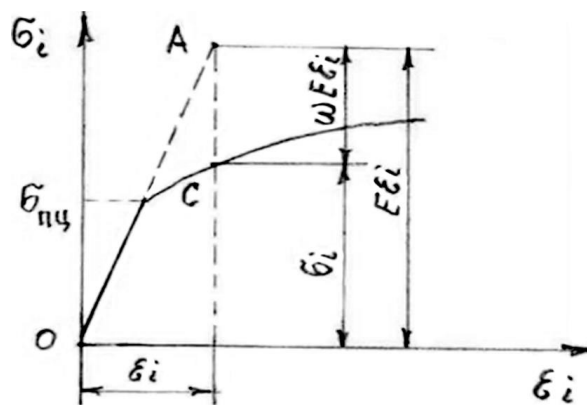


Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i записывают в форме, предложенной А.А. Ильюшиным

Очень часто зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i записывают в форме, предложенной А.А. Ильюшиным [6], см. рисунок 5.

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)], \quad (1.21)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – безразмерная функция интенсивности деформаций, которую называют функцией Ильюшина; $0 \leq \omega(\varepsilon_i) \leq 1$. При напряжениях меньше предела пропорциональности материала ($\sigma_{\text{пц}}$) функция $\omega(\varepsilon_i) = 0$, а за пределами упругости, где зависимость $\sigma_i - \varepsilon_i$ носит нелинейный характер $\omega(\varepsilon_i) \neq 0$. Диаграмму деформирования можно задавать в виде таблицы.

Критерии пластичности

При решении практических задач необходимо знать, при каких условиях материал в рассматриваемой точке переходит из упругого состояния в пластическое. Такие условия называются **условиями пластичности (или критериями пластичности)**. При одноосном напряжённом состоянии условие пластичности устанавливается опытным путём, пластические деформации возникают, когда

$$\sigma_1 = \sigma_T; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad (1.22)$$

где σ_T - предел текучести при растяжении (постоянная величина для каждого материала).

При чистом сдвиге условие пластичности, полученное экспериментальным путём, имеет вид;

$$\tau = \tau_T \quad (1.23)$$

где τ_T – предел текучести при чистом сдвиге (постоянная величина для каждого материала).

В случае объёмного или плоского напряжённого состояний экспериментально невозможно установить условия пластичности для бесконечного множества соотношений между составляющими напряжений. Поэтому условие пластичности для сложного напряжённого состояния устанавливается гипотетическим путём с последующей экспериментальной проверкой.

Рассмотрим два условия пластичности, наиболее часто используемые на практике, достаточно достоверно определяющие переход материала, в т.ч. металла, из упругого состояния в пластическое.

Первое условие – условие пластичности **Треска-Сен-Венана** гласит, что пластические деформации в материале возникают, когда максимальные касательные напряжения достигают значения, равного пределу текучести при чистом сдвиге

$$\tau_{max} = \tau_T \quad (1.24)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (1.25)$$

Для объёмного напряжённого состояния критерий пластичности записывается в виде:

$$\begin{cases} 2|\tau_1| = |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T \\ 2|\tau_2| = |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T \\ 2|\tau_3| = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_T \end{cases} \quad (1.26)$$

Геометрическая интерпретация

В пространстве главных нормальных напряжений уравнения (1.26) определяют правильную шестигранную призму, осью которой является гидростатическая ось $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ а каждая грань параллельна одной из координатных осей и равнонаклонна к двум другим (рис. 6). В соответствии с условиями текучести при одноосном напряжённом состоянии $\sigma_1 = \sigma_T$ призма отсекает на осях координат отрезки, равные σ_T . Фигура текучести на девиаторной плоскости - правильный шестигранник со стороной $\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T$ (см. рис. 7).

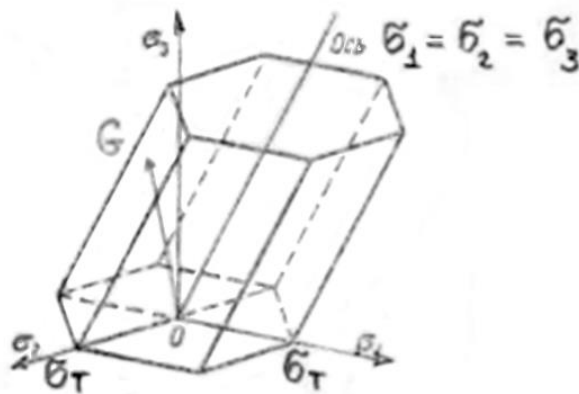


Рис. 6. Геометрическая интерпретация условия пластичности
Треска-Сен-Венана

Если отображающая напряжённое состояние точка G находится внутри призмы, частица деформируется упруго; когда точка G попадает на поверхность призмы, в частице появляется пластическая деформация.

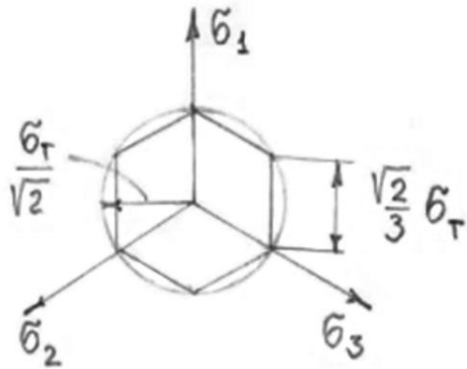


Рис. 7. Геометрическая интерпретация условия пластичности

Треска-Сен-Венана. Сечение

Плоское напряжённое состояние. Если $\sigma_2=0$, то уравнения (1.26) принимают вид:

$$\begin{cases} |\sigma_1| = \sigma_T \\ |\sigma_3| = \sigma_T \\ |\sigma_3 = \sigma_1| = \sigma_T \end{cases} \quad (1.27)$$

На плоскости $\sigma_1\sigma_3$ эти уравнения определяют шестиугольник ABCDEF (см. рис.8). Если точка G, отображающая напряжённое состояние, находится внутри шестиугольника, частица деформируется упруго, если она оказывается на одной из линий, образующих шестиугольник, то в частице возникает пластическая деформация

Другой критерий пластичности предложен Мизесом (называется также **критерием Губера-Мизеса**). Он определяет переход из упругого состояния в пластическое в точке при условии равенства интенсивности напряжений в этой точке пределу текучести, т.е.

$$\sigma_i = \sigma_T$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T \quad (1.28a)$$

В этом случае октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{\text{окт}}$ достигает некоторого постоянного для данного материала предельного значения.

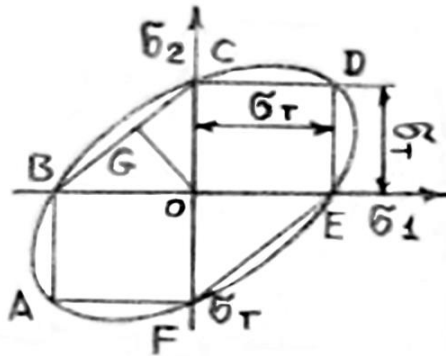


Рис. 8. Геометрическая интерпретация условия пластичности Губера-Мизеса. Сечение

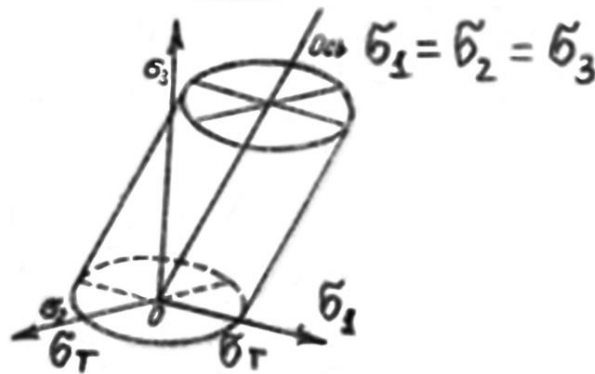


Рис. 9. Геометрическая интерпретация условия пластичности Губера-Мизеса.

Геометрическая интерпретация. По критерию пластичности Губера-Мизеса поверхность текучести представляет собой цилиндр, ось которого равнонаклонна к осям σ_1 , σ_2 , σ_3 (см. рис. 9), и уравнение которого записывается в виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0 \quad (1.29)$$

Радиус окружности цилиндра в плоскости, перпендикулярной его оси, равен $\sigma_T/\sqrt{2}$. Если рассечь цилиндр плоскостью $\sigma_3=0$, то получим в сечении эллипс (см. рис 8), уравнение которого будет

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 \quad (1.29a)$$

Как видно из рисунков 6 и 9, оси призмы Треска-Сен-Венана и цилиндра Губера-Мизеса совпадают (уравнение осей $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), а призма оказывается вписанной в цилиндр.

Для того, чтобы воспользоваться условием пластичности Треска-Сен-Венана, необходимо заранее знать, какое из главных напряжений является максимальным, а какое минимальным. Для использования условия пластичности Губера-Мизеса вообще нет надобности в определении главных напряжений, это условие может быть выражено через компоненты тензора напряжений:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_T^2 \quad (1.296)$$

Во многих случаях использование условия пластичности Губера-Мизеса при решении задач оказывается более удобным, чем условия Треска-Сен-Венана. Также следует отметить, что многочисленные опыты, проведенные для плоского напряженного состояния, показывают, что экспериментальные результаты лучше согласуются с критерием пластичности Губера-Мизеса.

Итак, мы можем определить напряжение, при достижении которого материал в окрестностях точки перестает быть упругим и в нем начинаются пластические деформации.

При одноосном напряженном состоянии это σ_T – предел текучести, определяемый опытным путем из опытов на простое растяжение образцов материала.

При сложном напряженном состоянии (двухосном или трехосном) переход материала в окрестностях точки в неупругое (пластическое) состояние в процессе нагружения характеризуется достижением компонентами тензора напряжений в этой точке таких значений, что в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ точка оказывается на поверхности шестигранной пирамиды или цилиндра, в зависимости от того, какой выбран критерий пластичности – Треска-Сен-Венана или Губера-Мизеса.

Далее начинается неупругое (пластическое) деформирование материала. Подобно тому, как это имеет место для упругого тела, также и для упругопластического тела можно установить определенные зависимости между деформациями и напряжениями. Существующие в настоящее время теории

можно отнести к двум типам: **1) к деформационным теориям пластичности и 2) теориям пластического течения.**

В теориях первого типа устанавливается связь между напряжениями и деформациями, а в теориях второго типа – между бесконечно малыми приращениями пластических деформаций и напряжениями.

Теория малых упругопластических деформаций

Одной из теорий деформационного типа является **теория малых упругопластических деформаций**, которая строится на трех гипотезах – предположениях.

1. Гипотеза упругости объемной деформации. Объемная деформация элемента тела всегда является упругой и связана со средним напряжением такой же зависимостью, как и при упругой деформации:

$$\sigma_0 = k\Delta = 3k\varepsilon_0 \quad (1.30)$$

$$\text{где } \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_0 - \text{объемная деформация,}$$

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (1.30a)$$

При этом коэффициент пропорциональности k , связывающий объемную деформацию Δ со средним напряжением σ_0 , вычисляется при значениях μ , соответствующих упругим деформациям ($\mu = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$).

Это означает, что изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластических деформациях материал ведет себя как несжимаемый. Поэтому иначе эту гипотезу можно сформулировать так: за счет пластической деформации изменения объема не происходит.

2. Гипотеза пропорциональности девиаторов. Согласно этой гипотезе компоненты девиатора деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений.

$$D_n = \Psi D_g; \quad (1.31)$$

функция Ψ с учетом (1.7) и (1.11) определяется как

$$\psi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (1.31a)$$

Связь между девиаторами напряжений и деформаций в форме, предложенной А.А. Ильюшиным, записывается в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{zx} \end{cases} \quad (1.32)$$

Это и есть уравнения **теории малых упругопластических деформаций**. Они играют такую же роль, как уравнения обобщенного закона Гука. Но в отличие от последних, они являются нелинейными.

Часто для упрощения решения задач теории пластичности объемная деформация Δ полагается равной нулю, т.е. материал предполагается несжимаемым, тогда уравнения (1.32) принимают вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); & \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0); & \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0); & \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx} \end{cases} \quad (1.32a)$$

3. Гипотеза постоянства соотношения $\sigma_i - \varepsilon_i$ (гипотеза единой кривой). Интенсивность напряжений σ_i при активном деформировании материала является вполне определенной функцией интенсивности деформаций ε_i , т.е.

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) \quad (1.33)$$

Вид этой функции определяется механическими свойствами материала и не зависит от напряженного состояния.

Функция $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ действительна как для упругой, так и для пластической области (гипотеза единой кривой), её строят на основании опытных данных при простом растяжении. Для этого необходимо заменить σ_i на σ_1 , а ε_i на $\varepsilon - \varepsilon_0$ (см. ф-лы 1.19).

Для упругого материала это связь выражается линейной зависимостью

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i \quad (1.33a)$$

Активной деформацией является такая деформация, при которой каждое очередное значение интенсивности напряжений σ_i больше всех предыдущих. Если σ_i меньше хотя бы одного из предшествующих значений, то деформацию следует считать пассивной. Разгрузка является пассивной деформацией, а простое нагружение - активной деформацией.

Простым нагружением называют такое, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально одному параметру. **Сложным нагружением** называется такое, когда условие пропорциональности компонент девиатора напряжений одному параметру при нагружении не соблюдается.

Экспериментальные исследования показывают, что в области упрочнения при **простом нагружении** независимо от вида непряженного состояния соотношение (1.33), в котором функция Φ определяется из опытов на простое растяжение, выполняется с практически достаточной точностью.

Согласно теореме, доказанной А. А. Ильюшиным, нагружение будет **простым** во всех точках тела, если все внешние нагрузки, действующие на тело, пропорциональны одному параметру, а зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i имеет вид степенной функции:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \quad (1.33б)$$

где A и n постоянные величины.

Уравнение (1.33б) можно рассматривать как общее условие, охватывающее различные фазы деформирования. При $n=1$ формула (1.33б) совпадает с законом Гука ($\sigma_i = A\varepsilon_i$, где $A = 3G$), а при $n=0$ – с условием пластичности Мизеса ($\sigma_1 = A = const$).

Вид функциональной зависимости между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i (1.33) определяется характером диаграммы испытания материала чаще всего при простом растяжении.

зависимость между σ_i и ε_i записывают в форме, предложенной А. А. Ильиным:

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)] \quad (1.34)$$

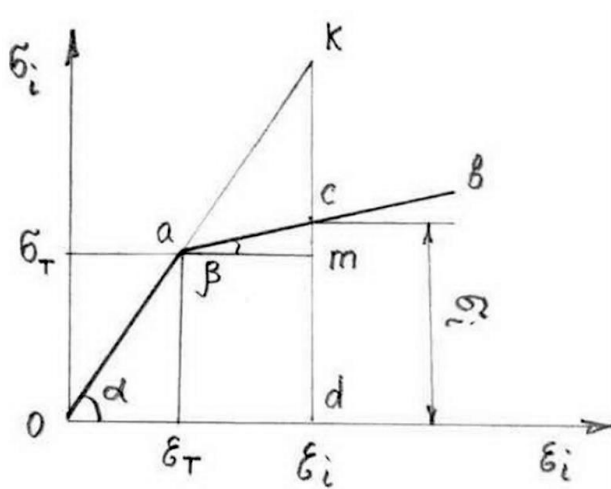
 $E\varepsilon_i,$ 

Рис.10. Диаграмма деформирования упруго-пластического материала с линейным упрочнением

$$\begin{aligned}\sigma_i &= cd = kd - kc; & \sigma &= E\epsilon_i - kc \\ \sigma_i &= E\epsilon_i \left(1 - \frac{kc}{E\epsilon_i}\right), & \omega(\epsilon_i) &= \frac{kc}{E\epsilon_i}\end{aligned}$$

Входящий сюда отрезок kc составляет

$$kc = kd - md - cm = E\varepsilon_j, -E\varepsilon_{\text{T}} - E'(\varepsilon_j, -\varepsilon_{\text{T}}) = (E - E')(\varepsilon_j - \varepsilon_{\text{T}}),$$

где $E' = tg\beta$;

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{E - E'}{E} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{\text{T}}}{\varepsilon_i} = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_{\text{T}}}{\varepsilon_i} \right),$$

где λ - относительное понижение модуля продольной упругости при переходе в пластическую область деформирования.

Окончательное функция понижения $\omega(\varepsilon_i)$, отвечающая диаграмме на рис. 10,

принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \omega = 0 & \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ \omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right) & \text{при } \varepsilon_i > \varepsilon_T \end{cases} \quad (1.35)$$

Для материала, диаграмма которого не имеет прямолинейных участков (см. рис. 11), зависимость (1.33) можно представить в виде степенного закона:

$$\sigma_i = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^m,$$

где показатель степени $0 \leq m \leq 1$.

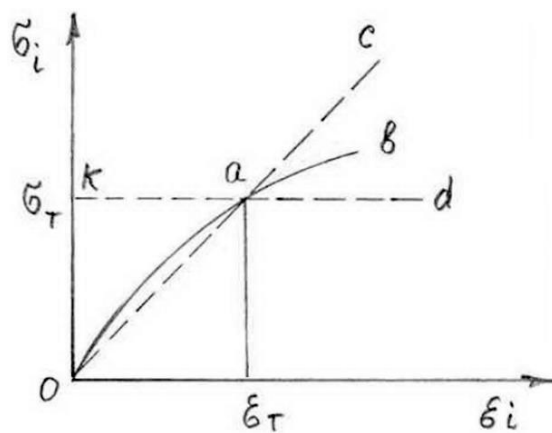


Рис.11. Диаграмма деформирования в виде степенного закона

Если $m = 1$ получаем закон деформирования идеально упругого материала

$$\sigma_i = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} \varepsilon_i = E \varepsilon_i, \quad (1.35a)$$

чему на рисунке соответствует наклонная прямая штриховая линия Oac .

При $m = 0$ получаем закон деформирования идеально пластического материала, не обладающего упрочнением.

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (1.36b)$$

на рисунке ему соответствует горизонтальная прямая штриховая линия kad .

Лекция 2. Расчет металлических конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 2

Теория пластического течения

В теории пластического течения пластическая деформация уподобляется течению вязкой жидкости. В этой теории устанавливается связь между бесконечно малыми приращениями пластической деформации и напряжениями.

Вводится понятие интенсивности приращений пластических деформаций, ее определяют выражением, аналогичным выражению для интенсивности деформаций:

$$d\varepsilon_i^n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x^n - d\varepsilon_y^n)^2 + (d\varepsilon_y^n - d\varepsilon_z^n)^2 + (d\varepsilon_z^n - d\varepsilon_x^n)^2 + \frac{3}{2} [(d\gamma_{xy}^n)^2 + (d\gamma_{yz}^n)^2 + (d\gamma_{zx}^n)^2]} \quad (1.37)$$

По аналогии с девиатором деформаций вводится понятие девиатора приращений пластических деформаций:

$$D_{d\varepsilon}^n = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^n - d\varepsilon_0^n & \frac{1}{2} d\gamma_{yx}^n & \frac{1}{2} d\gamma_{zx}^n \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xy}^n & d\varepsilon_y^n - d\varepsilon_0^n & \frac{1}{2} d\gamma_{zy}^n \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xz}^n & \frac{1}{2} d\gamma_{yz}^n & d\varepsilon_z^n - d\varepsilon_0^n \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

В основе теории пластического течения лежат следующие гипотезы.

1. Гипотеза упругости объемной деформации. Эта гипотеза полностью совпадает с первой гипотезой теории малых упругопластических деформаций. Соблюдается объемный закон Гука: полагают, что объемная деформация Δ прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению σ_0 .

$$\sigma_0 = K\Delta = 3K\varepsilon_0 \quad (1.39)$$

$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ - коэффициент пропорциональности такой же, как и при упругих деформациях.

Эту гипотезу иначе можно сформулировать так:

материал в пластическом состоянии несжимаем, т.е. коэффициент Пуассона $\mu = 1/2$. Условие несжимаемости при пластических деформациях $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ можно также записать в виде $d\Delta/dt = 0$. Иначе говоря, сумма скоростей пластических деформаций равна нулю:

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0, \text{ где } \xi_x = d\varepsilon_x/dt; \quad \xi_y = d\varepsilon_y/dt; \quad \xi_z = d\varepsilon_z/dt; \quad (1.40)$$

2. Приращения деформаций равны сумме приращений упругих и пластических деформаций, т.е.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^y + d\varepsilon_x^n; \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^y + d\gamma_{xy}^n; \quad (1.41)$$

В соответствии с первой гипотезой следует равенство

$$d\varepsilon_0^n = 0.$$

Девииатор $D_{d\varepsilon}^n$ принимает вид

$$D_{d\varepsilon}^n = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yx}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n & d\varepsilon_y^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zy}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{xz}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n & d\varepsilon_z^n \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

3. Гипотеза пропорциональности девиаторов. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций $D_{d\varepsilon}^n$ пропорциональны компонентам девиатора напряжения D_σ :

$$D_{d\varepsilon}^n = d\lambda D_\sigma \quad (1.43)$$

Это равенство в скалярной форме записывается так:

$$\begin{cases} d\varepsilon_x^n = d\lambda(\sigma_x - \sigma_0); & \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n = d\lambda\tau_{xy}; \\ d\varepsilon_y^n = d\lambda(\sigma_y - \sigma_0); & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n = d\lambda\tau_{yz}; \\ d\varepsilon_z^n = d\lambda(\sigma_z - \sigma_0); & \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n = d\lambda\tau_{zx}; \end{cases} \quad (1.44)$$

Выражение $d\lambda$ с учетом (1.7) и (1.23) определяется как

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} \quad (1.45)$$

Для приращений упругих деформаций $d\varepsilon_x^y \dots, d\gamma_{xy}^y \dots$ и приращений напряжений $d\sigma_x \dots, d\tau_{xy} \dots$ справедлив закон Гука:

$$\begin{cases} d\varepsilon_x^y = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu(d\sigma_y - d\sigma_z)]; & d\gamma_{xy}^y = \frac{1}{G} d\tau_{xy}; \\ d\varepsilon_y^y = \frac{1}{E} [d\sigma_y - \mu(d\sigma_z - d\sigma_x)]; & d\gamma_{yz}^y = \frac{1}{G} d\tau_{yz}; \\ d\varepsilon_z^y = \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu(d\sigma_x - d\sigma_y)]; & d\gamma_{zx}^y = \frac{1}{G} d\tau_{zx}; \end{cases} \quad (1.46)$$

Сложив соответственно левые и правые части уравнений (1.44) и (1.46), в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu(d\sigma_y - d\sigma_z)] + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); \\ d\varepsilon_y = \frac{1}{E} [d\sigma_y - \mu(d\sigma_z - d\sigma_x)] + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0); \\ d\varepsilon_z = \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu(d\sigma_x - d\sigma_y)] + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0); \\ d\gamma_{xy} = \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 3 \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ d\gamma_{yz} = \frac{1}{G} d\tau_{yz} + 3 \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ d\gamma_{zx} = \frac{1}{G} d\tau_{zx} + 3 \frac{d\varepsilon_i^{\Pi}}{\sigma_i} \tau_{zx}; \end{array} \right. \quad (1.47)$$

4. Гипотеза постоянства соотношения $\sigma_i - d\varepsilon_i$ (гипотеза единой кривой). Согласно этой гипотезе получается, что, независимо от вида напряженного состояния, для каждого материала имеется вполне определенная функциональная зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интегралом от интенсивности приращений пластических деформаций, т.е.

$$\sigma_i = \Phi\left(\int d\varepsilon_i^{\Pi}\right) \quad (1.48)$$

Вид этой функции может быть получен из опытов на простое одноосное растяжение. В работе Давиденкова Н.Н. и Спиридоновой Н.И. [4] показано, что при одноосном растяжении с учетом формул (1.7) и (1.11ж) имеем

$$\sigma_i - \sigma, \quad d\varepsilon_i^{\Pi} = d\varepsilon^{\Pi} \quad (1.49)$$

Уравнение (1.47) являются **основными уравнениями теории пластического течения и называются уравнениями Прандтля-Рейсса**. При этом зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью приращения деформаций принимается в виде (1.48).

В тех случаях, когда приращениями упругих деформаций пренебрегают по сравнению с приращениями пластических деформаций, имеем

$$\begin{cases} d\varepsilon_x = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); & d\gamma_{xy} = 3 \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ d\varepsilon_y = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0); & d\gamma_{yz} = 3 \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ d\varepsilon_z = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0); & d\gamma_{zx} = 3 \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} \tau_{zx}; \end{cases} \quad (1.50)$$

Разделив обе части уравнений (1.50) на dt , получим физические уравнения связи между скоростями деформаций $\dot{\xi}_i$ и компонентами девиатора напряжений D_σ .

$$\begin{cases} \dot{\xi}_x = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); & \eta_{xy} = 3 \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ \dot{\xi}_y = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0); & \eta_{yz} = 3 \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ \dot{\xi}_z = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_0); & \eta_{zx} = 3 \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \tau_{zx}; \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\text{где} \quad \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \dot{\xi}_x; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \eta_{xy}; \quad \frac{d\varepsilon_i^n}{dt} = \dot{\xi}_i;$$

$\dot{\xi}_i$ – интенсивность скоростей деформаций, определяемая формулой (1.11м),

σ_i – интенсивность деформаций, определяемая формулой (1.7)

Компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты скоростей деформаций с помощью уравнений Сен-Венана-Леви-Мизеса

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \dot{\xi}_x; & \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\xi}_i} \eta_{xy}; \\ \sigma_y = \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \dot{\xi}_y; & \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\xi}_i} \eta_{yz}; \\ \sigma_z = \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} \dot{\xi}_z; & \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\xi}_i} \eta_{zx}; \end{cases} \quad (1.52)$$

Теория течения отличается от теории упругости и теории упругопластических деформаций физическими уравнениями. В теории упругопластических деформаций (уравнения (1.32)) устанавливается связь между деформациями и напряжениями, подобная закону Гука. В теории течения физические уравнения устанавливают связь между компонентами скоростей деформаций и напряжениями (уравнения 1.51). Помимо статических, геометрических и физических групп уравнений при решении задач теории пластичности необходимо также использовать в случае отсутствия упрочнения

материала условие пластичности, а для упрочняющегося материала – закон упрочнения.

При простом нагружении интенсивность приращения пластических деформаций $d\varepsilon_i^p$ формула (1.37) равна дифференциалу интенсивности деформаций $d\varepsilon_i$ (формула 1.11), поэтому физические уравнения теории упругопластических деформаций и теории течения совпадают. Совпадают при этом и результаты решения по обеим теории.

В случае сложного нагружения, как показывают эксперименты, результаты расчётов по теории течения оказываются ближе к экспериментам, чем результаты, полученные по теории упругопластических деформаций.

Постановка задачи теории пластичности аналогична постановке задачи теории упругости. Допустим, что на тело действуют поверхностные (X_v, Y_v, Z_v) (включая реакции) и объёмные (X, Y, Z) силы. Упругопластические свойства материала заданы диаграммой деформирования $\sigma_i - \varepsilon_i$. При этом требуется определить 17 неизвестных: шесть компонент тензора напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) шесть компонент тензора деформации ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$),

три составляющих вектора перемещений (u, v, w), интенсивность напряжений (σ_i), интенсивность деформаций (ε_i). Для нахождения указанных функций имеется следующее уравнения:

- три дифференциальных уравнения равновесия (1.12);
- граничные условия (1.13), которые необходимо рассматривать совместно с уравнениями равновесия;
- шесть геометрических уравнений (уравнения Коши (1.14)) – зависимость между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений;
- уравнения неразрывности деформаций (1.15);
- физические уравнения:
 - а) шесть физических уравнений по теории малых упругопластических деформаций (1.32), при этом зависимость (1.33)

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i), \quad (1.33)$$

характеризующая диаграмму деформирования, может быть построена по диаграмме растяжения, для этого необходимо заменить σ_i на σ , а ε_i на $\varepsilon - \varepsilon_0$ (см. формулу 1.19), а ε_i определяется по формуле (1.11):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}[(\gamma_{xy})^2 + (\gamma_{yz})^2 + (\gamma_{zx})^2]} \quad (1.11)$$

б) шесть физических уравнений по теории пластического течения (1.47), при этом зависимость (1.48)

$$\sigma_i = \Phi \left(\int d\varepsilon_i^{\text{п}} \right) \quad (1.48)$$

определяется по диаграмме растяжения материала, для этого необходимо заменить σ_i на σ , а $d\varepsilon_i^{\text{п}}$ на $d\varepsilon^{\text{п}}$ (см. формулы (1.30а), а $d\varepsilon_i^{\text{п}}$ определяется по формуле (1.11ж)

$$d\varepsilon_i^{\text{п}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x^{\text{п}} - d\varepsilon_y^{\text{п}})^2 + (d\varepsilon_y^{\text{п}} - d\varepsilon_z^{\text{п}})^2 + (d\varepsilon_z^{\text{п}} - d\varepsilon_x^{\text{п}})^2 + \frac{3}{2}[(d\gamma_{xy}^{\text{п}})^2 + (d\gamma_{yz}^{\text{п}})^2 + (d\gamma_{zx}^{\text{п}})^2]} \quad (1.11\text{ж})$$

Итак, для 17 неизвестных имеем семнадцать уравнений: три уравнения равновесия; шесть геометрических уравнений;

если используем теорию малых упругопластических деформаций, то шесть физических уравнений (1.32), плюс уравнения связи (1.33) между ε_i и σ_i (формула 1.33, строится по диаграмме растяжения), плюс выражение для ε_i (формула 1.11), всего 17;

если используем теорию течения, то шесть физических уравнений теории течения (1.47), плюс уравнение связи (1.48) между σ_i и $d\varepsilon_i^{\text{п}}$ (строится по диаграмме растяжения), плюс выражение для $d\varepsilon_i^{\text{п}}$, всего также 17 уравнений. Кроме того, должны выполняться уравнения неразрывности деформаций (1.15) и граничные условия на поверхности (1.13).

Использование физических уравнений по теории пластического течения в форме (1.47) при решении конкретных упругопластических задач связано с большими математическими трудностями, т.к. они нелинейны и имеют довольно сложную структуру. Поэтому при решении задач, в которых развиваются значительные (по сравнению с упругими) пластические деформации,

компонентами упругой деформации пренебрегают и пользуются уравнениями Сен-Венана-Мизеса, которые для жёстко-пластического тела имеют вид (1.51).

Таким образом, приведённая система уравнений представляет собой полную систему уравнений для решения упругопластических задач. Как и в теории упругости, задачи теории пластичности могут решаться в перемещениях или напряжениях, а также смешанным способом.

Теорема о разгрузке. Пусть для некоторого тела, находящегося под действием заданной системы объёмных и поверхностных сил, задача пластичности решена, т.е. во всех точках тела найдены напряжения, деформации перемещения. Важной особенностью деформирования тела за пределами упругости является характер разгрузки. Под ней понимают процесс изменения внешних сил, при котором во всех областях тела, где произошло пластическое деформирование, интенсивность напряжений σ_i начинает убывать одновременно. Это означает, что тело из стадии активного деформирования переходит в стадию пассивного деформирования.

А.А. Ильюшиным сформулирована и доказана следующая теорема: перемещения точки тела в некоторый момент стадии разгрузки отличаются от перемещений, которые возникли бы в теле, если бы в естественном состоянии к нему были приложены внешние силы, равные разности внешних сил, действующих на тело в указанные моменты. То же относится к деформациям и напряжениям.

Отсюда устанавливается следующий порядок определения напряжений, деформаций и перемещений при разгрузке.

1. По уравнениям теории пластичности определяют напряжения, деформации и перемещения, которые возникают при наибольшей нагрузке, действующей до начала разгрузки.

2. По уравнениям теории упругости определяют напряжения, деформации и перемещения, которые вызывает нагрузка, равная разности между наибольшей нагрузкой, имевшей место до разгрузки, и нагрузкой, оставшейся после разгрузки.

3. Из напряжений, деформаций и перемещений, найденных при наибольшей нагрузке, вычитают напряжения, деформации и перемещения, соответствующие значению нагрузки, на которое произошла разгрузка. Это и будут напряжения, деформации и перемещения в рассматриваемый момент разгрузки.

Возвращаясь непосредственно к вопросу расчёта металлических конструкций с учётом физической нелинейности материала, следует привести некоторые положения Актуализированной редакции СНиП II-23-81* Стальные конструкции (СП 16.13330.2017), утверждённой приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства РФ от 27.02.2017г. № 126/пр и введенной в действие с 28.08.2017г.

п.4.2.5.

При расчёте пространственных конструкций (мембран, пластинок, оболочек), а также конструкций с элементами из высокопрочных материалов с нелинейной диаграммой деформирования, **следует учитывать влияние геометрической и физической нелинейности.**

При моделировании нелинейной работы стали для расчётов по первой группе предельных состояний **следует использовать расчётную диаграмму работы сталей в обобщённых параметрах $\underline{\sigma} = \frac{\sigma}{R_{уп}}$ и $\underline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon E}{R_{уп}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{уп}}$** , представленную на **рисунке В.1** (Приложение В). Здесь $R_{уп}$ - предел текучести стали, принимаемый равным значению предела текучести σ_T по национальным стандартам и техническим условиям на сталь. Значение соответствующих координат характерных точек диаграммы следует принимать по таблице В.9. Расчёты выполняют по одному из трёх вариантов кривой: OBD, OACD, OACDEF в зависимости от класса элементов конструкций (4.2.7).

4.2.7. Элементы конструкций, рассматриваемые в настоящем своде правил, в зависимости от напряженно-деформированного состояния (НДС) расчётного сечения подразделяются на три класса:

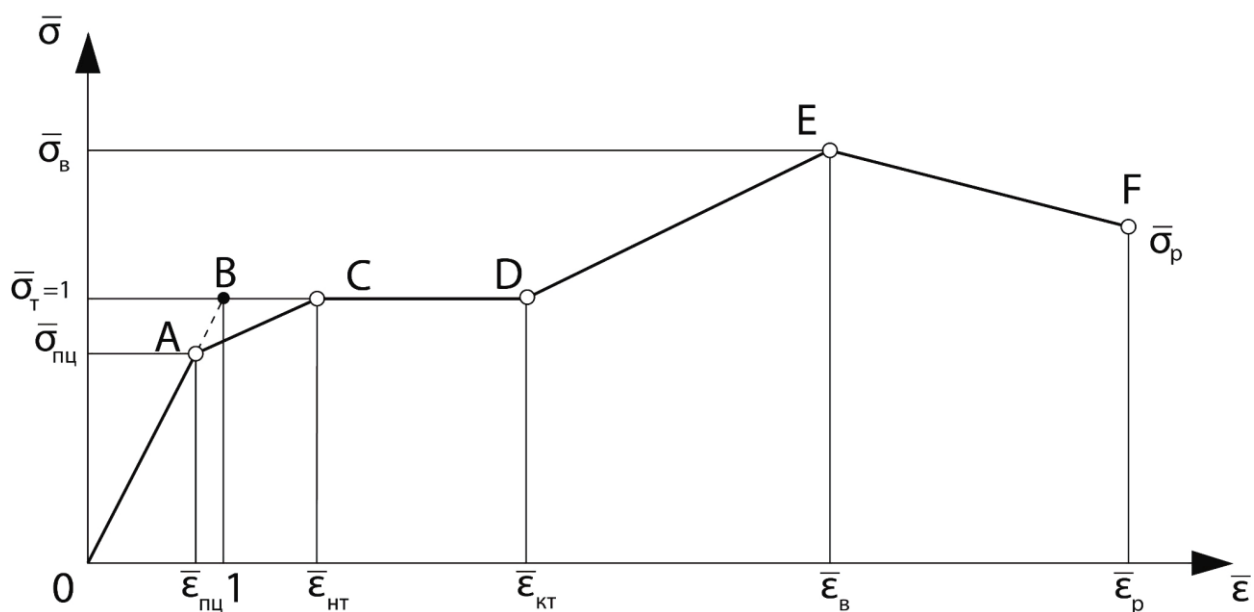


Рис. В.1. Расчётная диаграмма работы сталей в обобщённых параметрах

Таблица В.9

Параметр программы	Стали				
	C245, C255	C345, C345K, C355, C355-1, C355П	C390, C390-1	C440	C550, C590
$\underline{\varepsilon}_{пц}$	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9
$\underline{\sigma}_{пц}$	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9
$\underline{\varepsilon}_{нт}$	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
$\underline{\sigma}_T$	1	1	1	1	1
$\underline{\varepsilon}_{кт}$	14	16	17	17	18
$\underline{\varepsilon}_в$	141,6	88,3	67,1	49,6	26,2
$\underline{\sigma}_в$	1,653	1,415	1,345	1,33	1,16
$\underline{\varepsilon}_р$	251	153	115	87,2	51,1
$\underline{\sigma}_р$	1,35	1,26	1,23	1,2	1,1

1-й класс – НДС, при котором напряжения по всей площади сечения не превышают расчётного сопротивления стали $|\sigma| \leq R_y$ (упругое состояние сечения), R_y – расчётное сопротивление стали растяжению, сжатию, изгибу по пределу текучести;

2-й класс – НДС, при котором в одной части сечения $|\sigma| < R_y$, а в другой $|\sigma| = R_y$ (упругопластическое состояние сечения);

3-й класс – НДС, при котором по всей площади сечения $|\sigma| = R_y$ (пластическое состояние сечения, условный пластический шарнир).

Лекция 3. Расчет железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 1

Прочностные свойства конструкционных материалов, таких как бетон и каменные материалы сложны и многообразны. Изучение проблем прочности и деформативности этих материалов в настоящее время идет по двум основным направлениям - физическому и механическому.

Физическое направление предусматривает решение двух задач:

1) установление зависимости прочностных свойств от совокупности механических факторов, температуры, состава и структуры, исследуемого тела и его взаимодействия с окружающей средой;

2) выяснение закономерностей и механизма физических процессов получения различных материалов с заданными свойствами.

В механической концепции прочности решается задача - для конструкции сложной формы, находящейся в сложном напряженном состоянии, дать метод изучения ее поведения, т.е. определить законы изменения напряжений и деформаций.

Механические теории феноменологически описывают макроскопическое поведение твердого тела, делая некоторые идеализирующие допущения, базирующиеся, с одной стороны, на обобщении экспериментальных данных, с другой - на стремлении установить математические зависимости, позволяющие применять сравнительно простые и удобные в приложениях методы расчета на прочность.

Как известно, важнейшим свойством бетона является его физическая нелинейность – нелинейность обобщенных зависимостей между деформациями и напряжениями, проявляющаяся как при кратковременном действии нагрузки, так и при долговременном нагружении. При расчете бетонных и железобетонных конструкций также необходимо учитывать ползучесть бетона.

При получении физических соотношений для бетона из-за сложности задачи совместного учета физической нелинейности и ползучести бетона, особенно в условиях трехмерной задачи, идут по пути отдельного учета этих явлений.

Исследованием вопросов прочности и деформативности бетонных и железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности материала занимались многие ученые, такие как О. Мор [6], А.А. Гвоздев [1,7], О.Я. Берг [8], Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин [9], М.М. Филоненко-Бородич [4,10], Н.И. Карпенко [15,16], Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев [11], Е.С. Лейтес [12], Л.К. Лукша [13], А.В. Яшин [14], П.П. Баландин [2], Ю.И. Ягн [3], В.М.Круглов [17], Т.А. Балан [18] и др.

В качестве примера мы кратко рассмотрим работы двух ученых – Гениева Г.А. и Карпенко Н.И., посвященные построению деформационной теории пластичности и теории предельного равновесия бетона и железобетона.

Мы выбрали эти работы, чтобы показать, как авторы различными путями идут к решению одной и той же проблемы.

Результаты исследований Г.А. Гениева получены с использованием классического подхода и математического аппарата, традиционного для теории упругости и пластичности. Автор строит феноменологическую теорию на основе принятых допущений, где в качестве констант полученных теоретических зависимостей служат постоянные характеристики материала, установленные из простейших опытов – на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистый сдвиг.

Н.И. Карпенко в своей работе ставит целью – на основе имеющихся экспериментальных данных путем их аппроксимации (с использованием в т.ч. эмпирических коэффициентов, установленных опытным путем) построить уравнения предельного равновесия, а также получить основные соотношения деформационной теории пластичности бетона и железобетона.

Теория Г.А. Гениева

Результаты исследования касаются двух тесно связанных между собой задач:

1) разработки, обоснования и практического использования деформационной

теории пластичности бетона и железобетона; 2) разработки, обоснования и практического использования теории предельного напряженного состояния этих материалов. Эти две стороны рассматриваемой проблемы тесно взаимосвязаны, поясним эту взаимосвязь

Предполагается, что прочность бетона в каждой точке его объема определяется исключительно характером и величиной напряженного состояния, и что в системе координат главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ существует некоторая, вполне определенная поверхность, являющаяся геометрической интерпретацией условия прочности бетона. Напряженные состояния, характеризующиеся точками внутри этой поверхности, не вызывают разрушения материала. Внутри этой поверхности находится и точка начала координат системы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

При разработке деформационной теории пластичности бетона предполагается простое нагружение материала. Всякая траектория такого нагружения будет изображаться в системе $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ прямой линией, выходящей из начала координат и пересекающей (либо не пересекающей) в некоторой точке предельную поверхность. Физические соотношения деформационной теории пластичности, связывающие инварианты напряженного и деформированного состояния, справедливы на участках всех траекторий простого нагружения от начала координат ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) до точки пересечения траекторией предельной поверхности.

Решение второй из сформулированных выше задач заключается в отыскании напряженных состояний, характеризующихся точками, расположенными на предельной поверхности, и соответствующих внешних нагрузок, способных вызвать эти предельные напряжения во всем объеме тела.

Примерно аналогичная картина характерна для железобетона.

Критерий прочности бетона.

Возможности применения существующих теорий прочности к материалам типа бетонов изучал А.А. Гвоздев [1]. Он пришел к выводу, что прочность бетона в значительной степени определяется сопротивлением отрыву не только при простом растяжении и кручении, но и при одноосном и двухосном сжатии (этого

обстоятельства, например, теория О. Мора не учитывает). Теория скольжения в виде, предлагаемом О. Мором, к бетонам неприменима, поскольку в ней принято, что чистое скольжение происходит без увеличения объема тела. В бетоне же, как отмечается в опытах, при возникновении больших деформаций происходит увеличение видимого объема бетона (явление дилатации).

Условие прочности Г.А. Гениева имеет целью отразить указанные особенности прочностных и деформативных свойств бетона. Оно строится поэтапно.

На первом этапе условие прочности бетона представляется в форме $F(\sigma_i, \sigma) = 0$. В координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ оно интерпретируется конусообразной поверхностью О. Мора и тремя плоскостями, пересекающими поверхность О. Мора в области растягивающих напряжений. Эта система хорошо аппроксимируется поверхностью вращения, а именно, параболоидом вращения, ось которого совпадает с прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, а вершина находится в точке, соответствующей пределу прочности при всестороннем отрыве (см. рис.1). *Здесь сжимающие напряжения считаются положительными, растягивающие – отрицательными.*

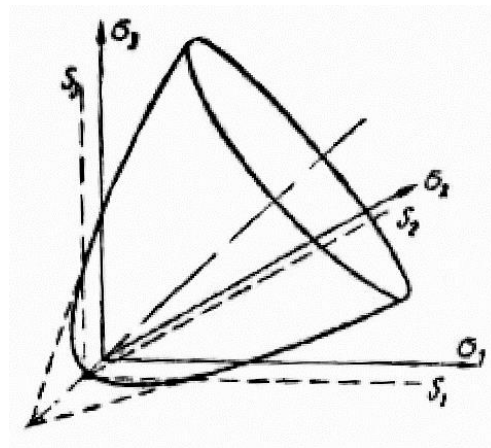


Рис.1. Параболоид вращения по уравнению (1)

Уравнение такой параболической поверхности – предлагаемое условие прочности записывается в форме:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_c - R_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - R_c R_p = 0 \quad (1)$$

или

$$\sigma_i^2 = R_c R_p + 3\sigma(R_c - R_p) \quad (1.1)$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.2)$$

– гидростатическое давление (среднее напряжение);

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \quad (1.3)$$

– интенсивность напряжений.

Данная гипотеза прочности построена как обобщение теории прочности О. Мора, с одной стороны, и «энергии формоизменения» по П.П. Баландину [2], с другой. Ее также можно записать в форме $F(I_{T1}, I_{D2}) = 0$ (см. уравнение 1), имея в виду, что первый инвариант тензора напряжений

$$I_{T1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2)$$

а второй инвариант девиатора напряжений

$$I_{D2} = \frac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (3)$$

Рассматриваемое условие прочности (1) при определенных параметрах совпадает с условиями прочности П.П. Баландина [2], Ю.И. Ягна [3], М.М. Филоненко-Бородича [4], которые интерпретируются поверхностями вращения.

Возможность представления условия прочности бетона в форме поверхности вращения рассматривалось на основе анализа опытов Ф. Рихарда, А. Брандтзаега и Ф. Брауна [5]. В этих опытах бетонные цилиндры подвергались одновременно действию осевой сжимающей силы и бокового гидростатического давления. Было отмечено несоответствие опытных данных с теоретической зависимостью, представляющей область прочного сопротивления в форме поверхности вращения. Вследствие чего был сделан вывод, что поверхность вращения (описываемая уравнением, связывающим первый и второй инварианты тензора напряжений) не может рассматриваться как возможное условие прочности бетона.

Путь дальнейшего обобщения условия прочности (1) связан с введением в это условие третьего инварианта девиатора напряжений I_{D3}

$$F(I_{T1}, I_{D2}, I_{D3}) = 0, \quad (6)$$

где

$$I_{D3} = -\frac{1}{27}[3(\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2 + \sigma_2\sigma_1^2 + \sigma_3\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3^2) - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)] \quad (7)$$

В качестве основных расчетных параметров принимаются три постоянные величины – пределы прочности на одноосное растяжение-сжатие R_p , R_c и чистый сдвиг T_c . Уравнение предельной поверхности (6) принимается в виде

$$3I_{D2} = [R_c R_p + (R_c - R_p)I_{T1}]\{1 - (1 - \frac{3T_c^2}{R_c R_p})[1 - \frac{I_{D3}}{2}(\frac{I_{D2}}{3})^{-\frac{3}{2}}]\} \quad (8)$$

Предельная поверхность, определяемая уравнением (8), вписана в поверхность параболоида вращения по уравнению (1) и при $T_c = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{R_c R_p}$ совпадает с последней.

Поверхность прочности (8) должна отвечать для изотропных материалов условию выпуклости, в соответствии с постулатом Д. Драккера и Р. Хилла, которое накладывает следующие ограничения на расчетные параметры:

$$0.530 \approx \sqrt{\frac{11}{39}} < \frac{T_c}{\sqrt{R_c R_p}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 \quad (9)$$

На рисунке 3 утолщенной линией показано сечение предельной поверхности плоскостью, нормальной к равнонаклонной координатного угла. Точки E , G , H принадлежащие поверхности по уравнению (8), лежат одновременно и на поверхности параболоида вращения по уравнению (1).

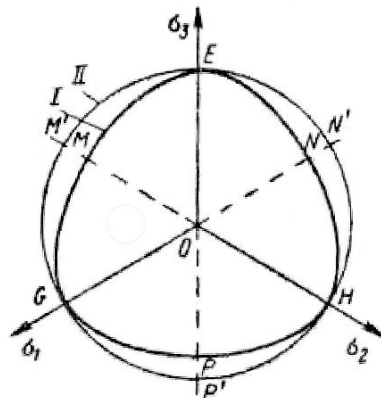


Рис.3. Сечение предельной поверхности по уравнению (8) плоскостью, нормальной к равнонаклонной координатного угла

Итак, введение в общее условие прочности третьего инварианта девиатора напряжений I_{D3} позволяет "деформировать" поверхность параболоида вращения таким образом, что достигается лучшая сходимость экспериментальных и теоретических данных.

Рассматриваемые условия прочности нуждаются во всесторонней экспериментальной проверке. Анализ существующих экспериментальных данных проводился для следующих характерных областей предельной поверхности: всестороннего неравномерного сжатия; двухосного равномерного и неравномерного растяжения; двухосного напряженного состояния растяжения-сжатия; двухосного равномерного и неравномерного сжатия.

На рисунках 4-9 показаны кривые, ограничивающие область прочного сопротивления при плоском напряженном состоянии для условия прочности (1) - кривая II и для условия прочности (8) - утолщенная кривая I. Здесь же точками показаны предельные значения напряжений при разрушении образцов бетона и других материалов по данным различных исследователей.

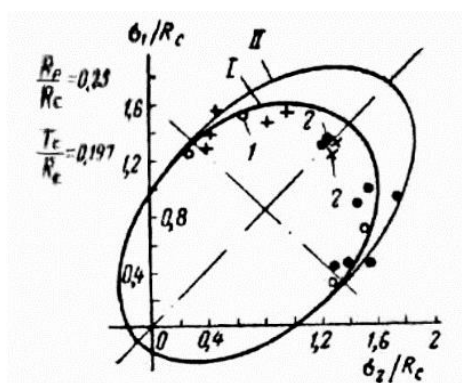


Рис.4. По данным Коффина (1), ЦНИИСК (2)

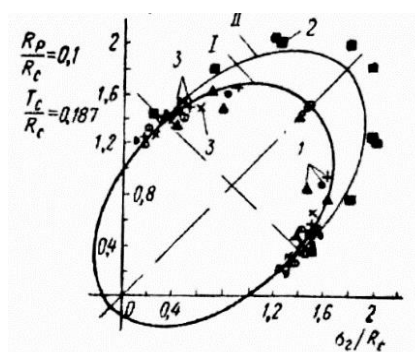


Рис.5. По данным Вейглера (1), Белами (2), Веригина (3)

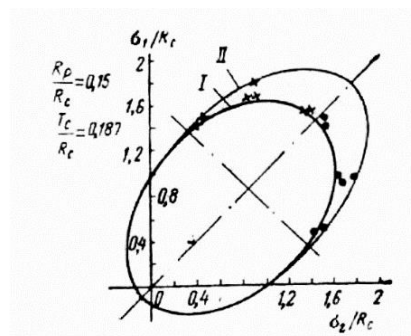


Рис.6. По данным ЦНИИСК, цементный камень

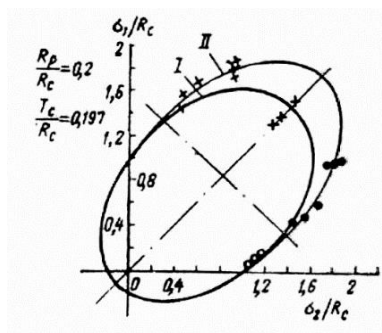


Рис.7. По данным ЦНИИСК и Рейниуса, (цементный камень)

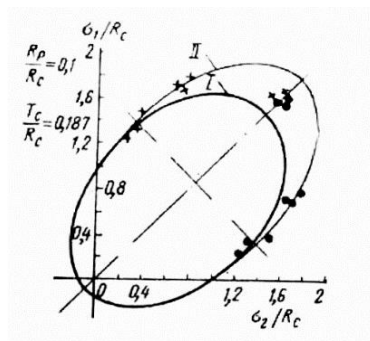


Рис.8. По данным ЦНИИСК, мрамор

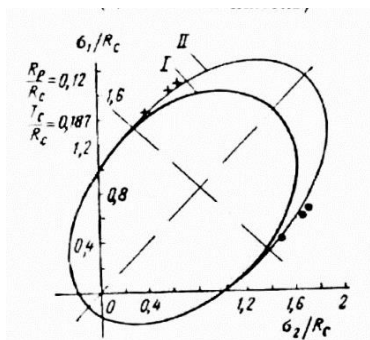


Рис.9. По данным ЦНИИСК, песчанник

В целом обзор экспериментальных данных показал, что для различных областей напряженного состояния, отмеченных выше, расхождение экспериментальных и теоретических данных составляет от 6 до 20 процентов.

Деформационная теория пластичности бетона.

Перейдем к деформационной теории пластичности бетона, предложенной Г.А. Гениевым. Эта теория устанавливает зависимости между инвариантами напряженного и деформированного состояния бетона при кратковременном действии нагрузки, приложенной в условиях простого нагружения.

При ее построении использованы следующие предпосылки, сформулированные в результате анализа экспериментальных данных.

1. Физическая нелинейность диаграмм работы материала при нагружении.
2. Влияние первого инварианта тензора напряжений (среднего напряжения) на вид зависимости между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций.
3. Требование возможности непосредственного перехода зависимостей напряжения-деформации к условию прочности бетона.
4. Зависимость предельной деформации бетона от вида напряженного состояния.
5. Сжимаемость бетона и эффект дилатации в области разрушения.

Как уже отмечалось, в работах Ф. Рихарда, А. Брандтзаега и Ф. Брауна [5,6] приведены результаты экспериментальных исследований бетонных цилиндров, подверженных одновременно действию осевой сжимающей силы и бокового гидростатического давления. На рисунке 10 показано семейство кривых $\sigma - \varepsilon$ при разных величинах бокового давления, полученных в результате экспериментов, которое имеет ярко выраженный криволинейный характер и может быть аппроксимировано однопараметрической зависимостью.

Приведенные кривые $\sigma - \varepsilon$ при разных значениях бокового давления дают качественную картину зависимости между интенсивностями напряжений T и деформации L . Последняя будет зависеть также от величины бокового давления, а следовательно, и среднего напряжения σ . Вторая предпосылка является обобщением этого экспериментального результата на общий случай трехосного напряженного состояния и представляется необходимой.

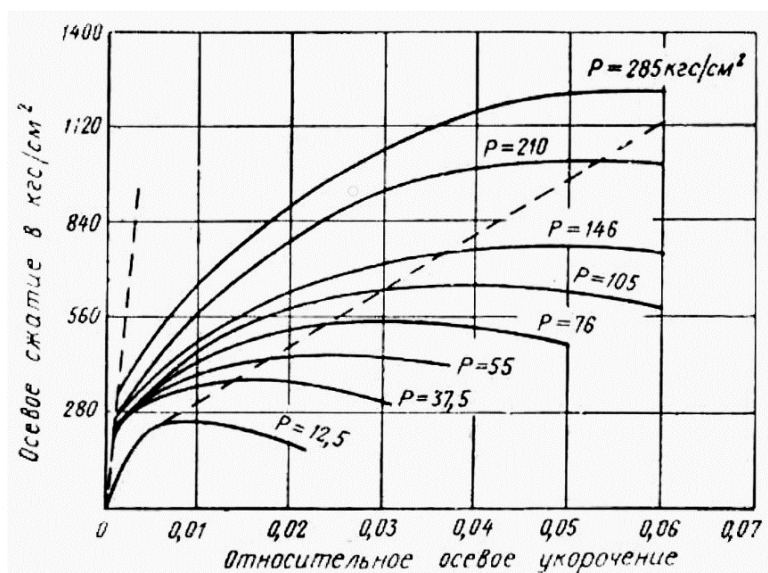


Рис.10. Семейство кривых $\sigma - \epsilon$ при разных величинах бокового давления

Как следует из рис.10, предельная деформация бетона зависит от величины бокового сжатия цилиндрических образцов. Экспериментальные точки кривых $\sigma - \epsilon$, соответствующие предельному осевому сжатию, с некоторой погрешностью можно соединить прямой (пунктирная линия). Зависимость предельной деформации от вида напряженного состояния была обнаружена во многих исследованиях, в частности, при одноосном сжатии и растяжении, значения ее имеют порядок, соответственно 10^{-3} и 10^{-4} .

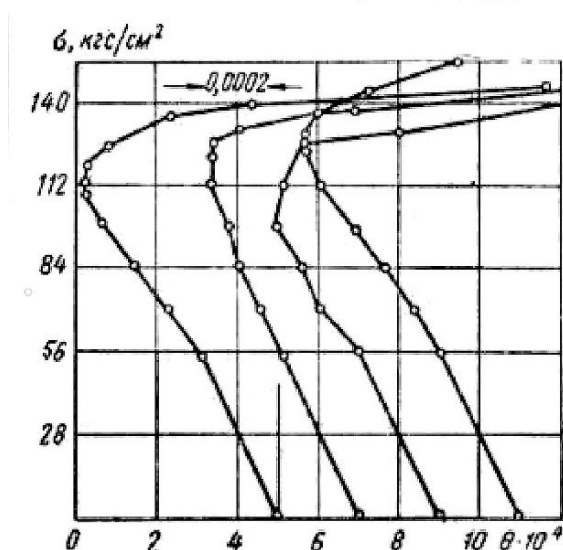


Рис.11. Изменение объемной деформации θ в зависимости от величины нагрузки

Пятое условие (учет сжимаемости и эффект дилатации) также является специфическим только для бетона. На рис. 11 для тех же цилиндров показано изменение объемной деформации θ в зависимости от величины нагрузки. Сначала объем сжимаемого цилиндра уменьшается, но при нагрузке, равной примерно 75-85% разрушающей, начинает возрастать, и к концу опыта видимый объем образца уже превышает его первоначальный. Анализ этих и других кривых показывает, что объемная деформация значительна по своей величине, и ею нельзя пренебречь по сравнению с единицей.

В качестве условия прочности бетона принимается выражение (8), представленное в компактной форме:

$$T^2 = T_c(T_c + \lambda T)(1 + \delta), \quad (10)$$

которое преобразуется в виду

$$T_s = T_c k(\lambda, \delta), \quad (11)$$

где T_s – предельное значение интенсивности касательных напряжений для рассматриваемого вида напряженного состояния;

$$k(\lambda, \delta) = \frac{\lambda(1+\delta)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\delta)^2}{4} + (1 + \delta)}; \quad (12)$$

$$\lambda = f \frac{\sigma}{T}; \quad \delta = e \left(\frac{S}{T}\right)^3; \quad (13)$$

$$S = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

$$f = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}; \quad e = \frac{R_c R_p}{3T_c^2} - 1; \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (16)$$

T -интенсивность касательных напряжений, квадрат которой численно равен второму инварианту девиатора напряжений I_{D2}

$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – среднее напряжение, соответствующее с точностью до постоянного коэффициента с первым инвариантом тензора напряжений I_{T1} ;

Величина $k(\lambda, \delta)$ представляет собой коэффициент изменения предельного значения интенсивности касательных напряжений для рассматриваемого вида

напряженного состояния по сравнению с предельным значением T при чистом сдвиге (T_c).

Так как для бетона отношение $\frac{R_c}{R_p}$ равно примерно 10, а значения предельных деформаций при одноосном сжатии и растяжении, обнаруженные во многих исследованиях, составляют, соответственно 10^{-3} и 10^{-4} (отличаются также в 10 раз), логично сделать допущение, что предельная интенсивность деформации сдвига определяется соотношением, аналогичным соотношению (15), т.е.

$$\Gamma_s = \Gamma_c k(\lambda, \delta), \quad (17)$$

где Γ_s – предельная деформация сдвига при чистом сдвиге.

$$\Gamma = \Gamma_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (17a)$$

При конкретизации основной физической зависимости деформационной теории

$$T = G(\Gamma)\Gamma \quad (18)$$

будем предполагать, что $G(\Gamma)$ для бетона является линейной функцией интенсивности деформации сдвига Γ , а именно:

$$G(\Gamma) = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right), \quad (19)$$

где G_0 - начальный модуль сдвига.

На рис. 12 представлены зависимости

$$T = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right)\Gamma, \quad (20)$$

построенные для различных режимов простого нагружения, характеризующихся соответствующими значениями $k(\lambda, \delta)$.

Зависимости $\frac{\Gamma}{\Gamma_c}$ от $\frac{T}{T_c}$ на рис.12 имеют тот же качественный характер, что и кривые $\sigma - \varepsilon$ при различных величинах бокового давления на рис.10. Прямая OE , проведенная под углом 45° к оси $\frac{\Gamma}{\Gamma_s}$, соответствует значениям предельных интенсивностей деформаций сдвига для различных видов напряженного состояния.

Это допущение является обобщением результатов экспериментов, приведенных на рис. 10 (пунктирная линия) на общий случай напряженного состояния.

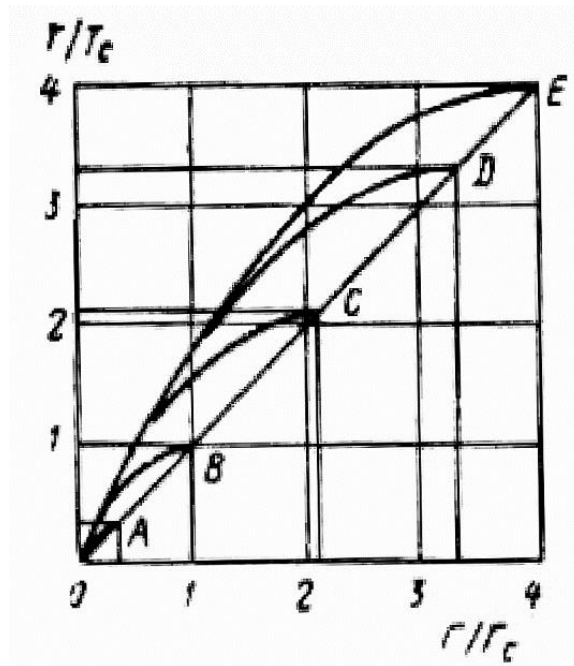


Рис.12. Зависимости $\frac{\Gamma}{\Gamma_c}$ от $\frac{T}{T_c}$ при различных величинах бокового давления

Семейство кривых, определяемых соотношением (20), можно описать одним уравнением

$$(1 - \tau) = (1 - \gamma)^2, \quad (21)$$

где $\tau = \frac{T}{T_s}$, $\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_s}$ – безразмерные характеристики напряженно-деформированного состояния.

Предположим, что объемная деформация бетона $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ определяется соотношением

$$\theta = \theta_\sigma + \theta_\Gamma = \frac{\sigma}{K(\Gamma)} - q_0 \Gamma^2, \quad (22)$$

где

$$K(\Gamma) = K_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right) \quad (23)$$

θ_Γ учитывает непосредственное увеличение объема бетона за счет увеличения объема трещин.

При чистом сдвиге ($\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma = 0$) объемная деформация бетона в момент разрушения

$$\theta = \theta_c = \theta_\Gamma = -q_0 \Gamma_c^2, \quad (24)$$

модуль дилатации определяется соотношением

$$q_0 = -\frac{\theta_c}{\Gamma_c^2}, \quad (25)$$

где θ_c – предельная объемная деформация при чистом сдвиге; $q_0 > 0$, поскольку $\theta_c < 0$.

откуда на основании (22) и (23) найдем

$$\theta = \frac{\lambda}{f} \frac{G_0}{K_0} \Gamma(T) - q_0 \Gamma^2(T) \quad (26)$$

На рис.13 изображены зависимости $\frac{T}{T_c}$ от $\frac{\theta}{|\theta_c|}$, построенные по соотношению (26) для различных режимов простого нагружения, соответствующие графикам на рис.12.

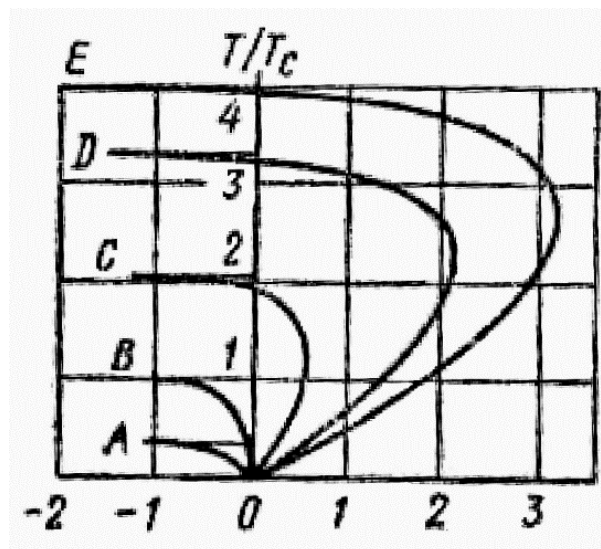


Рис.13. Зависимости $\frac{T}{T_c}$ от $\frac{\theta}{|\theta_c|}$, построенные по соотношению (26) для различных режимов простого нагружения

Основные физические зависимости предлагаемой Г.А. Гениевым деформационной теории пластичности бетона можно представить в форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{K(\Gamma)} - q_0 \Gamma^2 \right] = \frac{1}{2G(\Gamma)} (\sigma_x - \sigma); \\ \varepsilon_y - \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{K(\Gamma)} - q_0 \Gamma^2 \right] = \frac{1}{2G(\Gamma)} (\sigma_y - \sigma); \\ \varepsilon_z - \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{K(\Gamma)} - q_0 \Gamma^2 \right] = \frac{1}{2G(\Gamma)} (\sigma_z - \sigma); \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G(\Gamma)}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G(\Gamma)}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G(\Gamma)}; \end{array} \right. \quad (27)$$

где $G(\Gamma)$ определяется соотношением (19); $K(\Gamma)$ – соотношением (23); q_0 – соотношением (25).

Первую группу зависимостей (29) можно записать в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E(\Gamma)} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] - \frac{q_0 \Gamma^2}{3}, \quad (27a)$$

где $E(\Gamma) = 3G(\Gamma)/(1 + \frac{G_0}{3K_0})$;

$$\nu = (1 - \frac{2G_0}{3K_0})/2(1 + \frac{G_0}{3K_0}), \quad (28)$$

ν – коэффициент Пуассона

Выражения (27a), разрешенные относительно напряжений, имеют вид:

$$\sigma_x = 2G(\Gamma) [\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta + \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} q_0 \Gamma^2] \quad (29)$$

Соотношение между модулями G_0 и K_0 найдем из условия, при котором значение коэффициента бокового расширения ν равнялось бы $1/6$ (для бетонов коэффициент Пуассона в пределах 0.16-0.18, принимается $1/6 \approx 0.167$).

Подставляя $\nu = 1/6$ во второе уравнение (28), найдем

$$K_0 = \frac{7}{6} G_0 \quad (29a)$$

Лекция 4. Расчет железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Часть 2

Теория Н.И. Карпенко. Критерий прочности бетона

Метод построения предельных поверхностей, предложенный Н.И. Карпенко, является развитием идеи А.А. Гвоздева [7] о рациональной форме предельной поверхности для бетона. Конструированием критериев прочности с введением дополнительных параметров, определяемых опытным путем, с целью сближения теоретических и опытных результатов занимались М.М. Филоненко-Бородич [10], Е.С. Лейтес [12], Л.К. Лукша [13], А.В. Яшин [14], М.Б. Лифшиц [19], В.М. Круглов [17], Т.А. Балан [18] и др.

Н.И. Карпенко усовершенствовал вышеуказанный метод, строя на основании экспериментальных данных так называемые “функции прочности”, которые при двухосном сжатии и растяжении, по сути, представляют следы девиаторной кривой на плоскости в интервалах $-1 < \mu_\sigma < 1$. Здесь μ_σ – параметр Лоде-Надаи по напряжениям.

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (30)$$

Напомним, параметр Лоде-Надаи используется для выражения среднего главного напряжения через величины двух крайних главных напряжений.

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \mu_\sigma(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (30a)$$

Критерий прочности строится в форме

$$F(\tau_0, \sigma_0, \mu_\sigma, R_i) = 0 \quad (31)$$

В координатах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ критерий прочности бетона представляется поверхностью общего вида, которая является разомкнутой в области всестороннего равномерного сжатия для плотных бетонов (рис. 20а) и замкнутой для пористых (рис. 20б).

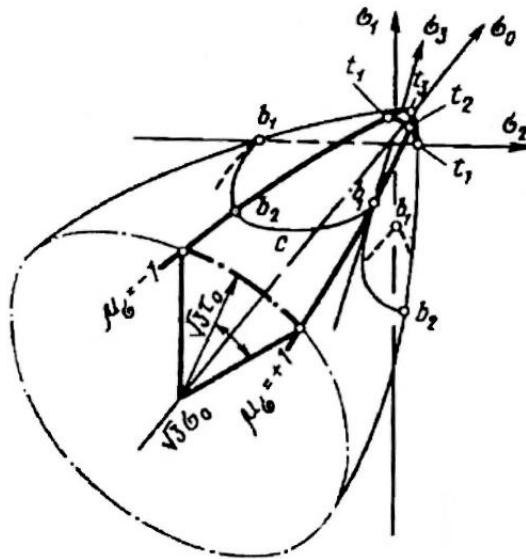


Рис.20а. Общий вид поверхности прочности

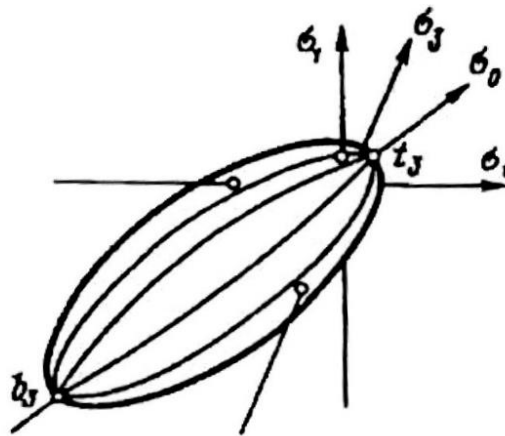


Рис.20б. Общий вид поверхности прочности

Для наглядности поверхность прочности удобно изображать в цилиндрических координатах нормального $\sqrt{3}\sigma_0$ и касательного $\sqrt{3}\tau_0$ октаэдрических напряжений и угла вида напряженного состояния ω_σ или параметра Лоде-Надаи μ_σ . **Положительными являются растягивающие напряжения.**

Поверхность состоит из шести одинаковых частей (лепестков), которые располагаются между сечениями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$. В качестве направляющей поверхности выступает девиаторная кривая, которая является функцией τ_0 и ω_0 (рис.21).

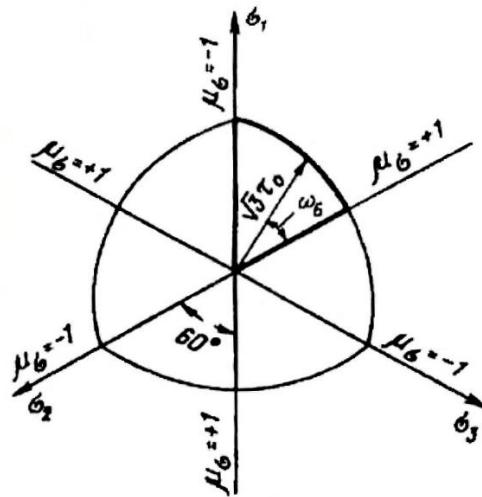


Рис.21. Девиаторное сечение

Формы девиаторных кривых зависят от вида бетона и уменьшаются в различных областях напряженных состояний (неодноосного растяжения, сжатия-растяжения, трехосного сжатия). Образующими являются меридиональные кривые, их вид показан на рис.22.

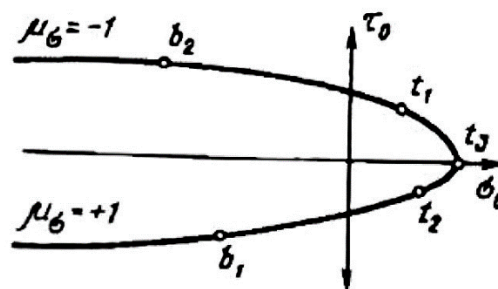


Рис.22. Меридиональные кривые

Сначала автор строит критерий прочности в координатах $\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma$ в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma, R_i) = 0, \quad (32)$$

а затем переходит к виду (31).

Характерная функция прочности бетона для случая трехосного сжатия элемента напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ строится следующим образом.

Для определения σ_3 , соответствующего исчерпанию прочности образца, используется условие Кулона-Мора в виде:

$$\sigma_3 = -R_{bc} + \beta_n \sigma_1 \quad (33)$$

Разные исследователи по-разному определяли β_n – одни в качестве фиксированной величины, другие в качестве переменной, зависящей от σ_1 . R_{bc} – призмная прочность бетона.

Н.И. Карпенко показал, что зависимость (33) хорошо описывает экспериментальные данные по плотным бетонам, если принять β_n в виде

$$\beta_n = \frac{1+a-am}{b+(1-b)m}, \quad (34)$$

где a, b – коэффициенты материала, устанавливаемые на основании опытов

$$m = \frac{\widetilde{\sigma}_1}{\widetilde{\sigma}_3} \quad (34a)$$

$$\widetilde{\sigma}_1 = -\frac{\sigma_1}{R_{bc}}; \quad \widetilde{\sigma}_2 = -\frac{\sigma_2}{R_{bc}}; \quad \widetilde{\sigma}_3 = -\frac{\sigma_3}{R_{bc}} \quad (34б)$$

Согласно данным опытов различных исследователей, представленных на рис.23, некоторой нижней границе прочности бетона соответствует линия I, описываемая зависимостью (34) при $b = 0.118, a = 0.5b$; некоторым средним значениям прочности соответствует линия II при $b = 0.096, a = 0.5b$.

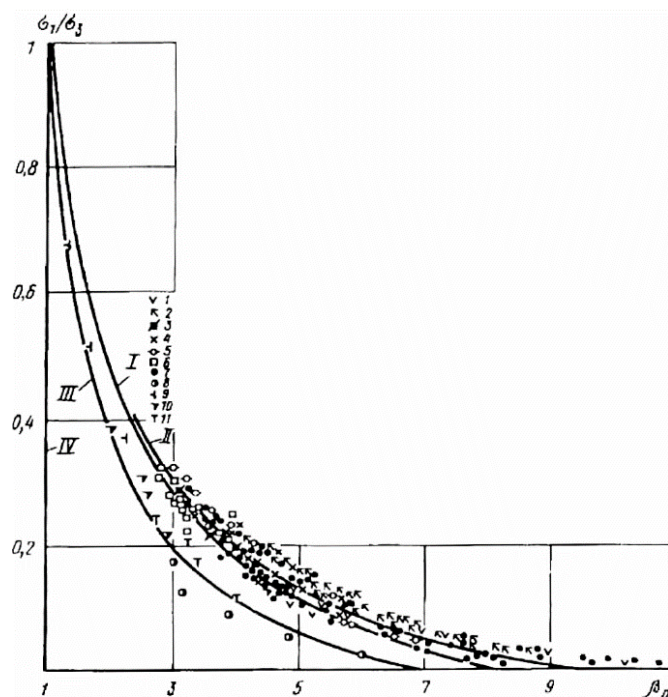


Рис.23. Теоретические графики характерной функции прочности бетона при трехосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ и результаты опытов

Учитывая обозначения (34б), условие (33) можно записать в виде

$$\widetilde{\sigma}_3 = 1 + \beta_n \widetilde{\sigma}_1 \quad (35)$$

Напомним, что зависимость (35) с коэффициентом β_n в виде (34) относится к частному случаю трехосного сжатия, когда $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Это условие (35) автор распространяет и на другие виды напряженного состояния (общий случай трехосного сжатия, растяжение-сжатие, трехосное растяжение), вводя в (35) дополнительную функцию k_c , получается

$$\widetilde{\sigma}_3 = k_c + \beta_n \widetilde{\sigma}_1 \quad (36)$$

Функция k_c устанавливается на основе обработки экспериментальных данных о прочности бетона при двухосном сжатии напряжениями σ_1 и σ_2 . Результаты известных экспериментов можно описать универсальной зависимостью:

$$k_c = 1 + \varphi_R = 1 + \varphi_{R(e)} \left\{ 1 - \left[\frac{(1-c)(1-\mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1-\mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\}, \quad (36a)$$

где φ_R – приращение относительной прочности бетона при двухосном сжатии по отношению к одноосному сжатию;

$\varphi_{R(e)}$ – максимальное приращение;

e, c – геометрические параметры;

e – определяет положение максимума k_c в зависимости от отношений $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ ($0 < e < 1$)

$$c = \frac{1 - e - de}{1 - e + d - de}; \quad (36б)$$

$$d = \sqrt{1 - \frac{\varphi_{R(-1)}}{\varphi_{R(e)}}}; \quad (36в)$$

$\varphi_{R(-1)}$ – значение φ_R в точке двухосного равномерного сжатия;

В (35) также вводится коэффициент β_n в виде:

$$\beta_n = \frac{1+a-am}{b+(f-b)m}; \quad (37)$$

$$m = \frac{\bar{\sigma}_1 + \delta_p}{\bar{\sigma}_3 + \delta_p}. \quad (37a)$$

δ_p определяется как относительная (безразмерная) функция изменения прочности бетона при двухосном сжатии. Она строится на основании экспериментальных данных и выражается формулой

$$\delta_p = \delta_{p2} + (\delta_{p1} - \delta_{p2}) \left[1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)(\mu_\sigma^* + p)}{(1 - \mu_p^*)(1 + p)} \right], \quad (38)$$

здесь μ_σ^* - параметр, отличающийся от параметра Лоде-Надаи константой Δ

$$\mu_\sigma^* = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}; \quad (38a)$$

$$\Delta = 0.25R_{bt};$$

μ_p получают, заменяя в (38a) σ_2 на σ_3 ;

p – эмпирический коэффициент $p = (-1) \div (2)$, в среднем $p = 0$;

$$\delta_{p1} = \frac{R_{bt}}{R_{bc}}; \quad \delta_{p2} = \frac{R_{bt2}}{R_{bc}} \quad (38б)$$

R_{bc2} – прочность бетона при двухосном равномерном растяжении;

в среднем

$$\delta_{p2} \approx \delta_{p1}(1 - \delta_{p2}). \quad (38в)$$

Параметр b определяется по формуле

$$b = \frac{\delta_p}{k_c - n\delta_p}. \quad (38г)$$

От параметра f в формуле (37) зависит – будет ли поверхность прочности замкнутой ($f > 1$) или разомкнутой ($f = 1$) в области всестороннего равномерного сжатия.

Функция (36) в сочетании с (37) и называется характерной функцией прочности бетона при объемном напряженном состоянии.

Обширные экспериментальные исследования параметров $n = \frac{a}{b}$ и f функции β_n выполнялись в НИИЖБ [20, 21, 23], других научных организациях [22], для анализа привлекались опубликованные данные разных авторов. Результаты этих исследований приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид бетона	Коэффициенты	
	f	$n = a/b$
Тяжелый	1	1
Мелкозернистый	1.05	-3
Шлакопемзобетон	1.25	0.8
Термолитобетон	1.1	0.9
На зольном гравии	1.1	1
Керамзитобетон	1.1	1.2

Итак, можно записать общее условие прочности бетона. Вносим (37а) в (37), а затем подставляем полученное выражение β_n в уравнение (36), получается окончательный вид условия прочности бетона

$$a\bar{\sigma}_1^{\frac{1}{2}} + b\bar{\sigma}_3^{\frac{1}{2}} - \sigma_1[k_c(f - b) + \delta_p] - \bar{\sigma}_3(k_cb - f\delta_p) - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3(a + b + 1 - f) - k_cf\delta_p = 0; \quad (39)$$

$$(\bar{\sigma}_1 < \bar{\sigma}_2 < \bar{\sigma}_3)$$

В этом условии: параметры k_c и δ_p вычисляются по формулам (36а) и (38), параметр f назначается по табл.1; параметр b вычисляется по формуле (38г), используя значение $n = a/b$ из табл.1; параметр a находится по формуле $a = nb$. При определении k_c и δ_p параметр Лоде-Надаи μ_σ вычисляется по общей формуле (30).

Условие (39) записано в относительных напряжениях, что создает удобства при выполнении расчетов. Оно легко преобразуется к обычному виду

$$a\sigma_1^2 + b\sigma_3^2 + \sigma_1[R_{bc}k_c(f-b) + \delta_p^*R_{bt}] + \sigma_3(k_cbR_{bc} - f\delta_p^*R_{bt}) - \\ - \sigma_1\sigma_3(a+b+1-f) - k_cf\delta_p^*R_{bt}R_{bc} = 0; \quad (40)$$

$$(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3);$$

$$\delta_p^* = \frac{\delta_p}{\delta_{p1}} = \frac{\delta_p R_{bc}}{R_{bt}}. \quad (40a)$$

Условие прочности (39) можно записать в цилиндрических координатах в виде зависимости между октаэдрическим касательным напряжением τ_0 , средним напряжением σ_0 и параметром Лоде-Надаи μ_σ . Введем относительные величины $\tilde{\sigma}_0 = -\frac{\sigma_0}{R_{bc}}$, $\tilde{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{R_{bc}}$, тогда $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_3$ (исходя из определения параметра μ_σ) можно записать так:

$$\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_0 - \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \tilde{\tau}_0 \\ \tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_0 + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \tilde{\tau}_0 \quad (41)$$

Внося (41) в (39), получим

$$\frac{\tilde{\tau}_0}{2(3 + \mu_\sigma^2)} [6b(3 + \mu_\sigma) + 6a(3 - \mu_\sigma) - 9(f-1) + \mu_\sigma^2(f-1)] + \\ + \frac{\tilde{\tau}_0}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} [k_c(3f - 6b - f\mu_\sigma) + 3\delta_p(f+1) + \delta_p\mu_\sigma(f-1)] + \\ + \frac{2\tilde{\tau}_0\tilde{\sigma}_0}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} [3(b-a) + \mu_\sigma(f-1)] - \tilde{\sigma}_0[k_cf - \delta_p(f-1)] + \\ + \tilde{\sigma}_0^2(f-1) - k_cf\delta_p = 0 \quad (42)$$

Уравнение (42) соответствует соотношению $\sigma_1 \geq \sigma_2 \leq \sigma_3$ и $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$. Оно определяет 1/6 часть общей поверхности прочности, на рис. 24 она заключена между линиями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$. Остальные пять частей являются повторением представленной части; они строятся для оставшихся пяти других возможных комбинаций между главными напряжениями (например, $\sigma_2 \geq \sigma_3 \leq \sigma_1$ и т.д.)

Девiatorные фигуры не являются афиноподобными, а изменяются (по мере увеличения σ_0) от линейного или криволинейного треугольника до шестиугольника или окружности (рис. 24 а-в, где а – тяжелый бетон $R_{bc} = 50$ МПа; δ - то же, $R_{bc} = 10$ МПа; b – условный бетон: 1) $\tilde{\sigma}_0 = -0.02$; 2) $\tilde{\sigma}_0 = 0.25$; 3) $\tilde{\sigma}_0 = 1.5$).

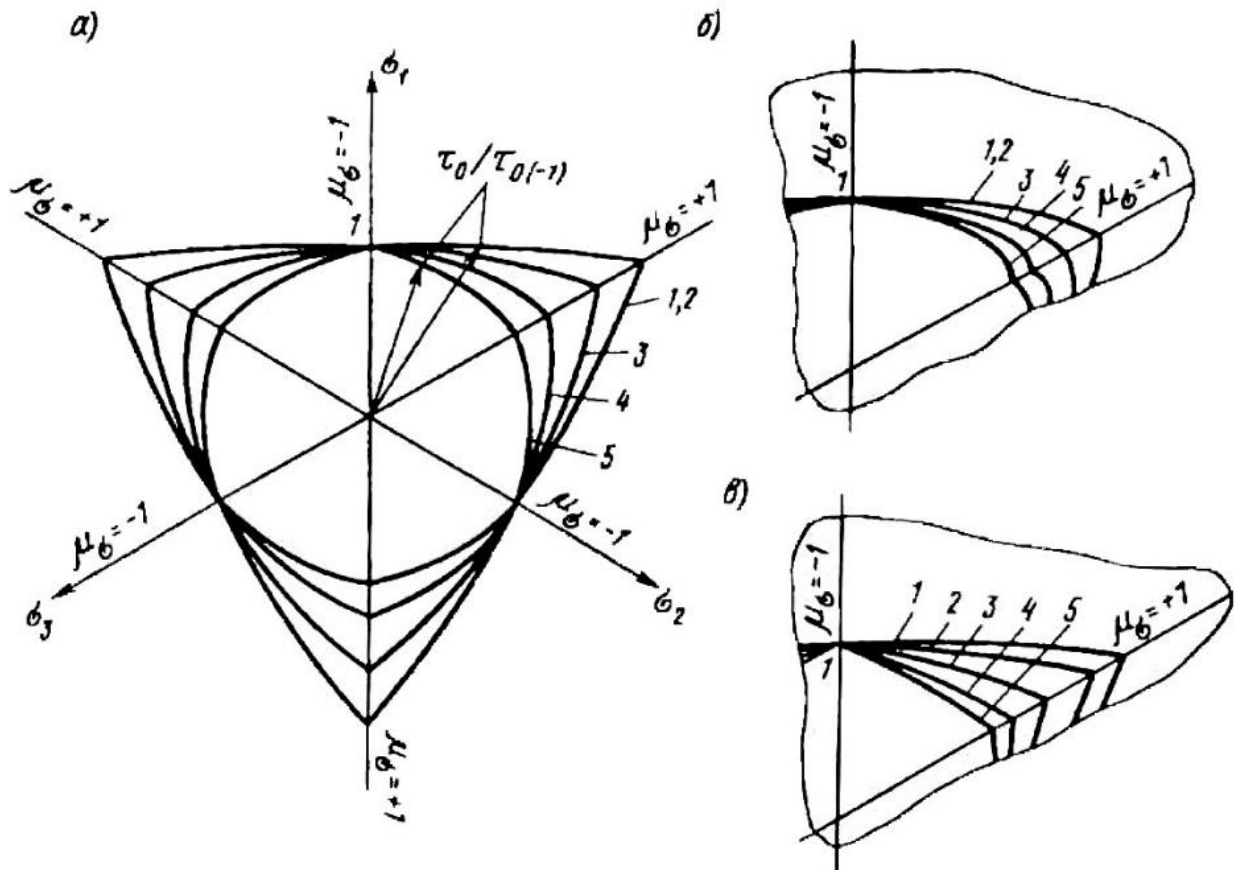


Рис. 24 (а-в) Девiatorные кривые для различных бетонов в относительных координатах $\frac{\tau_0}{\tau_{0(-1)}}$, соответствующие различным уровням σ_0

($\tau_{0(-1)}$ – значение τ_0 при $\mu_\sigma = -1$)

Представленный критерий прочности хорошо согласуется с экспериментальными данными испытаний бетона при различных напряженных состояниях. На рис. 25 представлены результаты опытов на двухосное однородное сжатие ($\sigma_3 = \sigma_2$) с растяжением по третьему направлению ($\sigma_1 > 0$), а на рис. 26 – результаты опытов при трехосном сжатии; где а, б – при $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2$, в – при $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$.

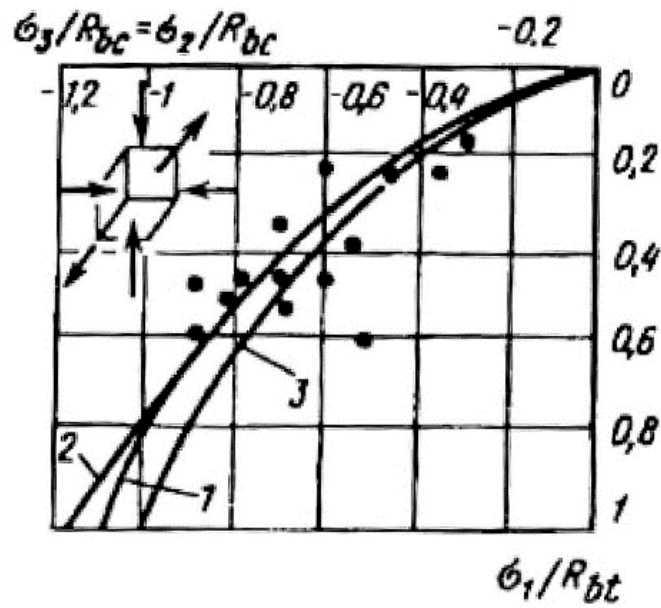


Рис. 25 Результаты опытов на двухосное однородное сжатие ($\sigma_3 = \sigma_2$) с растяжением по третьему направлению ($\sigma_1 > 0$)

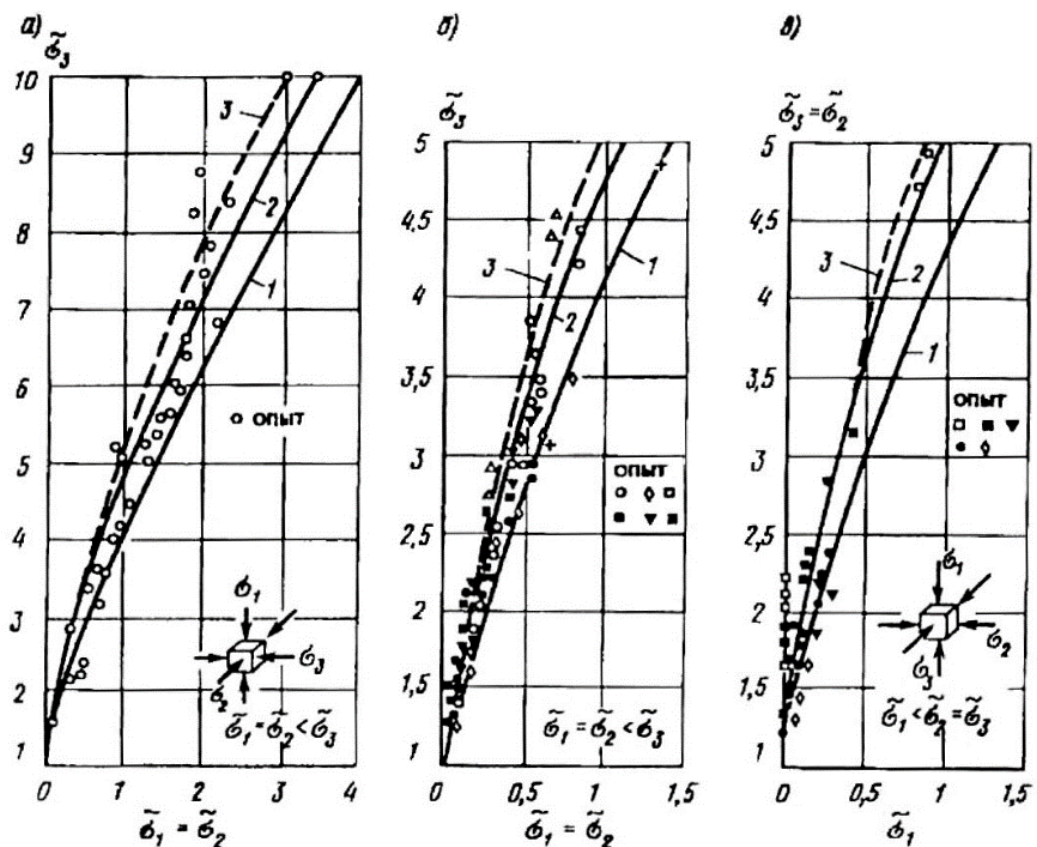


Рис. 26 Результаты опытов при трехосном сжатии; а, б – при $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2$; в – при $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$

Деформационная теория бетона.

Перейдем к теории деформации бетона, предложенной Н.И. Карпенко. Базой для построения общих моделей деформационной теории бетона служат результаты исследования диаграмм $\varepsilon_\delta - \sigma_\sigma$ при кратковременных испытаниях бетонных элементов (в пределах 20-60 минут: 20 мин. при одноосном растяжении, 60 мин. при сжатии).

За эталон принимается режим испытаний с постоянными скоростями роста деформаций, который приводит к выявлению двухветвевых диаграмм деформирования бетона при растяжении (рис. 27а) и сжатии (рис. 27б).

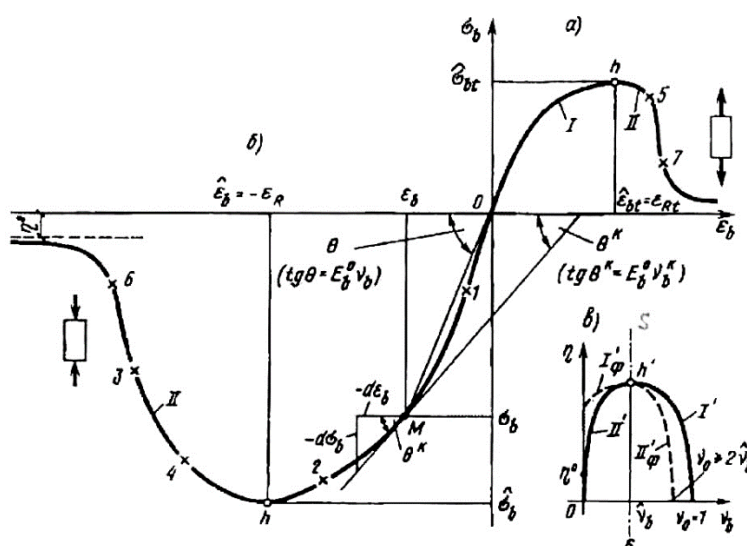


Рис. 27. Диаграммы деформирования бетона, а) при растяжении; б) при сжатии; в) к построению теоретической диаграммы деформирования бетона

Двухветвевые диаграммы состоят из двух участков (ветвей): I – восходящих (до вершин h с напряжениями $\sigma_b = \hat{\sigma}_b$ при сжатии и $\sigma_b = \hat{\sigma}_{bt}$ – при растяжении) и II – ниспадающих. В расчетах значения σ_b и $\hat{\sigma}_{bt}$ принимают равными нормативным $R_{b,set}$, $R_{bt,set}$, а иногда и расчетным R_b , R_{bt} характеристикам прочности бетона при сжатии и растяжении.

Существует множество подходов различных авторов по описанию диаграмм деформирования бетона. Н.И. Карпенко использует секущие и касательные модули, которые выражаются через уровни напряжений и относительных деформаций (рис. 28).

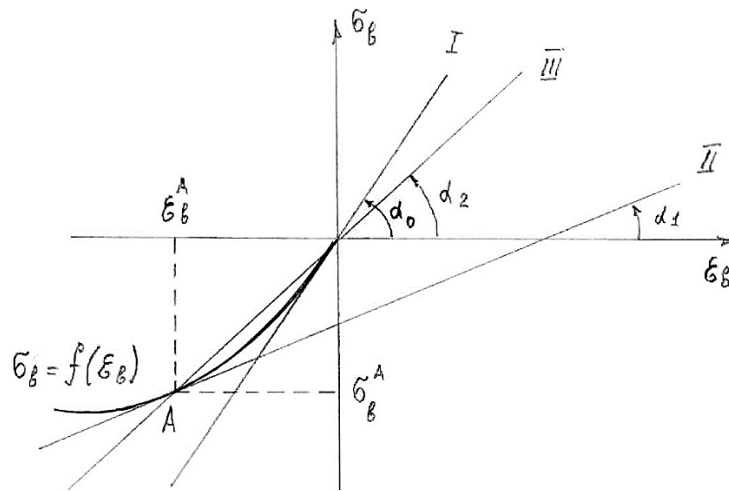


Рис. 28. Модули деформации бетона: I – начальный модуль $E_b = \operatorname{tg} \alpha_0$; II – касательный модуль $E'_b = \operatorname{tg} \alpha_1$; III – секущий модуль $E''_b = \operatorname{tg} \alpha_2$

Диаграмма сжатия (см. рис. 27а) Сжимающие напряжения и деформации укорочения являются отрицательными. При центральном сжатии диаграмма деформирования бетона представляется в виде

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0 v_b}, \quad (43\Gamma)$$

ε_b – относительные деформации;

σ_b – относительные напряжения;

E^0 – начальный модуль упругости бетона;

v_b – коэффициент изменения секущего модуля;

$E_b^0 v_b$ – секущий модуль

$$v_b = \hat{v}_b + (v_0 - \hat{v}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2} \quad (43.1)$$

здесь $0 \leq v_b \leq 1$;

$\hat{v}_b$ – значение коэффициента v_b в вершине диаграммы;

v_0 – начальный коэффициент v_b (в начале диаграммы или в начале ее криволинейного участка);

η – уровень напряжений ($0 \leq \eta \leq 1$);

ω_1, ω_2 – параметры кривизны диаграммы

$$\hat{v}_b = \frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\varepsilon}_b E_b^0}; \quad \hat{\sigma}_b = -R_{b, set} \quad (43.2)$$

$$\eta = \frac{\sigma_b}{\hat{\sigma}_b}; \omega_2 = 1 - \omega_1 \quad (43.3)$$

$\hat{\sigma}_b$ - значение напряжений в вершине диаграммы, при проектировании $\hat{\sigma}_b = -R_{b,set}$.

Для входящей ветви ($|\varepsilon_b| \leq |\hat{\varepsilon}_b|$):

$$\nu_0 = 1; \omega_1 = 2 - 2.5\hat{\nu}_b \quad (43.4)$$

для нисходящей ветви ($|\varepsilon_b| \geq |\hat{\varepsilon}_b|$):

$$\nu_0 = 2.05\hat{\nu}_b; \omega_1 = 1.95\hat{\nu}_b - 0.138 \quad (43.5)$$

В формуле (43.2) $\hat{\varepsilon}_b$ – деформация в вершине диаграммы, которая определяется по эмпирическим формулам, предложенным различными исследователями, в частности

$$\varepsilon_b = -\varepsilon_R = -\frac{(18+R_{b,ser})(62R_{b,ser}+0.675R_{b,ser}+22)}{(53000-62R_{b,ser})(7R_{b,ser}+R_{b,ser}^2+22)}, \quad (43.6)$$

где константы 18, 22, 53000 принимаются в МПа.

Кратко остановимся на механизме конструирования зависимости (43.1).

Схема изменения коэффициента ν_b в функции от уровня напряжений η для восходящей (линия I) и нисходящей (линия II) ветвей диаграммы показана на рис. 27в.

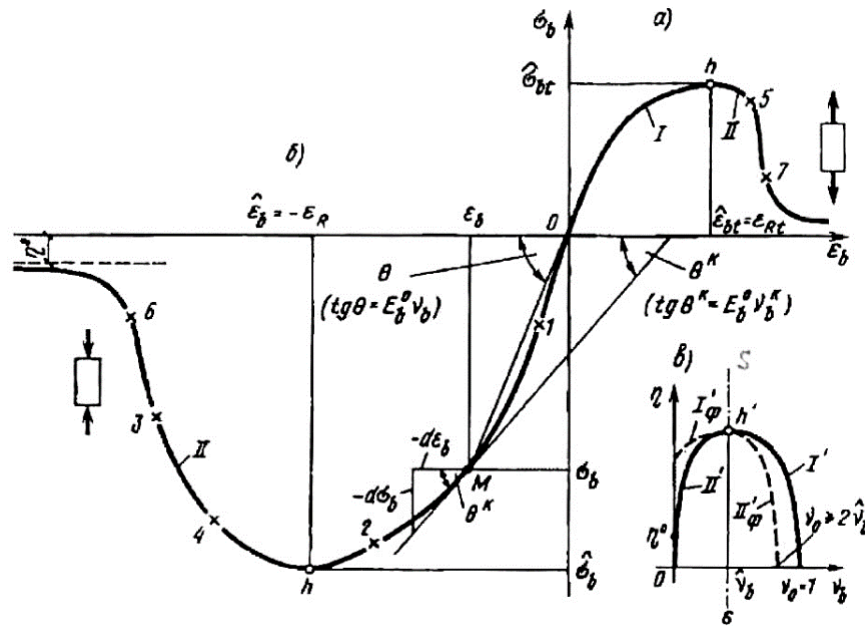


Рис. 27. Диаграммы деформирования бетона, а) при растяжении; б) при сжатии; в) к построению теоретической диаграммы деформирования бетона

Линии Γ' и Π' могут быть сравнительно просто аппроксимированы как части эллипса или параболы, состыкованные в общей вершине h' . В силу их симметрии относительно оси S-S в вершине h' для состыкованных линий выполняется условие $\frac{d\eta}{dv_b} = 0$, которое приводит к выполнению условия $\frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = 0$ в вершинах h диаграмм, представленных на рис. 27 а, б. Таким образом, обе линии (Γ' и Π') формально можно описать одним уравнением

$$v_b^2 - 2v_b\hat{v}_b + \hat{v}_b^2 - (v_0 - \hat{v}_b)^2(1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2) = 0, \quad (44)$$

$$(\omega_1 + \omega_2 = 1),$$

в котором для каждой линии Γ' и Π' вводятся только свои значения константы v_0 .

Зависимость (43.1) является решением квадратного уравнения (44).

$$v_b = \hat{v}_b + (v_0 - \hat{v}_b)\sqrt{1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2} \quad (43.1)$$

Таким образом, соотношения (43) и (43.1) являются основными физическими соотношениями при одноосном растяжении и сжатии бетона.

Сопоставление опытных и расчетных диаграмм деформирования бетона при осевом сжатии показано на рис. 29 (линии 1,2,3, где 1 – опыты И.Д. Узуна, 2 – расчет по формулам (43), (43.1) с определением параметров v_0 , ω_1 и ε_R по формулам (43.4), (43.6); 3 – расчет по формулам (43), (43.1) с введением опытных параметров v_0 , ω_1 и ε_R).

Более полное представление о характере теоретических диаграмм сжатия бетона, построенных по формулам (43), (43.1), дают графики на рис. 30. Там же для сопоставления пунктирными линиями нанесены кривые, рекомендуемые ЕКБ (Европейским комитетом по бетону), с которыми, как видно, имеет место удовлетворительное совпадение.

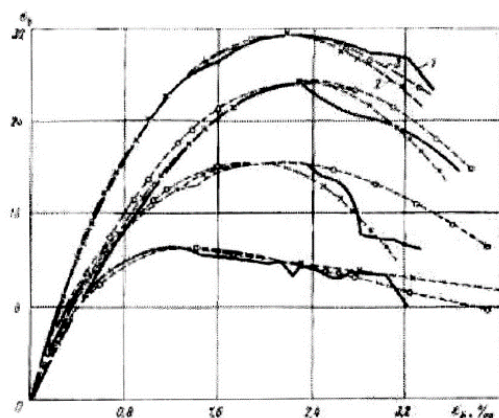


Рис. 29 Сравнение опытных и расчетных диаграмм деформирования бетона различных классов при осевом сжатии

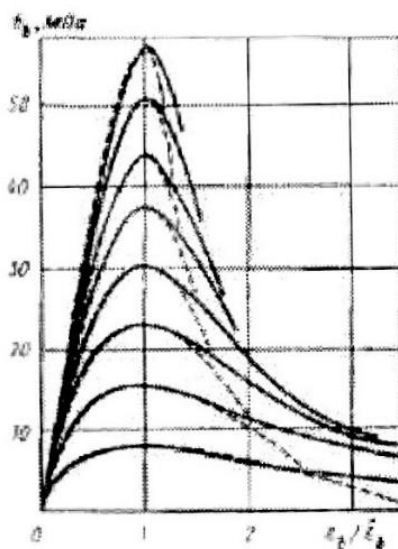


Рис. 30 Диаграммы сжатия бетонов различных классов

Диаграмма растяжения (см. рис 27б) Зависимости (43), (43.1) - (43.6), (44), как и выражения для параметров ν_0 , ω_1 относятся и к диаграммам растяжения. В них только следует индекс «b» заменить на индекс «bt», обозначающий растяжение, и ввести новые значения параметров:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{bt} &= R_{bt,set} \tilde{\gamma}_{btq}; \quad \eta = \frac{\sigma_{bt}}{\hat{\sigma}_{bt}}; \\ \hat{\varepsilon}_{bt} &= \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_b^0 \hat{\nu}_{bt}}; \quad \eta_d = \frac{\varepsilon_{bt}}{\hat{\varepsilon}_{bt}}; \\ \hat{\nu}_{bt} &= (0.6 + \frac{0.15 R_{bntn}}{25}) / \tilde{\gamma}_{btq},\end{aligned}\tag{45}$$

где $\tilde{\gamma}_{btq}$ – коэффициент, учитывающий влияние градиентов деформаций; вводится, если диаграмма используется в расчетах изгибаемых элементов; при центральном растяжении $\tilde{\gamma}_{btq} = 1$;

R_{btn} – нормативное сопротивление бетона растяжению (принимается по СНиП 02.03.01-84); $n=1-2$.

Поперечные деформации бетона

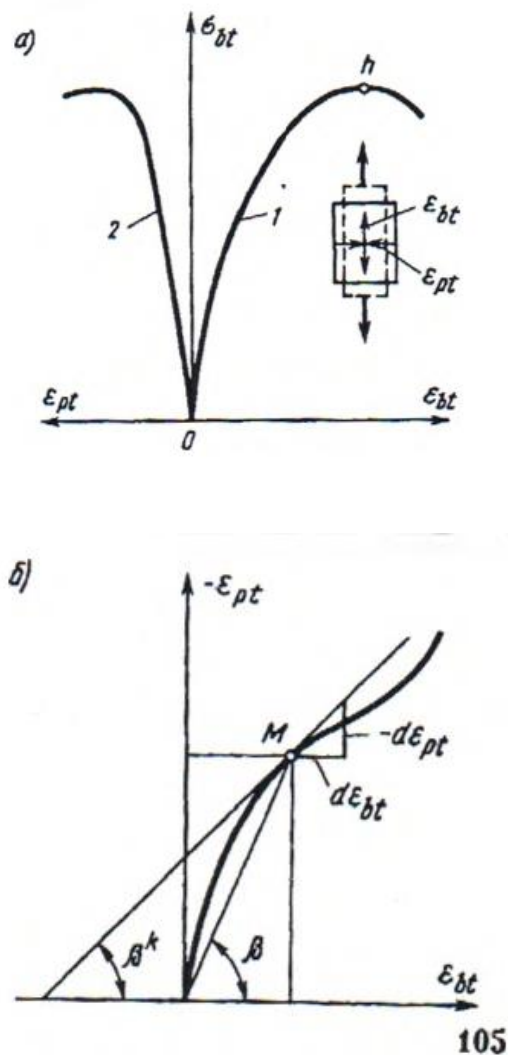


Рис.31(а,б). К определению поперечных деформаций;
1 – продольная деформация; 2 – поперечная деформация

$$\epsilon_p = -\epsilon_b \mu_b; \epsilon_{pt} = -\epsilon_{bt} \mu_{bt} \quad (46)$$

Деформированное состояние элементов при центральном сжатии или растяжении определяется не только продольными (вдоль действия напряжений), но и поперечными деформациями (ε_{pt} – при растяжении, рис. 31а и ε_p – при сжатии). Поперечные деформации имеют знак, обратный знаку продольных деформаций и выражаются путем умножения значений последних на коэффициент поперечной деформации (μ_b – при сжатии, μ_{bt} – при растяжении).

График связи поперечных ε_{pt} и продольных ε_{bt} деформаций представлен на рис.31(б). Отношение $\frac{\varepsilon_{pt}}{\varepsilon_{bt}} = tg\beta$ – угла наклона секущей OM к оси деформаций ε_{bt} , поэтому коэффициент поперечной деформации, соответствующий указанному соотношению, называют секущим.

Экспериментальные исследования показывают, что с увеличением уровня напряжений сжатия коэффициент поперечной деформации μ_b возрастает от некоторого начального значения $\mu_b^0 \approx 0.15 - 0.2$ до значений, приближающихся к 0.5 в вершине диаграммы. Этот фактор удовлетворительно отражает зависимость, предложенная в [25]:

$$\mu_b = \hat{\mu}_b + (\mu_b^0 - \hat{\mu}_b)\sqrt{1 - \eta^2}, \quad (47)$$

где $\hat{\mu}_b$ – значение коэффициента μ_b в вершине диаграммы сжатия

$$\hat{\mu}_b \approx \mu_b^0 + 1 - \sqrt[3]{v_b} \quad (48)$$

Запись диаграмм в виде связей между приращениями напряжений и деформаций

Диаграммы деформирования бетона при растяжении и сжатии (индексы « b » и « bt » обозначим « b ») можно также представить в виде связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений ($d\varepsilon_b - d\sigma_b$).

Из рис. 27б видно, что

$$\frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = tg\theta^K = E_b^0 v_b^K \quad (49)$$

или

$$\frac{d\varepsilon_b}{d\sigma_b} = \frac{1}{E_b^0 v_b^K} \quad (\text{или } d\varepsilon_b = \frac{d\sigma_b}{E_b^0 v_b^K}), \quad (50)$$

где v_b^K – коэффициент изменения касательного модуля деформации бетона;
 $E_b^0 v_b^K$ – касательный модуль.

Внося в (47) значение v_b из (43.1), получим зависимость между v_b^K и v_b (касательным и секущим модулями)

$$\frac{1}{v_b^K} = \frac{1}{v_b} \pm \frac{\eta(v_0 - \hat{v}_b)(\omega_1 + 2\omega_2\eta)}{2v_b^2 \sqrt{1 - \omega_1\eta - \omega_2\eta^2}}, \quad (51)$$

знак «+» соответствует восходящей ветви диаграммы, знак «-» нисходящей.

Рассмотрим поперечные деформации в приращениях. На рис. 31б $d\varepsilon_{pt}$ и $d\varepsilon_{bt}$ – бесконечно малые приращения поперечных и продольных деформаций при растяжении. Как видно из рис.31б, $\frac{d\varepsilon_{pt}}{d\varepsilon_{bt}} = tg\beta^K$, где β^K – угол наклона касательной к кривой $\varepsilon_{pt} - \varepsilon_{bt}$; $tg\beta^K$ представляет собой касательный коэффициент поперечной деформации (μ_{bt}^K – при растяжении, μ_b^K – при сжатии), т.е.

$$\frac{d\varepsilon_{pt}}{d\varepsilon_{bt}} = -\mu_{bt}^k; \quad \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon_b} = -\mu_b^K \quad (52)$$

Заменяя в (52) согласно (50) $d\varepsilon_b$ на $\frac{d\sigma_b}{v_b^K E_b^0}$, преобразуем (52) к виду

$$-\frac{d\varepsilon_p}{d\sigma_b} = \frac{\mu_b^K}{v_b^K E_b^0} \quad (53)$$

Соотношения (50) и (53) являются основными физическими соотношениями одноосного напряженного бетона в приращениях.

Мы рассмотрели основные подходы к построению критериев прочности и созданию деформационной теории бетона двух авторов – Г.А. Гениева и Н.И. Карпенко. Рамки одной лекции не позволяют так же подробно остановиться на вопросах развития этих теорий применительно к железобетону, железобетону с трещинами, учету ползучести, температурных воздействий и др. вопросах.

Тема 2. Геометрическая нелинейность

Лекция 5. Расчет конструкций с учетом геометрической нелинейности по деформированной схеме

Форма и размеры конструкции при определенных нагрузках существенно изменяются и принцип малости перемещений становится неприемлемым. Отсюда следует, что для решения задачи расчета конструкций нужно отказаться от простых предпосылок линейной теории и перейти к более широким и сложным обоснованиям нелинейной теории.

Прежде всего нужно отказаться от предпосылки расчета по недеформированному состоянию, который предполагает малость перемещений. При этом возникает нелинейность, называемая геометрической нелинейностью. В этом случае в теорию вводят нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями, которые позволяют учитывать влияние изменения формы и размеров конструкции на ее напряженно-деформированное состояние.

Задачи, предполагающие использование геометрически нелинейной теории упругости, были поставлены еще Эйлером применительно к тонким упругим стержням. Далее объектом исследования этой теории стали тонкие гибкие пластинки. Первые попытки создать теорию расчета этих пластинок принадлежат А. Клебшу (1862 г.), Г.Р. Кирхгофу (1877 г.), Б. Сен-Венану (1888 г.), а также И.Г. Бубнову, который в ряде работ, начиная с 1902 г., обосновал эту теорию и применил ее к расчету тонкостенных пространственных конструкций корабля.

Окончательно геометрически нелинейные уравнения пластинок были получены А. Фупплом и Т. Карманом (1910 г.). В трудах Х.М. Муштари, В.В. Новожилова, В.З. Власова, В.И. Феодосьева, А.С. Вольмира, К.З. Галимова, М.В. Корнишина, М.В. Колтунова, П.М. Огибалова и других исследователей геометрически нелинейная теория получила дальнейшее развитие при исследованиях напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластинок и оболочек различных форм.

Покажем, как на основе нелинейной теории деформаций строятся геометрические соотношения в общем виде и как они трансформируются применительно к различным конструкциям.

Рассмотрим нелинейно-упругое тело в состоянии до деформации в системе координат x, y, z (рис. 1) и отметим в нем точку $A(x, y, z)$, где x, y, z – ее координаты. После деформации тела точка $A(x, y, z)$ переместится в положение A' , вектор $\overrightarrow{AA'}$ называется перемещением точки A . Обозначим проекции этого вектора на оси координат через $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Очевидно, что

$$u^2 + v^2 + w^2 = (AA')^2, \quad (1)$$

а координаты точки $A'(x', y', z')$ равны:

$$x' = x + u; y' = y + v; z' = z + w \quad (2)$$

Величины u, v, w называют компонентами вектора перемещений или просто перемещениями.

Отметим далее в состоянии до деформации в окрестностях точки $A(x, y, z)$ бесконечно близкую к ней точку $B(x + dx; y + dy; z + dz)$, см. рис. 2. Отрезок AB можно рассматривать как диагональ бесконечно малого параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz . Обозначим длину этой диагонали dS . Очевидно

$$(AB)^2 = dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3)$$

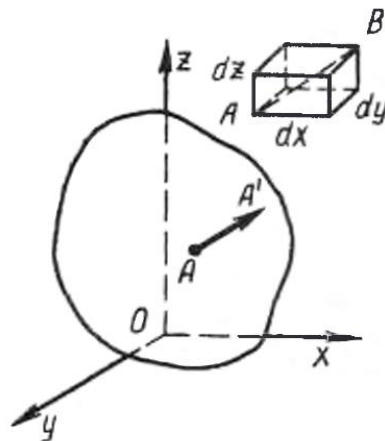


Рис.1. Нелинейно-упругое тело в состоянии до деформации в системе координат x, y, z

После деформации точка $A(x, y, z)$ перейдет в положение $A'(x', y', z')$, а точка B в положение $B'(x'', y'', z'')$. Элементарный параллелепипед деформируется, т.е.

изменит свою форму и размеры, в частности изменится длина диагонали AB , она станет равной $A'B'$. В дальнейшем будем ее обозначать через dS^* , так, что $A'B' = dS^*$.

Безразмерную величину

	$E_{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dS^* - dS}{dS}$	(4)
--	--	-----

назовем относительным удлинением отрезка AB , или относительным удлинением в точке A по направлению AB . Для того, чтобы можно было целиком определить деформацию, необходимо задать значения удлинений по трем направлениям, т.е. задать три вектора или девять проекций этих векторов на оси координат. Величины, определяемые таким образом, называются тензорами. Следовательно, деформация является тензором.

Координаты точки $B'(x'', y'', z'')$ получим, если к функциям u, ϑ и ω , определяющим координаты точки A' , добавим приращения этих функций $\Delta u, \Delta \vartheta, \Delta \omega$:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + dx + u + \Delta u; \\ y'' &= y + dy + \vartheta + \Delta \vartheta; \\ z'' &= z + dz + \omega + \Delta \omega; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Принимая во внимание (2) и (5), вычислим длину отрезка $A'B'$:

	$\begin{aligned} (dS^*)^2 &= (A'B')^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = \\ &= (dx + \Delta u)^2 + (dy + \Delta \vartheta)^2 + (dz + \Delta \omega)^2 \end{aligned}$	(6)
--	--	-----

Величины приращений перемещений $\Delta u, \Delta \vartheta$ и $\Delta \omega$ определим, учитывая, что координаты точки B отличаются от координат точки A на бесконечно малые величины dx, dy и dz , следовательно, при вычислении приращений можно ограничиться членами, содержащими дифференциалы координат в первой степени, т.е.:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \Delta \vartheta &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz \\ \Delta \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и группируя члены, содержащие квадраты дифференциалов и их попарные произведения, получим:

$$(dS^*)^2 = (1 + 2\varepsilon_{xx})dx^2 + (1 + 2\varepsilon_{yy})dy^2 + (1 + 2\varepsilon_{zz})dz^2 + 2\varepsilon_{xy}dxdy + 2\varepsilon_{xz}dxdz + 2\varepsilon_{yz}dydz \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для определения относительного удлинения E_{AB} вычтем из (8) квадрат первоначальной длины элемента dS , определяемый выражением (3):

$$(dS^*)^2 - dS^2 = 2[\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz]. \quad (10)$$

Из формулы (4) следует, что

$$dS^* = (1 + E_{AB})dS.$$

Подставив это значение в левую часть (10), получим:

$$\begin{aligned} E_{AB} \left(1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) dS^2 &= \varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \\ &+ \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz. \end{aligned} \quad (11)$$

Положение отрезка AB в системе координат x, y, z можно задать косинусами углов между его направлением и координатными осями. Обозначим эти косинусы соответственно

$$l = \cos(AB, x); \quad m = \cos(AB, y); \quad n = \cos(AB, z)$$

Очевидно

$$l = \frac{dx}{dS}; \quad m = \frac{dy}{dS}; \quad n = \frac{dz}{dS} \quad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим:

$$E_{AB} \left(1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{xz}ln + \varepsilon_{yz}mn. \quad (13)$$

Из этой формулы следует, что для определения относительного удлинения по любому направлению, определяемому косинусами l, m, n , необходимо знать шесть величин $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{yz}$. Эти величины полностью определяют тензор деформаций и поэтому называются компонентами тензора деформаций или просто деформациями.

Для определения геометрического смысла величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ направим отрезок AB параллельно одной из осей, например параллельно оси x . В этом случае при $l = 1, m = n = 0$ из (11) получаем:

$$E_{xx} \left(1 + \frac{E_{xx}}{2} \right) = \varepsilon_{xx}. \quad (14)$$

Здесь E_{xx} — обозначает удлинение элемента AB , параллельного оси x и имеющего первоначальную длину dx . Таким образом, деформация ε_{xx} связана с относительным удлинением элемента, параллельного оси x .

Аналогично такие же значения получим и для деформации ε_{yy} и ε_{zz} :

$$E_{yy} \left(1 + \frac{E_{yy}}{2} \right) = \varepsilon_{yy}; +\varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{xz}ln + \varepsilon_{yz}mn. \quad (15)$$

$$E_{zz} \left(1 + \frac{E_{zz}}{2} \right) = \varepsilon_{zz}.$$

Из (14) и (15) получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_{xx} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1; \\ E_{yy} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1; \\ E_{zz} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Деформации, имеющие одинаковые индексы, называются продольными деформациями.

Для выяснения геометрического смысла деформаций $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, имеющих смешанные индексы, рассмотрим более подробно деформации ребер элементарного параллелепипеда dx, dy, dz (рис. 2а).

Разместим начало координат в вершине недеформированного параллелепипеда. После деформации эта вершина переместится в т. O' с координатами u, ϑ, ω , точка a перейдет в т. a' с координатами:

$$\left. \begin{aligned} x_{a'} &= dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ y_{a'} &= \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \\ z_{a'} &= \omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Соответственно, точки b' и c' будут иметь координаты:

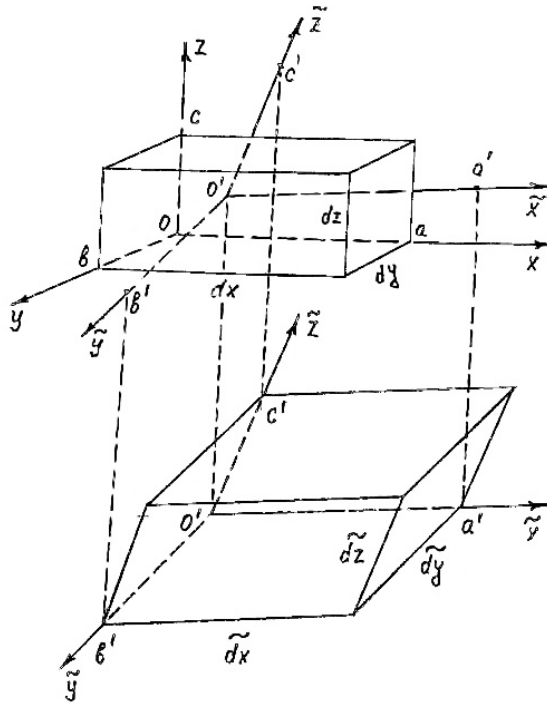


Рис. 2. Деформации ребер элементарного параллелепипеда

$$\left. \begin{aligned} x_{b'} &= u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \\ y_{b'} &= dy + \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy; \\ z_{b'} &= \omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{c'} &= u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ y_{c'} &= \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz; \\ z_{c'} &= dz + \omega + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

После деформации форма и размеры рассматриваемого объемного элемента изменятся (см. рис. 2б). Длины ребер после деформации обозначим $\widetilde{dx}, \widetilde{dy}, \widetilde{dz}$, а их направления соответственно $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Проекции длин ребер на оси координат определим, вычитая из координат соответствующей точки (a', b', c') координаты точки O' . Значения этих проекций приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ребро	Проекции на оси		
	x	y	z
$O'a' = \widetilde{dx}$	$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx$	$\frac{\partial \omega}{\partial x} dx$
$O'b' = \widetilde{dy}$	$\frac{\partial u}{\partial y} dy$	$dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy$	$\frac{\partial \omega}{\partial y} dy$
$O'c' = \widetilde{dz}$	$\frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{\partial \omega}{\partial z} dz$	$dz + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$

Пользуясь этой таблицей, легко вычислить длины ребер после деформации.

Например:

$$\left. \begin{aligned} (\widetilde{dx})^2 &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2; \\ (\widetilde{dy})^2 &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dy^2; \\ (\widetilde{dz})^2 &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] dz^2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

С другой стороны очевидно

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{dx} &= (1 + E_{xx})dx; \\ \widetilde{dy} &= (1 + E_{yy})dy; \\ \widetilde{dz} &= (1 + E_{zz})dz. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Разделив выражения первой строчки табл.1 на длину ребра $\widetilde{dx}$, выражения второй – на $\widetilde{dy}$ и третьей – на $\widetilde{dz}$, получим косинусы углов между направлениями $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ и осями x, y, z (табл. 2).

Таблица 2

Направления ребер после деформации	Косинусы углов между осями		
	x	y	z
$\tilde{x}$	$\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$	$\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$	$\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$
$\tilde{y}$	$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + E_{yy}}$	$\frac{1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{1 + E_{yy}}$	$\frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{1 + E_{yy}}$
$\tilde{z}$	$\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + E_{zz}}$	$\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}}{1 + E_{zz}}$	$\frac{1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}}{1 + E_{zz}}$

При составлении этой таблицы были использованы формулы (21), что привело к сокращению дифференциалов.

Пользуясь табл. 2, вычислим угол между ребрами после деформации, например угол между $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Используя известную формулу для косинуса угла между двумя прямыми, получим:

$$\cos(\tilde{x}, \tilde{y}) = \cos(\tilde{x}, x) \cos(\tilde{y}, x) + \cos(\tilde{x}, y) \cos(\tilde{y}, y) + \cos(\tilde{x}, z) \cos(\tilde{y}, z). \quad (22)$$

Подставляя сюда значения косинусов из табл. 2, определим:

$$\cos(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})} = \frac{\varepsilon_{xy}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})} \quad (23)$$

Обозначим разность между прямым углом и углом $(\tilde{x}, \tilde{y})$ через φ_{xy} . Эта величина показывает, насколько изменился прямой угол в процессе деформации. Очевидно,

$$\sin \varphi_{xy} = \cos(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\varepsilon_{xy}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})}. \quad (24)$$

Аналогично получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{xz} &= \frac{\varepsilon_{xz}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{zz})}; \\ \sin \varphi_{yz} &= \frac{\varepsilon_{yz}}{(1 + E_{yy})(1 + E_{zz})}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Таким образом, деформации с разными индексами определяют изменение углов элементарного параллелепипеда. Они называются деформациями сдвига.

В рамках рассматриваемой нелинейной теории деформации следует остановиться на определении объемной деформации.

Если элементарный параллелепипед с ребрами, равными единице, расположить в системе главных осей деформации, то он будет деформироваться без изменения углов, т.е. останется после деформации прямоугольным параллелепипедом со сторонами $1 + E_1$; $1 + E_2$; $1 + E_3$. Объем этого параллелепипеда изменится на величину θ_u :

$$\theta_u = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1 \quad (26)$$

Так как величина θ_u есть изменение единицы объема, то она называется объемной деформацией. Формула (26) дает точное значение для объемной деформации. В этой формуле величины E_1, E_2, E_3 есть главные удлинения, которые в соответствии с формулами (16) выражаются через главные деформации следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1; \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1; \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Подставив (27) в (26), получим:

$$\theta_u = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3)} - 1 \quad (28)$$

Если раскрыть скобки под квадратным корнем и учесть выражения (29) для инвариантов

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3; \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (29)$$

то получим еще одну формулу для объемной деформации:

$$\theta_u = \sqrt{1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3} - 1 \quad (30)$$

Для упрощения формул (26), (28) и (30) идут по следующему пути. Формулу (26), раскрыв скобки, преобразуем следующим образом:

$$\theta_u = E_1 + E_2 + E_3 + E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3 + E_1E_2E_3 \quad (31)$$

Если главные удлинения E_1, E_2 и E_3 не велики, то можно отбросить последний член формулы (31), содержащий их произведения. Далее, если $E_3 \ll E_1, E_3 \ll E_2$, то можно принять

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2 \quad (32)$$

И, наконец, при достаточно малых удлинениях можно считать

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3. \quad (33)$$

Иногда объемную деформацию отождествляют с первым инвариантом тензора деформаций

$$\theta_u \approx I_1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (34)$$

Однако, следует учитывать, что приближенные формулы могут привести к погрешностям в расчетах.

Формулы для деформаций (9) можно записать в виде, более удобном для анализа, если в них вместо компонентов перемещений использовать следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Согласно табл. 1 первая группа величин (35) представляет собой проекции удлинений ребер элементарного параллелепипеда. Рассмотрим, например, ребро dx . Так, по табл. 1 проекция этого ребра после деформации на ось x равна $\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$. Следовательно, относительное удлинение этой проекции равно: $\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}$. Поскольку эти величины составляют значительную часть от общих удлинений ребер, будем их в дальнейшем называть для краткости параметрами удлинений.

Используя данные табл. 2, аналогичным путем можно доказать, что вторая группа величин (35) связана с изменениями прямых углов проекцией элементарного параллелепипеда на соответствующие координатные плоскости,

что также видно на рис.3, на котором изображено изменение угла в плоскости xOz . Если пренебречь удлинениями по сравнению с единицей и отождествить тангенс угла с самим углом, то изменение угла в т.А будет равно: $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = e_{xz}$. Отсюда следует, что эти величины представляют собой значительную часть общей деформации сдвига, и в дальнейшем будем их кратко называть параметрами сдвигов.

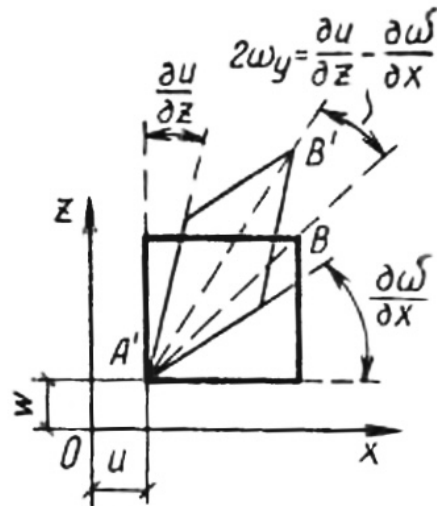


Рис. 3. Изменение угла в плоскости xOz

Из рис. 3 видно, что третья группа величин (35) связана с поворотами проекции грани элементарного параллелепипеда вокруг оси, ей перпендикулярной, и эти величины будут равны повороту этой грани, если сделать те же самые упрощения, что и при определении сдвигов. Можно также показать, что если

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,$$

то элементарный параллелепипед поворачиваться не будет. Поэтому эти величины будем называть жестким поворотом.

Итак, если выбрать элементарный параллелепипед в окрестностях точки A в произвольной системе координат, то деформацию можно представить себе как состоящую из нескольких элементов.

Во-первых, параллелепипед получит поступательное перемещение, и точка A перейдет в точку A' . Это перемещение задается проекциями на координатные

оси, т.е. величинами u, v и ω . Во-вторых, элементарный параллелепипед повернется на некоторый угол, определяемый величинами ω_x, ω_y и ω_z . Эту часть деформации называют жестким поворотом.

В-третьих, ребра изменяют свою длину и получают удлинения E_{xx}, E_{yy} и E_{zz} . Проекции этих удлинений на оси координат определяются параметрами e_{xx}, e_{yy} и e_{zz} . Эта часть деформации называется удлинениями.

Наконец, в-четвертых, изменятся углы граней элементарного параллелепипеда на величины $\varphi_{xy}, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$. Эта часть деформации называется сдвигом и с ней связаны параметры сдвига e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} . В том случае если элементарный параллелепипед находится в главной системе координат, четвертая составляющая деформации будет отсутствовать. Собственно характеристиками деформации в точке тела являются удлинения и сдвиги. Перемещение и повороты относятся к величинам, характеризующим деформацию тела в целом.

Подставив величины (35) в формулы (9), получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{xx} + \frac{1}{2} \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{yy} &= e_{yy} + \frac{1}{2} \left[e_{yy}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{zz} &= e_{zz} + \frac{1}{2} \left[e_{zz}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{xy} &= e_{xy} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right); \\ \varepsilon_{xz} &= e_{xz} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right); \\ \varepsilon_{yz} &= e_{yz} + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Эти формулы помогают обосновать систему упрощений основных уравнений теории нелинейных деформаций.

Первое упрощение, которое можно сделать, относится к случаю, когда деформации тела малы, но перемещение ничем не ограничено. Если удлинения малы по сравнению с единицей, то формулы (14) и (15) можно записать в более простом виде:

$$e_{xx} \approx E_{xx}; \quad e_{yy} \approx E_{yy}; \quad e_{zz} \approx E_{zz}. \quad (37)$$

Если, кроме того, сдвиги настолько малы, что изменение угла можно отождествить с его синусом, то вместо (24) и (25) получим:

$$\varepsilon_{xy} \approx \varphi_{xy}; \quad \varepsilon_{xz} \approx \varphi_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} \approx \varphi_{yz} \quad (38)$$

Формула для объемной деформации принимает вид (33) или (34):

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3 \approx e_1 + e_2 + e_3 \quad (39)$$

Как уже отмечалось, в этом случае объемная деформация отождествляется с первым инвариантом тензора деформаций. При этих упрощениях формулы для деформаций (9) и (36) остаются без изменений.

Если предположить, что малы по сравнению с единицей не только удлинения и сдвиги, но и повороты ω_x, ω_y и ω_z , то получим упрощения формул (9) и (36). Анализ показывает [1], что в этом случае вместо формул (36) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2); & \varepsilon_{xy} &= e_{xy} - \omega_x \omega_y; \\ \varepsilon_{yy} &= e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2); & \varepsilon_{xz} &= e_{xz} - \omega_x \omega_z; \\ \varepsilon_{zz} &= e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2); & \varepsilon_{yz} &= e_{yz} - \omega_y \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Дальнейшее упрощение получим тогда, когда квадраты поворотов и их произведения будут малы по сравнению с параметрами удлинений и сдвигов. В этом случае из (40) получаем уравнения Коши линейной теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\approx e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{xy} &\approx e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} &\approx e_{yy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; & \varepsilon_{xz} &\approx e_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_{zz} &\approx e_{zz} = \frac{\partial \omega}{\partial z}; & \varepsilon_{yz} &\approx e_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Из вышеизложенного следует, что использование уравнений линейной теории возможно в том случае, когда удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей и, кроме того, когда квадраты углов поворота и их произведения малы по сравнению с параметрами удлинений и сдвигов. Это может быть в случае деформации массивных тел, а также в некоторых случаях

деформаций стержней и пластинок. Формулы нелинейной теории необходимо использовать преимущественно при изучении деформации гибких тел.

Этот анализ показывает также, что как линейная, так и нелинейная теория изучают деформации одного порядка малости, связанные с конечными перемещениями. Различие между этими теориями состоит в том, что нелинейная теория учитывает влияние поворотов на удлинения и сдвиги, а линейная этим пренебрегает. Таким образом, распространенное мнение о том, что нелинейная теория изучает конечные деформации и перемещения, а линейная – бесконечно малые, неосновательно.

Уравнения совместности деформаций

Геометрический смысл уравнений сплошности (совместности или неразрывности) деформаций состоит в том, что если мы зададим компоненты деформации ε_{ij} как произвольные, независимые друг от друга функции координат точек тела, то непрерывность этих функций еще не будет гарантировать того, что тело в результате деформации останется сплошным. Может оказаться, что, разбив мысленно тело до деформации на бесконечное множество бесконечно малых прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям, и придав затем ребрам и граням этих параллелепипедов удлинения и сдвиги в соответствии с произвольно выбранными компонентами деформации, мы не сможем затем составить из получающихся при этом косоугольных параллелепипедов сплошное деформированное тело без зазоров между гранями и ребрами элементарных объемных элементов.

Оказывается, что функции ε_{ij} будут определять деформацию тела, не нарушающую его сплошности, лишь в том случае, если они подчиняются определенным шести дифференциальным соотношениям, которые, как показывает в своей книге [2] В.В. Новожилов, являются ковариантными компонентами тензора Римана-Кристоффеля [3] в системе x, y, z . Приравнивая их нулю, получают искомые шесть дифференциальных соотношений между компонентами деформации. Ниже приводятся два из этих шести

дифференциальных соотношений. Остальные четыре могут быть получены путем циклической перестановки.

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = g^{xx} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right] + \\
 & + g^{yy} \left[\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) \right] + \\
 & + g^{zz} \left[\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right] + \\
 & + g^{xy} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right] + \\
 & + g^{xz} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \right] + \\
 & + g^{yz} \left[\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) \right]; \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = g^{xx} \left[\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & \quad g^{yy} \left[\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
 & + g^{zz} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
 & + g^{xy} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right] + \\
 & + g^{xz} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right] + \\
 & + g^{yz} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Здесь g^{ik} - контравариантные составляющие этого тензора.

Если удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей, то разница между ко- и контравариантными составляющими тензора Римана-Кристоффеля в криволинейной системе координат x, y, z будет несущественна, получаясь лишь за счет членов величиной порядка компонентов деформации. Для устранения соответствующих членов в формулах (42) надо отбросить в них все члены, имеющие множителями компоненты деформации (но не их производные).

В итоге такого упрощения получатся следующие шесть приближенных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)^2 - \\ & - \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right); \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Наконец, если предположить, что малы по сравнению с единицей не только деформации, но и их производные, то мы получим возможность полностью линеаризовать соотношения неразрывности деформаций.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Соотношения (44) являются условиями сплошности деформации в том виде, в каком они формулируются в линейной теории упругости.

В.В. Новожилов в своей книге [2] приводит следующее замечание. Вывод общих соотношений (42) требует от читателя значительной теоретической подготовки. Однако в дальнейшем, при решении прикладных задач эти общие соотношения использоваться не будут, так что не столь уж важно, если не все при их выводе будет понятно до конца. Тем не менее необходимо было установить, во-первых, факт существования соотношений (42), во-вторых – их геометрический смысл и, в-третьих, вытекающие из них ограничения, налагаемые на деформации.

Уравнения равновесия объемного элемента

В нелинейной теории упругости подход к построению уравнений равновесия объемного элемента такой же как к построению геометрических соотношений и уравнений совместности деформаций, а именно сначала строятся общие уравнения для деформированного элемента (с конечными удлинениями, сдвигами, углами поворота), а затем путем исключения соответствующих компонентов (не характерных для рассматриваемой конструкции) производится упрощение этих уравнений.

Приведем без вывода общую систему уравнений равновесия и упрощенные системы уравнений.

Общая система уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x\xi}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\xi}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\xi}^*}{\partial z} + F_{\xi}^* &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x\eta}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\eta}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\eta}^*}{\partial z} + F_{\eta}^* &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x\zeta}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y\zeta}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}^*}{\partial z} + F_{\zeta}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{x\xi}^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz}^* = (1 + e_{xx}) \sigma_{xx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - w_z\right) \sigma_{xy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + w_y\right) \sigma_{xz}^*; \\
\sigma_{y\xi}^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz}^* = (1 + e_{xx}) \sigma_{yx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - w_z\right) \sigma_{yy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + w_y\right) \sigma_{yz}^*; \\
\sigma_{z\xi}^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{zx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zz}^* = (1 + e_{xx}) \sigma_{zx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - w_z\right) \sigma_{zy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + w_y\right) \sigma_{zz}^*; \\
\sigma_{x\eta}^* &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) \sigma_{xy}^* + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \sigma_{xz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + w_z\right) \sigma_{xx}^* + \\
&\quad + (1 + e_{yy}) \sigma_{xy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - w_x\right) \sigma_{xz}^*; \\
\sigma_{y\eta}^* &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) \sigma_{yy}^* + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \sigma_{yz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + w_z\right) \sigma_{yx}^* + \\
&\quad + (1 + e_{yy}) \sigma_{yy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - w_x\right) \sigma_{yz}^*; \\
\sigma_{z\eta}^* &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) \sigma_{zy}^* + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \sigma_{zz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + w_z\right) \sigma_{zx}^* + \\
&\quad + (1 + e_{yy}) \sigma_{zy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - w_x\right) \sigma_{zz}^*; \\
\sigma_{x\zeta}^* &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \sigma_{xz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - w_y\right) \sigma_{xx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + w_x\right) \sigma_{xy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{xz}^*; \\
\sigma_{y\zeta}^* &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \sigma_{yz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - w_y\right) \sigma_{yx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + w_x\right) \sigma_{yy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{yz}^*; \\
\sigma_{z\zeta}^* &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \sigma_{zz}^* = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - w_y\right) \sigma_{zx}^* + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + w_x\right) \sigma_{zy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{zz}^*;
\end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Здесь приняты обозначения

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{xx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{1 + E_x}; \quad \sigma_{xy}^* = \frac{S_x^*}{S_x} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{1 + E_y}; \quad \sigma_{xz}^* = \frac{S_x^*}{S_x} \cdot \frac{\sigma_{xz}}{1 + E_z} \\
\sigma_{yx}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \cdot \frac{\sigma_{yx}}{1 + E_x}; \quad \sigma_{yy}^* = \frac{S_y^*}{S_y} \cdot \frac{\sigma_{yy}}{1 + E_y}; \quad \sigma_{yz}^* = \frac{S_y^*}{S_y} \cdot \frac{\sigma_{yz}}{1 + E_z} \\
\sigma_{zx}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \cdot \frac{\sigma_{zx}}{1 + E_x}; \quad \sigma_{zy}^* = \frac{S_z^*}{S_z} \cdot \frac{\sigma_{zy}}{1 + E_y}; \quad \sigma_{zz}^* = \frac{S_z^*}{S_z} \cdot \frac{\sigma_{zz}}{1 + E_z};
\end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Входящие в уравнения равновесия множители $\frac{S_i^2}{S_i}$, D , g^{ii} отличаются от единицы только на величины одинакового порядка с удлинениями и сдвигами.

Отсюда при малой деформации их можно полагать равными единице. При этом система уравнений (46) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + e_{xx})\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y \right) \sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + e_{xx})\sigma_{yx} + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z \right) \sigma_{yy} + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y \right) \sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + e_{xx})\sigma_{zx} + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - w_z \right) \sigma_{zy} + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + w_y \right) \sigma_{zz} \right] + F_\xi = 0; \end{aligned} \quad (48)$$

два других уравнения системы могут быть получены из (48) путем циклической перестановки букв (x, y, z) .

Если удлинения и сдвиги, а также углы поворота малы по сравнению с единицей, то малыми по сравнению с единицей являются и параметры e_{ij} . При этом они будут отличаться от соответствующих компонентов деформации только на величины порядка квадратов углов поворота.

На этом основании система уравнений (48) может быть подвергнута дальнейшим упрощениям: в ней следует пренебречь параметрами e_{ij} как по сравнению с единицей, так и по сравнению с параметрами w_k (поскольку последние, будучи малыми, могут тем не менее, существенно превосходить удлинения и сдвиги). В результате получится следующая система:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xx} - w_z \sigma_{xy} + w_y \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_{yx} - w_z \sigma_{yy} + w_y \sigma_{yz}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [\sigma_{xz} - w_z \sigma_{zy} + w_y \sigma_{zz}] + F_\xi = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial x} [w_z \sigma_{xx} + \sigma_{xy} - w_x \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [w_z \sigma_{yx} + \sigma_{yy} - w_x \sigma_{yz}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [w_z \sigma_{xy} + \sigma_{yz} - w_x \sigma_{zz}] + F_\eta = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial x} [-w_y \sigma_{xx} + w_x \sigma_{xy} + \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [-w_y \sigma_{yx} + w_x \sigma_{yy} + \sigma_{yz}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [-w_y \sigma_{xz} + w_x \sigma_{yz} + \sigma_{zz}] + F_\zeta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

В этих уравнениях w_k могут быть отождествлены с углами поворота объемного элемента вокруг координатных осей.

Следующий шаг в сторону упрощения уравнений равновесия может быть сделан, если предположить, что все углы поворота настолько малы, что в системе (49) можно отбросить все члены, которые на них умножены, сохранив только члены, которые их не содержат.

После этого упрощения система уравнений (49) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_{\xi} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_{\eta} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_{\zeta} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

который, в совокупности с равенствами вида $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ является формулировкой условий равновесия в линейной (классической) теории упругости.

Мы пришли к уравнениям (50) путем цепи последовательных упрощений точных уравнений (45). Из характера этих упрощений видно, что критерием их допустимости является одновременная малость удлинений, сдвигов и углов поворота.

Однако, следует обратить внимание на то обстоятельство, что встречаются такие задачи, в которых даже при весьма малых углах поворота переход от уравнений (49) к уравнениям (50) оказывается невозможным. При выполнении данного упрощения следует обращать внимание на то, не являются ли напряжения, умноженные на повороты, большими, по сравнению с напряжениями, входящими в уравнения линейно. Проблемы изгиба тонких пластин и оболочек являются примерами, когда указанное выше обстоятельство существенно. Проблема устойчивости равновесия упругих тел является примером, когда линеаризация уравнений равновесия невозможна даже при бесконечно малых поворотах.

Вернемся к геометрическим уравнениям и уточним вопрос – какие упрощения для каких конструкций применяются

1. Расчет по деформированной схеме. Считается, что этот расчет является геометрически нелинейным расчетом, хотя, как было показано выше, геометрическая нелинейность появляется в связи с введением в уравнения между деформациями и перемещениями дополнительных членов, обозначающих удлинения, сдвиги и углы поворота, которые оказывают влияние на величину деформаций и их введение делает геометрические уравнения нелинейными. Здесь

же считается, что уравнения равновесия следует записывать для деформированного состояния системы, а уравнения связи деформаций с перемещениями принимаются в линейном варианте (41).

Для конструкций, используемых в строительном проектировании, вышеуказанная постановка вопроса используется для решения широкого круга задач, в первую очередь – задач расчета стержневых систем.

2. Вторая группа задач с использованием геометрической нелинейности характерна тем, что здесь используются нелинейные уравнения, связывающие деформации с перемещениями. Но в отличие от общих геометрических уравнений (9) и (36) здесь введены упрощения; считаются малыми по сравнению с единицей удлинения e_{ii} , сдвиги e_{ij} и повороты $w_i (i, j = x, y, z)$, см. уравнения (40). Характерный пример задач с такой нелинейностью – теория гибких пластин на основе уравнений Кармана.

3. Третья группа задач характерна тем, что в них удлинения (деформации) малы по сравнению с единицей, но относительно поворотов таких предположений сделать нельзя. Если удлинения (деформации) и сдвиги малы, то в общих нелинейных геометрических уравнениях (9) и (36) выражения для отдельных членов упрощаются, но сами уравнения остаются без изменения. Такому типу геометрической нелинейности соответствуют конструкции с гибкими нитями.

4. К четвертой группе задач относятся задачи, в которых перемещения, повороты, удлинения (деформации) и сдвиги нельзя считать малыми величинами по сравнению с единицей. В этом случае геометрические нелинейные соотношения (9) и (36) используются в неизменном виде. К этой группе относятся задачи расчета изделий из резины и резиноподобных материалов.

Рассмотрим пример расчета элементарной конструкции по деформированной схеме. Пример взят из книги [7].

Исходная система представлена на рис.4.1. Нагрузка P приложена в точке B и перемещается вместе с ней; b – начальная горизонтальная проекция стержней; h – вертикальная начальная проекция стержней. Задачу решаем, считая потерю устойчивости прямым симметричной. Определение усилий и перемещений

производится с использованием МКЭ в форме классического смешанного метода. Основная расчетная схема для фермы представлена на рис. 4.2. Решение по алгоритму пошагового нагружения, состоит в том, чтобы последовательно увеличивая на каждом шаге величину нагрузки P , учитывая нелинейное поведение системы, получить соответствующие каждому шагу перемещения узла B .

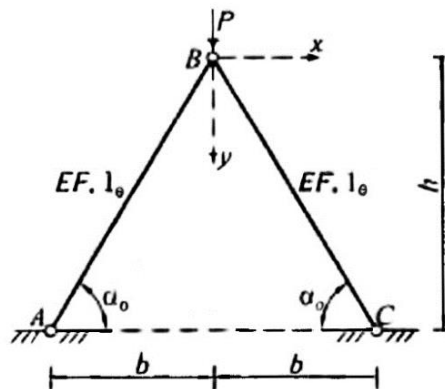


Рис. 4.1. Исходная система

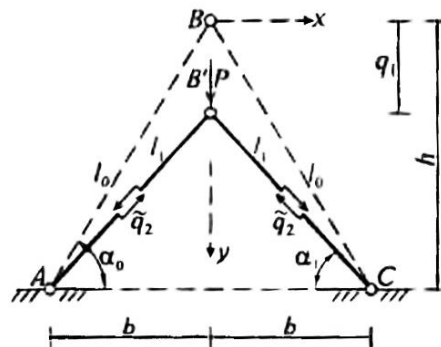


Рис. 4.2. Основная расчетная схема

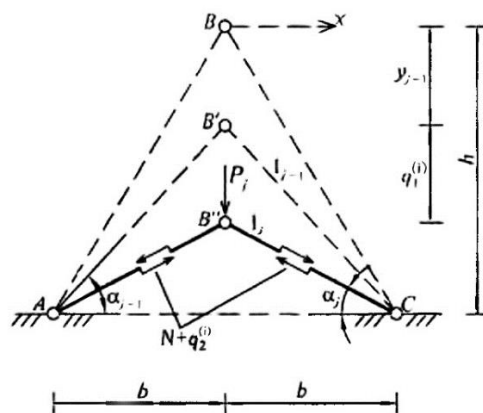


Рис. 4.3. Деформированная схема конструкции для промежуточного состояния

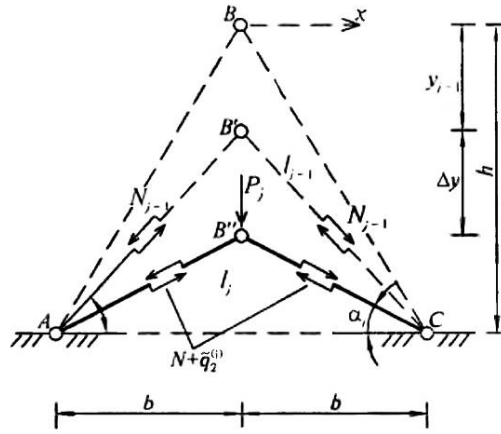


Рис. 4.4. Докритическое напряженно-деформированное состояние с известными значениями y_{j-1} и соответствующим N_{j-1}

Система уравнений смешанного метода для этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2\tilde{q}_2 \sin \alpha_1 + P = 0; \\ q_1 \sin \alpha_0 + \tilde{q}_2 \frac{l_0}{EF} \cdot \end{cases} \quad (51)$$

Первое уравнение – уравнение равновесие узла B (на ось y); второе – условие неразрывности деформаций в расчетном сечении; $\tilde{q}_2$ – неизвестное усилие в стержнях, возникающее от приложенной нагрузки P ; q_1 – неизвестное вертикальное перемещение узла B ; EF – жесткость поперечного сечения стержня.

Система уравнений (51) является нелинейной: внутренние силы (N) в стержнях системы определяются из условий равновесия конструкции в деформированном состоянии, которое само зависит от внутренних сил. Для решения данной системы уравнений воспользуемся методом простых итераций. На каждом шаге j по увеличению нагрузки будем задаваться начальными значениями $q_1^{(0)}$ и $\tilde{q}_2^{(0)}$, полученными из линейного решения уравнений (51) в предположении малости деформаций, т.е. из расчета предыдущей j -ой конфигурации конструкции по недеформированной схеме:

$$\begin{cases} \tilde{q}_2^{(0)} = -\frac{P}{2\sin \alpha_0}; \\ q_1^{(0)} = \frac{P}{\sin \alpha_0} \cdot \frac{l_0}{EF \sin \alpha_0}. \end{cases} \quad (52)$$

Значения $q_1^{(0)}$ и $\tilde{q}_2^{(0)}$ отличаются от «точных» на величину $\delta q_1^{(0)}$ и $\delta \tilde{q}_2^{(0)}$ соответственно, т.е. $q_1^{(1)} = q_1^{(0)} + \delta q_1^{(0)}$, $\tilde{q}_2^{(1)} = \tilde{q}_2^{(0)} + \delta \tilde{q}_2^{(0)}$, где $q_1^{(1)}$ и $\tilde{q}_2^{(1)}$ – первое приближение к искомым «точным» значениям q_1 и $\tilde{q}_2$. Система уравнений (51) может быть переписана следующим образом для первого шага по нагрузке и i -ой итерации по определению величин невязки δq_1 и $\delta \tilde{q}_2$:

$$\begin{cases} 2 \left(\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \right) \sin \alpha_i + P = 0; \\ \left(q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)} \right) \sin \alpha_0 + \left(\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \right) \frac{l_0}{EF} = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Каждый j -й шаг догружения увеличивает продольное усилие $N = \sum_{j=1}^n \tilde{q}_2^{(j)}$ в стержнях и перемещение $y = \sum_{j=1}^n q_1^{(j)}$ узла B .

Поэтому в общем случае для j -ого шага по нагрузке и i -ой итерации для определения величин невязок δq_1 , $\delta \tilde{q}_2$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \left(N_{j-1} + \tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \right) \sin \alpha_i + P_i = 0; \\ \left(q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)} \right) \sin \alpha_{j-1} + \left(\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \right) \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Деформированная схема конструкции для промежуточного состояния показана на рис. 4.3.

Величину $\sin \alpha_i$ в i -ой итерации можно выразить следующим образом:

$$\sin \alpha_i = \frac{h - y_{i-1} - \left(q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)} \right)}{l_{j-1} - \left(\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \right) \frac{l_{j-1}}{EF}} \quad (55)$$

После подстановки (55) в (54) и алгебраических преобразований получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \delta q_1^{(i)} \left(-\tilde{q}_2^{(i)} - N_{j-1} \right) + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \left(h - y_{j-1} - q_1^{(i)} + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \right) + \\ & + \left(\tilde{q}_2^{(i)} + N_{j-1} \right) \left(h - y_{j-1} - q_1^{(i)} \right) + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \left(\tilde{q}_2^{(i)} + EF \right) = 0; \\ & \delta q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} + q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Записав эту систему уравнений в виде $[A] \left\{ \delta q_n^{(i)} \right\} + [C] = 0$ и решив ее как матричное уравнение, получим

$$\begin{Bmatrix} \delta q_1^{(i)} \\ \delta \tilde{q}_2^{(i)} \end{Bmatrix} = -[A]^{-1}[C], \quad (57)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} (-\tilde{q}_2^{(i)} - N_{j-1}) & \left(h - y_{j-1} - q_1^{(i)} + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \right) \\ \left(\frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} \right) & \left(\frac{l_{j-1}}{EF} \right) \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \left(\tilde{q}_2^{(i)} + N_{j-1} \right) \left(h - y_{j-1} - q_1^{(i)} \right) + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \left(\tilde{q}_2^{(i)} + EF \right) \\ q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Если величина нагрузки P достигает значения $P_{кр}$, то при превышении этого значения происходит «прощелкивание», и узел B сразу переместится на величину $y > 2h$. При этом дальнейшее решение системы нелинейных уравнений (4.4) методом простых итераций на участке $y_{кр} < y \leq 2h$ не будет сходиться.

Сменим параметр пошагового процесса – зададимся приращением Δy (вместо пошагового увеличения нагрузки P). Определяя усилия N , вызываемые этими перемещениями, найдем уравновешивающую их нагрузку P .

Исходным состоянием может являться любое докритическое напряженно-деформированное состояние с известными значениями y_{j-1} и соответствующим N_{j-1} (рис. 4.4)

Система уравнений (54) в этом случае принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 2 \left(N_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \right) \sin \alpha_j + P_j = 0; \\ \Delta y \cdot \sin \alpha_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{cases} \quad (59)$$

Подставляя в (59) значения $\sin \alpha_{j-1} = \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}}$, найдем величины $\tilde{q}_2^{(j)}$ и P_j :

$$\tilde{q}_2^{(j)} = - \frac{\Delta y EF (h - y_{j-1})}{l_{j-1}^2};$$

$$P_j = -2 \left(N - \frac{\Delta y EF (h - y_{j-1})}{l_{j-1}^2} \right) \frac{h - y_{j-1} - \Delta y}{l_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_{j-1}}{EF}}. \quad (60)$$

Получением выражений (60) для $\tilde{q}_2^{(j)}$ и P мы ограничимся, не будем приводить решение задачи в цифрах, хотя в первоисточнике [7] это решение приведено.

Мы привели пример нелинейного расчета конструкции по деформированной схеме с использованием итерационного процесса, когда за первое приближение берется линейное решение.

Тема 3. Конструктивная нелинейность

Лекция 6. Методы расчета сооружений с учетом конструктивной нелинейности

Вследствие конструктивных особенностей в процессе деформирования может изменяться расчетная схема конструкции. Например, могут образовываться новые связи или, наоборот, разрушаться старые. В таких случаях систему можно назвать конструктивно нелинейной. На рис. 1 приведен пример конструктивно-нелинейной системы. При небольшой нагрузке $P < P_k$ существует зазор между концом балки и правой опорой, и балка статически определима. При $P > P_k$ зазор исчезает, и схема балки существенно изменяется – она становится статически неопределимой. Конструктивная нелинейность присуща конструкции, находящейся в процессе монтажа, когда создаются новые связи, при разрушении, когда связи выключаются из работы, а также очень часто при изменении режима нагружения. Изменение расчетной схемы бывает скачкообразным (рис. 1а) или непрерывным (рис. 1б), в процессе нагружения конструкции может изменяться направление нагрузки. Сюда же можно отнести конструкции со связями, работающими только в одном направлении. Такие связи называются односторонними. Чем они отличаются от обычных связей?

Условия равновесия системы с обычными связями выражаются уравнениями. Определяемые из этих уравнений реакции связей могут принимать положительные, отрицательные или нулевые значения. С кинематической точки зрения эти связи характеризуются тем, что они препятствуют как положительным,

так и отрицательным перемещениям по их направлениям. Такие связи называются двухсторонними или постоянными.

Например, шарнирная связь C (рис. 2а) налагает не примыкающие (слева и справа) сечения условия, выражаемые равенствами $u_c^{\text{лев}} = u_c^{\text{пр}}$, $v_c^{\text{лев}} = v_c^{\text{пр}}$; жесткое защемление сечения A налагает условия $u_A = v_A = 0$, $\varphi_A = 0$; шарнирно подвижные опоры B и D налагают на соответствующие сечения условия $v_B = 0$, $v_D = 0$.

Отличными от этих связей являются связи переменные. Их особенность состоит в том, что налагаемые кинематические условия выражаются неравенствами или совокупностью уравнений и неравенств. Реакции таких связей не могут менять своего знака на обратный, они сохраняют свой знак или обращаются в нуль. С кинематической (или геометрической) точки зрения они характеризуются тем, что препятствуют перемещению по своему направлению только в одну сторону и не препятствуют перемещению в противоположную сторону. Такие связи (которым отвечают неравенства) называются односторонними.

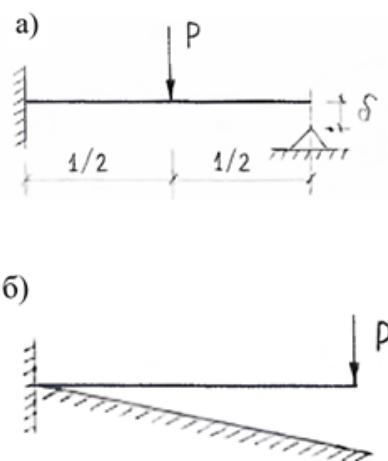
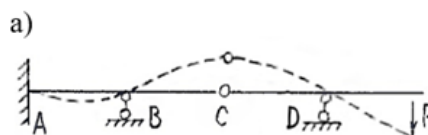


Рис. 1. На схеме «а» изменение расчетной схемы скачкообразное, на схеме «б» – непрерывное



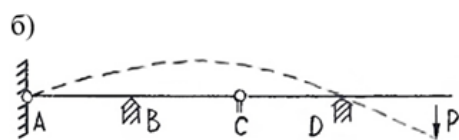


Рис. 2. Примеры связей: а) двусторонние связи, б) односторонние связи

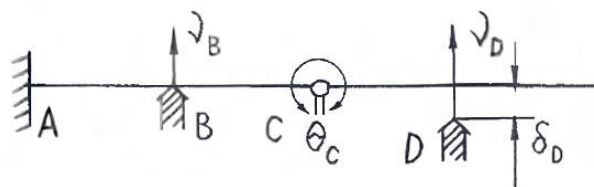


Рис. 3. Односторонние связи с зазором

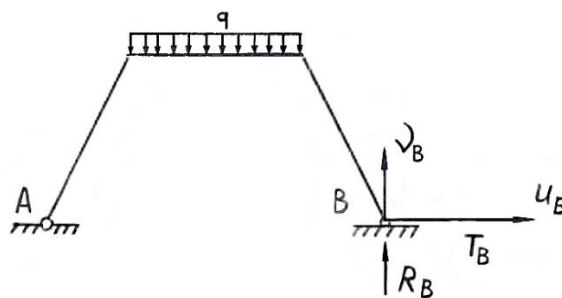


Рис. 4. Односторонние связи с трением

Переменные связи разделяются на два основных класса: идеальные (без учета трения и других усложняющих факторов) и неидеальные связи (с учетом сил трения, нелинейных свойств самих связей и пр.). Пример идеальных односторонних связей показан на рис. 2б. В сечении C здесь установлен односторонний шарнир, который при взаимном повороте смежных сечений в одну сторону выполняет роль обычного шарнира, а при стремлении вызвать поворот сечения в обратную сторону превращается в жесткий узел. Таким образом, налагается условие в виде неравенства $\varphi_c^{\text{пр}} - \varphi_c^{\text{лев}} \geq 0$ или $\varphi_c^{\text{пр}} \geq \varphi_c^{\text{лев}}$. Изгибающий момент в сечении C может быть только отрицательным (растяжение верхних волокон), т.е. $M_c \leq 0$. Аналогично односторонний шарнир в сечении A налагает на угол поворота условие $\varphi_A \geq 0$ (поворот возможен только против часовой стрелки). Односторонние опоры B и D препятствуют перемещениям соответствующих сечений балки вниз, но не вверх, т.е. $v_B \geq 0$, $v_D \geq 0$. Вообще любая односторонняя связь работает только в одну сторону и не работает в обратную сторону.

Роль односторонних связей обычно выполняют конструктивные элементы, способные работать или только на растяжение, или только на сжатие. Например, трос может работать только на растяжение, а кирпичный столб – на сжатие.

Односторонние связи могут быть не только сосредоточенными, но и распределенными, например, при опирании балки или плиты на упругое или жесткое основание, не способное сопротивляться отрыву.

В дальнейшем будем считать положительными усилие R в работающей односторонней связи и перемещение v по направлению выключающейся из работы односторонней связи, иначе говоря, положительными считаются возможные для односторонней связи усилия и перемещения. При этом k -я идеальная односторонняя связь может находиться только в одном из двух состояний: рабочем (связь включена) – в этом случае справедливы соотношения $R_k > 0, v_k = 0$, или в нерабочем (связь выключена) – $R_k = 0, v_k > 0$.

В общем виде граничные условия для группы идеальных односторонних связей в количестве m можно записать так:

$$v_k \geq 0; R_k \geq 0; v_k R_k = 0, k = 1, 2 \dots m. \quad (1)$$

Здесь первое условие означает состоянию выключенной связи, второе – состоянию включенной связи, третье выражает условие несовместности этих двух состояний (т.е. невозможности одновременного их наступления).

К классу идеальных односторонних связей относятся также связи с зазорами. Примером односторонней связи с зазором является неполный шарнир C (рис. 3), не препятствующий взаимному повороту сечений на угол θ_C (в заданном направлении) и налагающий условие $\varphi_C + \theta_C = 0$. Аналогичное условие можно записать и для односторонней опоры D с зазором δ_D : $v_D + \delta_D \geq 0$.

Граничные условия для k -й односторонней связи с зазором будут схожи с условиями (1):

$$v_k + \delta_k \geq 0; R_k \geq 0; (v_k + \delta_k) R_k = 0. \quad (2)$$

Связи, в которых необходимо учитывать силы трения, относятся к классу неидеальных переменных связей. Свойства систем с неидеальными связями значительно сложнее, чем с идеальными. Характерная особенность связей с трением состоит в следующем: если сила взаимодействия по касательной к поверхности контакта двух тел T меньше величины предельной силы трения $T_{\text{пр}}$, то поверхности контакта находятся в состоянии сцепления; если же касательная

сила достигает предельной величины, то по поверхности контакта двух тел происходит их взаимное скольжение.

Пусть, например, правая стойка рамы (рис. 4) опирается на горизонтальную поверхность с трением. Тогда при условии допредельного трения $|T_B| < T_{\text{пр.}B}$ горизонтальное смещение на опоре $u_B = 0$, при условии предельного трения $|T_B| = T_{\text{пр.}B}$ смещение $u_B = 0$.

Зависимость сил трения от сил взаимодействия на контакте может быть описана законом Кулона. В этом случае величина предельной силы трения определяется формулой:

$$T_{\text{пр}} = fR, \quad (3)$$

где f – коэффициент трения; R – сила взаимодействия по нормали к поверхности контакта.

В результате полные граничные условия для k -й связи, отвечающие кулоновскому трению, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} |T_k| &\leq fR_k; R_k \geq 0; T_k u_k \leq 0; \\ (|T_k| - fR_k)u_k &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Первое условие выражает закон трения Кулона; второе – условие включенной связи; третье устанавливает связь между направлением скольжения и направлением силы трения; четвертое выражает условие несовместности состояний сцепления и скольжения.

Более сложный вид неидеальных связей – односторонние связи с учетом трения. В этом случае возможны все три состояния контакта: состояние отрыва (когда односторонняя связь выключается из работы); состояние контакта со скольжением и, наконец, состояние сцепления. Полная система граничных условий для такого рода односторонней связи имеет вид

$$\begin{aligned} v_k + \delta_k &\geq 0; R_k \geq 0; (v_k + \delta_k)R_k = 0; \\ |T_k| &\leq fR_k; T_k u_k \leq 0; (|T_k| - fR_k)u_k = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведенные выше виды переменных связей – частные случаи более общего класса связей, свойства которых не являются линейной функцией внешних сил. Нелинейность самих односторонних связей может быть обусловлена как

свойствами материала, так и конструктивными особенностями связей либо тем и другим.

Особенности расчета систем с односторонними связями

Особенность расчета сооружений, содержащих односторонние связи, состоит в том, что расчетная схема сооружения сама является функцией нагрузки. В процессе нагружения одни связи могут выключиться, другие - включиться; при этом число и местоположение работающих связей заранее неизвестно и может быть определено только в процессе решения задачи. Таким образом, система с односторонними связями, хотя бы и идеально упругими, не является линейно деформируемой. В общем виде к такой системе неприменим принцип независимости действия сил и все его следствия. Лишь небольшая, наиболее общая, часть основных теорем строительной механики сохраняет свою силу.

Основная задача расчета систем, имеющих односторонние связи, состоит в следующем: выяснить, какие из этих связей будут работать при действии заданной нагрузки, а какие нет; другими словами, отыскать среди всех возможных систем действительную (рабочую) систему, отвечающую заданной нагрузке. Например, при наличии n идеальных односторонних связей можно образовать 2^n различных систем (так, при $n = 20$ число возможных систем равно $2^{20} = 1048576$). В анализе всех этих систем и в выявлении из них фактической рабочей системы и состоит сложность проблемы.

Способы отыскания рабочей системы могут быть самыми различными. Первыми для расчета систем с идеальными односторонними связями стали применять прямые итерационные методы [1,3,4], в частности те или иные разновидности так называемых алгоритмов переключения состояния связей. Впервые алгоритм такого типа был сформулирован И. М. Рабиновичем, поэтому носит название алгоритма Рабиновича. Изложим его суть.

Пусть для некоторого (например, начального) состояния системы часть односторонних связей находится в рабочем состоянии, т. е. включена: $R_k > 0$, $v_k + \delta_k = 0$; другая часть выключена: $R_k = 0$, $v_k + \delta_k > 0$. Выполняется обычный линейный расчет, по его результатам на следующей итерации у всех «неправильно

работающих» односторонних связей меняется их состояние: производится переключение текущего состояния этих связей на противоположное. Так, если реакция в работающей связи имеет недопустимый знак ($R_k < 0$), то данная связь выключается из работы; если же перемещение по направлению выключенной связи имеет недопустимое значение ($v_k + \delta_k < 0$), то данная связь переходит во включенное состояние (рассматривается как двусторонняя). Процесс последовательных приближений повторяется до тех пор, пока в рассчитываемой системе не останется «неправильно работающих» односторонних связей.

Проиллюстрируем применение алгоритма Рабиновича на примере расчета изгибаемой балки с односторонними опорами (рис. 5а). Между балкой и опорами $k = 1, 2, 3$ заданы начальные зазоры $\delta_k = 25, 35, 30$ мм, жесткости всех участков балки одинаковы: $EJ = 10000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$. Требуется найти рабочую систему балки при заданной нагрузке $F = 2 \text{ кН}$.

На первой итерации выполняем линейный расчет балки при выключенных односторонних связях (рис. 5б). Поскольку величины $v_k + \delta_k$ для всех односторонних связей оказываются меньше нуля, переключаем их все в рабочее состояние (т.е. принимаем как двусторонние).

На второй итерации выполняем расчет балки при заданных величинах прогибов на опорах, соответствующих начальным зазорам (рис. 5в). При этом реакции в 1-й и 3-й связях получаются отрицательными, следовательно, выключаем данные связи.

На третьей итерации (рис. 5г) получаем недопустимый прогиб по направлению 1-й связи ($v_1 + \delta_1 = -30 + 25 < 0$), поэтому снова переключаем ее в рабочее состояние (включаем).

На четвертой итерации (рис. 5д) получаем положительные реакции в 1-й и 2-й включенных связях и допустимый прогиб по направлению 3-й выключенной связи ($v_3 + \delta_3 = -18 + 30 > 0$). Так как все односторонние связи «работают правильно», итерационный процесс завершается.

Вследствие своей простоты прямые итерационные методы получили широкое распространение, хотя они не всегда гарантируют сходимость и могут приводить к заикливанию процесса переключения связей, как показано в (5). Кроме того, не исключен случай перехода системы на какой-либо итерации в состояние геометрической неизменяемости.

Другой подход к решению задач с односторонними связями – использование методов математического программирования [1,7]. Так, задача с идеальными односторонними связями может быть сведена к задаче квадратичного программирования, для решения которой могут быть применены соответствующие численные процедуры (градиентного спуска, возможных направлений, множителей Лагранжа и др.).

Основанием для сведения исходной задачи к задаче квадратичного программирования при расчете, например, по методу сил служит то, что система канонических уравнений выражает условие экстремума потенциальной энергии как квадратичной функции лишних неизвестных, а неравенства, относящиеся к знакам усилий и перемещений, налагают на минимизируемую функцию ряд ограничений. Эквивалентная задача квадратичного программирования возникает также при расчете по методу перемещений или по смешанному методу.

Ниже приводится формулировка задачи квадратичного программирования, данная в книге В.А. Перельмутере [5], при расчете упругой системы с идеальными односторонними связями по методу перемещений. Необходимо минимизировать квадратичный функционал $\Pi(z)$

$$\Pi(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^n R_{iF} z_i \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$v_k = \sum_{j=1}^n C_{kj} + C_{kF} \geq 0, k = 1, \dots, m \quad (6)$$

Здесь $\Pi(z)$ – квадратичный функционал полной потенциальной энергии системы; z_i , r_{ij} , R_{iF} , $i, j = 1, \dots, n$ – совокупность всех кинематических

неизвестных, коэффициентов и свободных членов метода перемещений; v_i – перемещение в системе по направлению k -й односторонней связи; C_{kj} , C_{kF} – перемещения в основной системе метода перемещений по направлению k -й односторонней связи от единичного перемещения $z_j = 1$ и от заданной нагрузки.

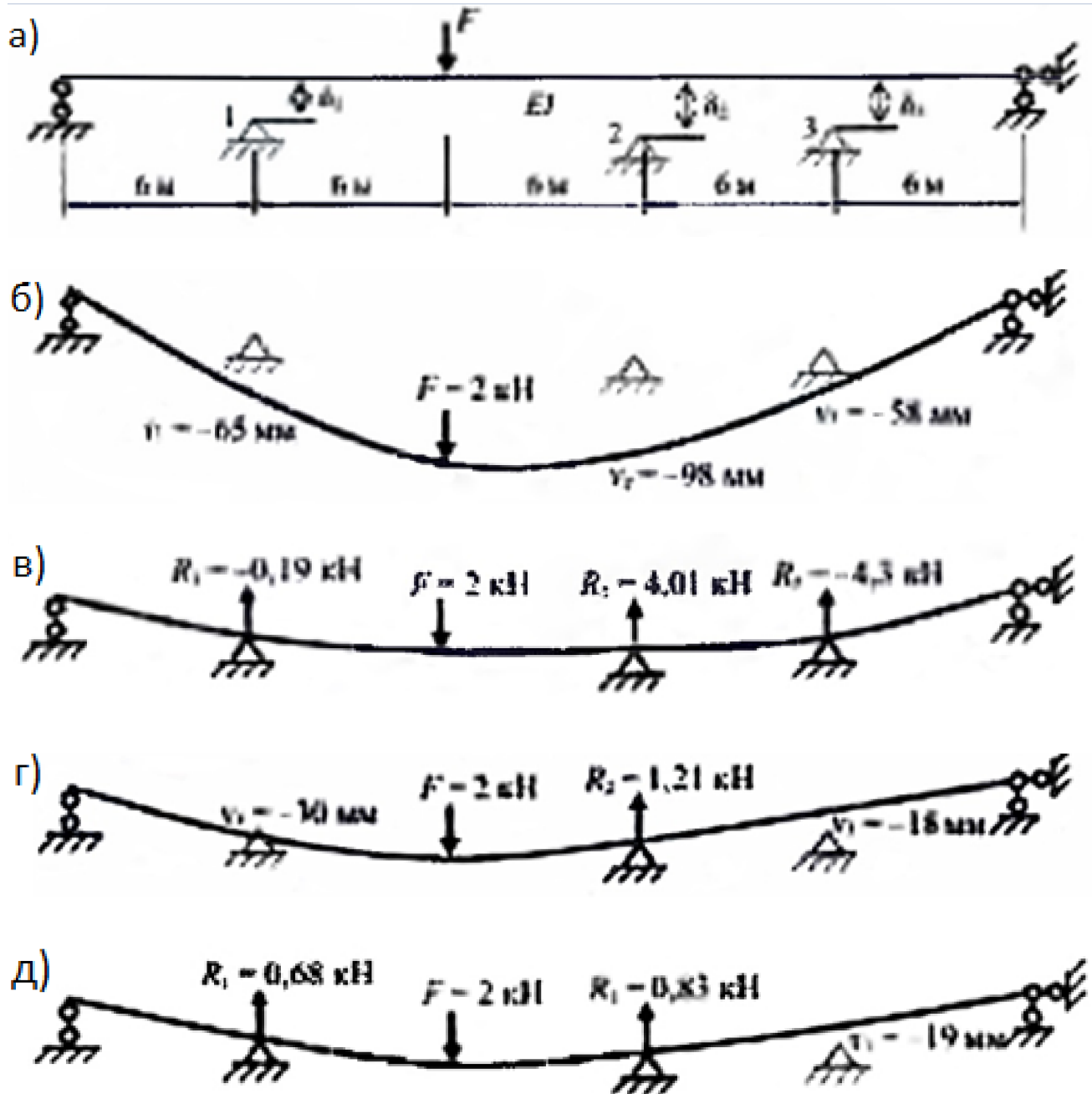


Рис. 5. Балка с односторонними зазорами на опорах

Свойства решений задачи (6) и методы ее численного решения хорошо исследованы (см., например, книги [7] Перельмутер А.В. Элементы теории систем с односторонними связями. – М.: ЦИНИСА Госстроя СССР, 1969. – 127 с; [8] Вовкушевский А.В, Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. – М.: Энергия, 1981. – 136 с.). Отметим особенности решений, которые необходимо понимать при постановке задачи и анализе результатов.

Рассмотренная постановка задачи в виде задачи квадратичного программирования относится к системам с идеальными связями без трения, у которых единственным источником нелинейности является наличие односторонних связей. Системы такого типа часто называют конструктивно нелинейными. Для них характерно полностью обратимое упругое поведение, которое определяется единственным решением задачи. Свойство единственности решения может быть потеряно при включении в рассмотрение сил трения даже для тех случаев, когда задана история нагружения системы. В связи с этим следует весьма осторожно относиться к моделированию поведения упругопластических систем в форме систем с идеальными односторонними связями. Идентичность поведения упругопластических систем и систем с трением, а также имеющая там место неединственность поля скоростей, хорошо известны [9].

Удобство применения математического программирования состоит в том, что могут быть использованы разработанные универсальные алгоритмы и отпадает необходимость перебора вариантов при поиске рабочей системы. Однако в случае неидеальных односторонних связей свести решение конструктивно нелинейной задачи к проблеме минимизации соответствующего функционала в общем случае не представляется возможным. Кроме того, затруднительно решение таких задач, связанное с доказательством существования и единственности решения.

Наряду с классическими методами (методы сил, перемещений) для расчета конструктивно-нелинейных систем широко применяются численные методы

строительной механики. Наиболее удобным для практического использования следует признать метод конечных элементов. При этом континуальные задачи контактного взаимодействия упругих тел сводятся к задачам с дискретными связями и в этом смысле приближаются к обычным задачам строительной механики стержневых систем. С помощью обычной процедуры МКЭ [11] сплошное тело моделируется конечномерной системой. Затем на эту систему накладываются односторонние дискретные связи и каким-либо численным способом уточняется их действительное состояние.

В свою очередь для моделирования работы односторонних связей могут применяться специальные контактные конечные элементы (ККЭ). Эти элементы вводятся на участках возможного контакта взаимодействующих тел, тем самым дискретизируя некоторый тонкий слой (фиктивный или имеющий место в действительности) между контактирующими поверхностями. Этот контактный слой объединяет взаимодействующие тела в единую систему и благодаря приданным ему особым свойствам, учитываемым посредством численного анализа (итерационного либо пошагового), может удовлетворять необходимым условиям контакта. В частности, такой подход позволяет конструктивную нелинейность (то есть задачи с односторонними связями и трением на контакте) свести к рассмотрению только лишь этого дискретного контактного слоя. С этим подходом можно ознакомиться в работе А.А. Лукашевича [10] Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач. Изв. вузов. Строительство. – 2007. - №12. – с. 18-23.

Решение конструктивно нелинейных задач пошаговым методом

При использовании пошаговых методов заданная нагрузка прикладывается не сразу, а некоторыми шагами, вплоть до достижения своего окончательного значения. Положительной стороной пошагового процесса является то, что на его основе может быть получено решение задачи на любой ступени нагружения при удовлетворение всех уравнений состояния и граничных условий для рассчитываемой системы. В то же время использование пошаговых алгоритмов

целесообразно в тех случаях, когда решение конструктивно нелинейной задачи зависит от истории нагружения (при учете сил трения, последовательности возведения сооружения и т. п.).

Рассмотрим вариант пошагового метода, предложенного А.А. Лукашевичем в работах [10, 14], применительно к расчету систем с идеальными односторонними связями и односторонними связями с трением.

Расчет систем с идеальными односторонними связями пошаговым методом

Рассмотрим упругую систему с идеальными односторонними связями (числом m). Граничные условия для односторонних связей при наличии возможных зазоров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} v_k + \delta_k \geq 0; R_k \geq 0; (v_k + \delta_k)R_k = 0 \\ k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

Численная реализация условий (7) осуществляется посредством процесса пошагового нагружения и изменения состояния односторонних связей. Так, если выполняется условие

$$v_k + \delta_k = 0 \text{ и } R_k > 0,$$

то связь находится во включенном состоянии.

Если

$$v_k + \delta_k > 0 \text{ и } R_k = 0,$$

то связь находится в выключенном состоянии.

Изменение текущего состояния, а именно момент перехода от одного состояния к другому представляет собой событие – соответственно это будут события выключения и включения односторонней связи. Таким образом в процессе нагружения происходит цепь событий, определяющих состояние односторонних связей и последовательно изменяющих расчетную схему сооружения.

Заданная нагрузка (выраженная через некоторый параметр нагрузки P) прикладывается шагами $\Delta P' = \Delta \lambda' P$, где $\Delta \lambda'$ параметр, определяющий величину s -го шага нагружения ($0 < \Delta \lambda' \leq 1$).

Предполагается, что между двумя последовательными событиями система деформируется по линейному закону: в этом случае в пределах каждого шага строится решение линейно-упругой задачи, а события на контакте определяются согласно схеме простого нагружения. Пошаговый процесс осуществляется таким образом, чтобы каждая из этих линейных задач соответствовала одному шагу нагружения, выполняемого для каждой такой расчетной схемы, т. е. от момента наступления одного события до момента наступления следующего, при этом определение размера шага нагружения является частью алгоритма. В результате решение конструктивно-нелинейной задачи с односторонними связями будет представляться в виде решения последовательности линейных задач при последовательном же изменении расчетных схем сооружения.

Последовательность действий на каждом шаге состоит из пробного шага (для удобства примем его равным единице), его уточнения и перерасчета результатов. Из анализа решения линейной задачи на пробном шаге определяется момент наступления ближайшего в процессе нагружения события (включения либо выключения связи) и, соответственно, величина требуемого для этого уточненного (основного) шага нагружения. Таким образом, в результате выполнения основного шага устанавливается новое состояние связей (т. е. меняется текущая расчетная схема).

При изложении алгоритма примем за исходный s -й уровень нагружения, т.е. по завершении s -го шага нагружения определены уровень нагружения P^s , состояние всех односторонних связей, значения перемещений v_k^s и усилий R_k^s в них.

Рассмотрим пошаговый алгоритм на примере расчета балки с идеальными односторонними связями (рис. 6а), рассмотренной ранее. Первоначально все односторонние связи принимаются в выключенном состоянии, начальные значения перемещений и усилий равны нулю ($v_k^0 = R_k^0 = 0, k = 1, 2, 3$). При изложении хода расчета приняты следующие размерности: усилия – в кН, перемещения – в мм.

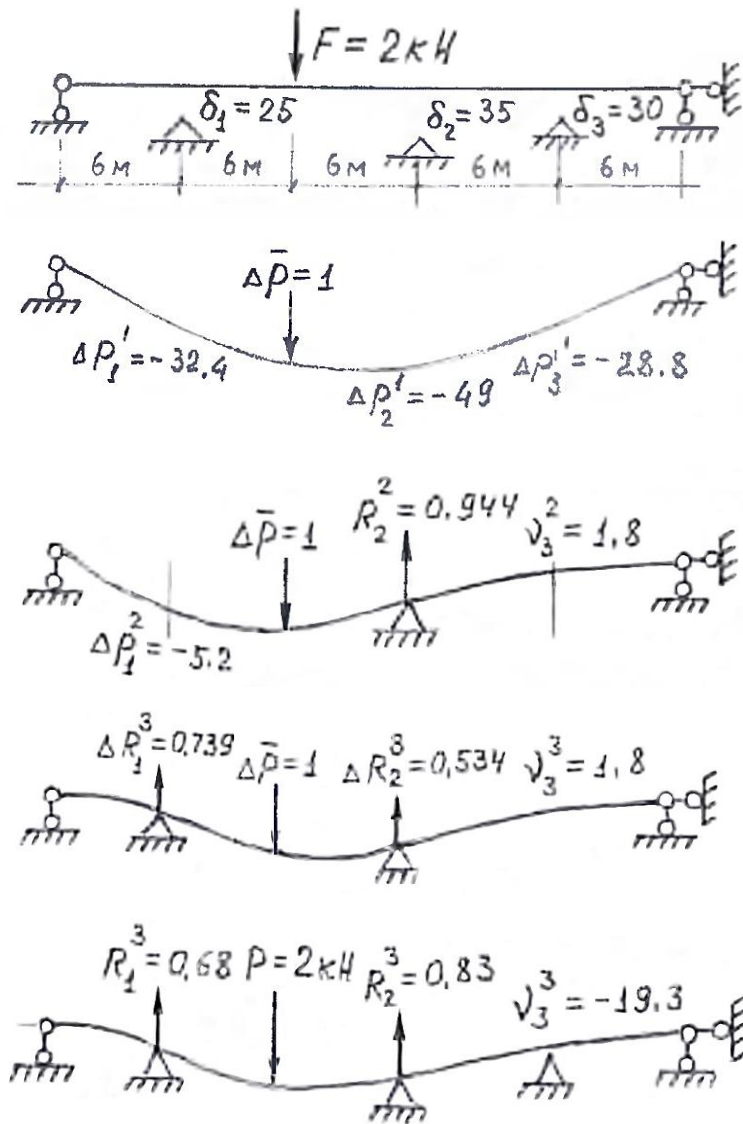


Рис. 6. Пошаговый расчет балки с односторонними связями

Шаг 1. Выполняется $(s + 1)$ пробный шаг нагружения ($\Delta \bar{P} = 1$). Для каждой k -й односторонней связи определяются приращения перемещений по направлению выключенных связей Δv_k^{s+1} и усилия во включенных связях. Как видно из рис. 6б, $\Delta v_1^1 = -32.4$ мм; $\Delta v_2^1 = -49$ мм; $\Delta v_3^1 = -28.8$ мм.

Шаг 2. Перемещения по направлению всех односторонних связей меньше нуля (см. рис. 6б), поэтому определяем величину шага, требуемого для наступления ближайшего включения какой-либо связи

	$\Delta P_1^{s+1} = \min \left(\left \frac{v_k^s + \delta_k}{\Delta v_k^{s+1}} \right _{\Delta v_k^{s+1} < 0} \right), \quad k \in K_1$	(8)
	$\Delta P_1^1 = \min \left(\left \frac{0+25}{-32.4} \right , \left \frac{0+35}{-49.0} \right , \left \frac{0+30}{-28.8} \right \right) = 0.714$	

Пересчитаем приращения перемещений для основного шага нагружения $\Delta P^1 = 0.714$ и определим значения перемещений для уровня нагружения

$$P^1 = P^0 + \Delta P^1 = 0 + 0.714 = 0.714;$$

$$\Delta v_1^1 = 0.714(-32.4) = -23.1;$$

$$\Delta v_2^1 = 0.714(-49.0) = -35;$$

$$\Delta v_3^1 = 0.714(-28.8) = -20.6;$$

$$v_1^1 = 0 + (-23.1) = -23.1;$$

$$v_2^1 = 0 + (-35) = -35;$$

$$v_3^1 = 0 + (-20.6) = -20.6;$$

Так как $v_2^1 + \delta_2 = -35 + 35 = 0$, устанавливаем вторую связь во включенное состояние

Шаг 3. Выполняем расчет балки при включенной 2-й связи на $\Delta \bar{P} = 1$ (рис. 6в): из всех полученных приращений перемещений и усилий в односторонних связях только перемещение $\Delta v_1^2 = -5.2 < 0$

$$\Delta P^2 = \min \left(\left| \frac{-23.1 + 25}{-5.2} \right| \right) = 0.365$$

Определяем приращения перемещений и усилий для основного шага $\Delta P^2 = 0.365$ и их значения для уровня $P^2 = P^1 + \Delta P^2 = 0.714 + 0.365 = 1.079$

$$\Delta v_1^2 = 0.365(-5.2) = -1.9;$$

$$\Delta R_2^2 = 0.365(0.944) = 0.345;$$

$$\Delta v_3^2 = 0.365(1.8) = 0.7;$$

$$v_1^2 = -23.1 + (-1.9) = -25;$$

$$v_2^2 = -35;$$

$$v_3^2 = -20.6 + 0.7 = -19.9; \quad R_2^2 = 0.345.$$

Так как $v_1^2 + \delta_1 = -25 + 25 = 0$ устанавливаем 1-ю связь во включенное состояние.

Шаг 4. Выполняем расчет балки при включенных 1-й и 2-й связях на $\Delta \bar{P} = 1$ (рис. 6г). Полученные перемещения и усилия больше нуля, поэтому подбираем шаг до заданной нагрузки:

$$\Delta P^3 = (2 - 1.079) = 0.921$$

Приращения перемещение и усилий на данном шаге:

$$\Delta R_1^3 = 0.921(0.739) = 0.68;$$

$$\Delta R_2^3 = 0.921(0.534) = 0.485;$$

$$\Delta v_3^3 = 0.921(0.7) = 0.6.$$

Значения перемещений и усилий для окончательного уровня нагружения $P^3 = P^2 + \Delta P^3 = 1.079 + 0.921 = 2.0$

$$v_1^3 = -25;$$

$$v_2^3 = -35;$$

$$v_3^3 = -19.9 + 0.6 = -19.3;$$

$$R_1^3 = 0.68;$$

$$R_2^3 = 0.485 + 0.345 = 0.83.$$

Состояние всех односторонних связей на третьем шаге не меняется.

Анализ применения пошаговых алгоритмов к расчету систем односторонними связями позволяет сделать следующие выводы:

- в физическом смысле подобные алгоритмы можно трактовать как математическое моделирование процесса нагружения и изменения состояния связей рассматриваемой системы;

- на каждом уровне нагружения предоставляется возможность отслеживать текущее состояние системы, включая моменты наступления очередного события на контакте (т.е. изменения состояния);

- при расчете линейно деформируемых систем с идеальными односторонними связями пошаговый процесс сходится к истинному решению за конечное число шагов нагружения;

- не представляет трудностей распространение пошаговых алгоритмов для расчета нелинейно деформируемых систем с односторонними связями, при усложненных условиях контакта, нелинейных свойствах односторонних связей и т.п.

Расчет систем с односторонними связями и трением

Рассмотренная выше задача относится к системам с идеальным односторонними связями, у которых единственный источник нелинейности - это сами односторонние связи. Для таких систем характерно полностью обратимое упругое поведение, которое определяется единственным решением задачи.

При наличии сил трения задача с односторонними связями значительно усложняется как в математическом отношении – для нее не существует доказательств единственности решения, так и в возможности ее численного решения. В этой связи учет характера и последовательности нагружения хотя и не гарантирует единственности, однако, по крайней мере, существенно сужает множество возможных решений задачи.

Граничные условия для задачи с односторонними связями и трением Кулона имеют следующий вид:

	$v_k + \delta_k \geq 0; R_k \geq 0; (v_k + \delta_k)R_k = 0;$	(9)
$ T_k \leq T_{пр.k} = fR_k; T_k u_k \leq 0; (T_k - T_{пр.k})u_k = 0; k = 1, \dots, m$		

Таким образом, к условиям включения-выключения односторонней связи добавляются условия сцепления-скольжения на контакте включенной связи. При

этом считается, что нормальные усилия R заранее не известны, а зависят от решения данной задачи.

Обратимся к условиям взаимодействия на контакте в процессе пошагового нагружения рассматриваемой системы. Так, если

$$v_k + \delta_k > 0, R = 0, k \in K_1,$$

то связь находится в выключенном состоянии. Если $u_k = 0, |T_k| < T_{\text{пр.}k}, k \in K_1$ (условие допредельного трения), то имеет место состояние сцепления. Если $u_k \neq 0, |T_k| = T_{\text{пр.}k}, k \in K$ (условия предельного трения) – состояние скольжения.

Изменение текущего состояния, а именно, момент перехода от состояния сцепления к состоянию скольжения, и наоборот, представляет собой событие проскальзывания или событие зацепления.

В основе алгоритма решения задачи с неидеальными связями тоже лежит пошаговый метод. Предполагается, что процесс нагружения является простым и между двумя последовательными событиями на контакте система деформируется линейно. В пределах текущего шага используется линейная аппроксимация изменения сил трения на контакте, а для их корректировки - способ компенсирующих нагрузок. С помощью анализа и уточнения шагов нагружения строится решение контактной задачи, которое является физически приемлемым и удовлетворяет всем уравнениям состояния и граничным условиям, в том числе условиям на контакте.

Дополнения, которые в этом случае должны быть внесены в изложенный ранее пошаговый алгоритм, касаются прежде всего учета изменения сил трения в процессе нагружения и влияния этих изменений на состояние связей рассматриваемой системы.

Так, величине шага ΔP_k^{s+1} до момента наступления ближайшего события проскальзывания, при котором выполняется условие $|T_k^{s+1}| = T_{\text{пр.}k}^{s+1}$, определяется в предположении линейно изменяющейся на шаге предельной силы трения (при этом рассматриваются только связи в состоянии сцепления, для которых $\Delta \bar{T}_k^{s+1} > \Delta \bar{T}_{\text{пр.}k}^{s+1}$):

$$\Delta P_k^{s+1} = \min \left(\left| \frac{T_{\text{пр.}k}^s - T_k^s}{\Delta \bar{T}_k^{s+1} - \Delta \bar{T}_{\text{пр.}k}^{s+1}} \right|, \Delta T_k^{s+1} > \Delta T_{\text{пр.}k}^{s+1} \right), k \in K_m \quad (10)$$

В итоге из полученных значений выбирается наименьшее:

$$\Delta P^{s+1} = \min(\Delta P_1^{s+1}, \Delta P_2^{s+1}, \dots, \Delta P_n^{s+1}, P - P^s) \quad (11)$$

Переход из состояния скольжения в состояние сцепления на $(s + 1)$ шаге определяется следующим условием:

$$\frac{\Delta \bar{u}_k^{s+1}}{\Delta u_k^s} < 0 \text{ при } \Delta u_k^s \neq 0, k \in K_m \quad (12)$$

Кроме того, для связей, находящихся в состоянии скольжения, необходимо отслеживать изменение сил трения в контакте.

Так, если на каком-либо пробном шаге предельная сила превысит реакцию трения, т.е. $\Delta \bar{T}_{\text{пр.}k}^{s+1} > |\Delta T_k^{s+1}|$, $k \in K_m$, то необходимо вернуться к состоянию сцепления на k -м контакте и выполнить перерасчет основного шага ΔP^{s+1} .

Если же предельная сила трения на текущем шаге уменьшается ($T_{\text{пр.}k}^{s+1} < T_{\text{пр.}k}^s$, $k \in K_m$) либо на пробном шаге $\Delta \bar{T}_{\text{пр.}k}^{s+1} < |\Delta \bar{T}_k^{s+1}|$, то при сохранении состояния скольжения производится корректировка усилий на k -м контакте:

$$\begin{aligned} T_k^{s+1} &= T_k^s + \Delta T_{ck}^{s+1} \\ \Delta T_{ck}^{s+1} &= \Delta T_{\text{пр.}k}^{s+1} + \delta T_k^s, k \in K_m, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta T_k^s = T_{\text{пр.}k}^s - |T_k^s|$ – невязка силы трения на предыдущем шаге.

Таким образом обеспечивается выполнение условия предельного трения на текущем шаге в виде $|T_k^{s+1}| = T_{\text{пр.}k}^{s+1}$. В свою очередь к обеим контактным поверхностям прикладываются компенсирующие силы F_{ck}^{s+1} , равные ΔT_{ck}^{s+1} , но с противоположным знаком:

	$F_{ck}^{s+1} = -\Delta T_{ck}^{s+1}, k \in K_m$	(14)
--	--	------

В приведенных выше выражениях $\Delta \bar{R}_k^{s+1}$, $\Delta \bar{T}_k^{s+1}$ – приращения нормальной и касательной реакции на $(s + 1)$ -м пробном шаге; $\Delta \bar{T}_{\text{пр.}k} = f \Delta \bar{R}_k^{s+1}$ – приращение предельной силы трения; $\Delta \bar{u}_k^{s+1}$ – приращение смещения на контакте.

Перемещения и усилия для $(s + 1)$ -го основного шага и соответствующего уровня нагружения определяются так же, как и ранее

$$\begin{aligned}\Delta u_k^{s+1} &= \Delta P^{s+1} \Delta \bar{u}_k^{s+1}, u_k^{s+1} = u_k^s + \Delta u_k^{s+1}; \\ \Delta T_k^{s+1} &= \Delta P^{s+1} \Delta \bar{T}_k^{s+1}, T_k^{s+1} = T_k^s + \Delta T_k^{s+1}.\end{aligned}\quad (15)$$

В качестве наглядного примера, иллюстрирующего применение пошагового метода, рассмотрим расчет шарнирно-стержневой системы (рис. 7). На опорах $k = 1, 2, 3$ действует трение Кулона, коэффициент трения $f = 0.3$. К системе приложены вертикальные силы $F_1 = 45; 15; 5$ кН и горизонтальная нагрузка $P_1 = 40$ кН и $P_2 = 20$ кН, жесткость стержней $EA = 50000$ кН. Требуется определить контактные усилия, а также горизонтальные смещения на опорах 1-3 от заданного нагружения.

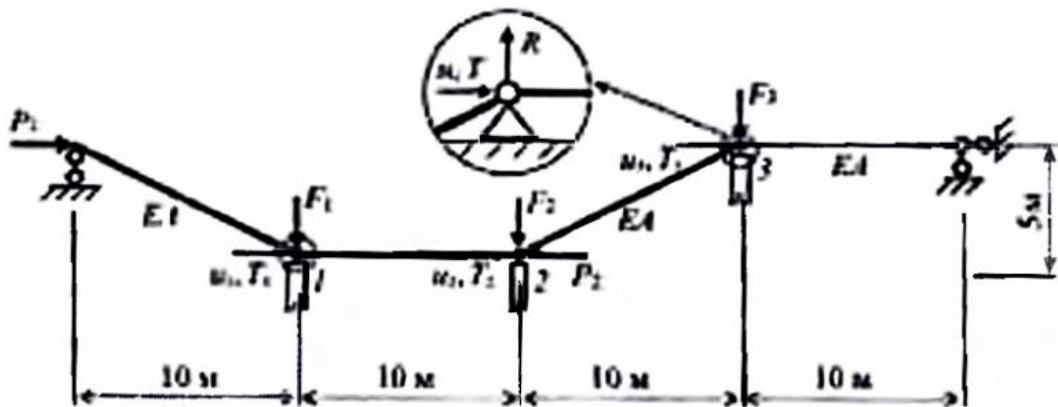


Рис. 7. Стержневая система с трением на опорах

Первоначально при нулевом уровне нагружения на всех опорах с трением задается состояние сцепления, при этом начальные значения смещений $u_k^0 = 0$. Действие вертикальных сил F_k можно отнести к нулевому уровню нагружения, тогда начальные значения реакций $R_k^0 = 45, 15, 5$ кН. Начальные значения предельных сил трения: $T_{пр.k}^0 = f R_k^0 = 13.5; 4.5; 1.5$ кН. За параметр нагрузки примем $P = P_1$, тогда $P_2 = 2P$. Размерность усилий – кН, смещений – мм.

Шаг 1. Выполняем расчет системы на пробный шаг $\Delta \bar{P}^1 = 1$. Приращения нормальных и касательных реакций, а также предельных сил трения

$$\begin{aligned}\Delta \bar{R}_k^1 &= (1; 0; 0); \\ \Delta T_k^1 &= (-2; 1; 0); \\ \Delta T_{пр.1}^1 &= (0.3; 0; 0).\end{aligned}$$

По формуле (10) определим величину шага до момента наступления проскальзывания на одной из опор (на какой – пока не понятно):

$$\Delta P_1^1 = \min \left(\left| \frac{13.5-0}{-2-0.3} \right|; \left| \frac{4.5-0}{1-0} \right|; \left| \frac{1.5-0}{0-0} \right| \right) = 4.5$$

Мы определили величину шага нагрузки $\Delta P^1 = 4.5$, при котором наступит проскальзывание на 2-й опоре.

Перемещения и усилия ($s + 1$) основного шага и соответствующего уровня нагружения определяем по формулам (15)

$$\Delta u_k^{s+1} = \Delta P^{s+1} \Delta \bar{u}_k^{s+1}; u_k^{s+1} = u_k^s + \Delta u_k^{s+1};$$

$$\Delta T_k^{s+1} = \Delta P^{s+1} \Delta \bar{T}_k^{s+1}; T_k^{s+1} = T_k^s + \Delta T_k^{s+1}.$$

Пересчитываем значения усилий после 1-го шага т.е. для уровня нагружения

$$P^1 = P^0 + \Delta P^1 = 0 + 4.5 = 4.5.$$

$$\Delta R_1^1 = 4.5 \cdot 1 = 4.5;$$

$$\Delta R_2^1 = 4.5 \cdot 0 = 0;$$

$$\Delta R_3^1 = 4.5 \cdot 0 = 0;$$

$$R_1^1 = 45 + 4.5 = 49.5;$$

$$R_2^1 = 15 + 0 = 15;$$

$$R_3^1 = 5 + 0 = 5;$$

$$\Delta T_1^1 = 4.5 \cdot (-2) = -9;$$

$$\Delta T_2^1 = 4.5 \cdot 1 = 4.5;$$

$$\Delta T_3^1 = 4.5 \cdot 0 = 0;$$

$$T_1^1 = 0 - 9 = -9;$$

$$T_2^1 = 0 + 4.5 = 4.5;$$

$$T_3^1 = 0 + 0 = 0;$$

$$\Delta T_{\text{пр.1}}^1 = 4.5 \cdot 0.3 = 1.35;$$

$$\Delta T_{\text{пр.2}}^1 = 4.5 \cdot 0 = 0;$$

$$\Delta T_{\text{пр.3}}^1 = 4.5 \cdot 0 = 0;$$

$$T_{\text{пр.1}}^1 = 13.5 + 1.35 = 14.85;$$

$$T_{\text{пр.2}}^1 = 4.5 + 0 = 4.5;$$

$$T_{\text{пр.3}}^1 = 1.5 + 0 = 1.5.$$

Итак, после пересчета на 1-й, 2-й и 3-й опорах соответственно

$$R_k^1 = (49.5; 15; 5);$$

$$T_k^1 = (-9; 4.5; 0);$$

$$T_{\text{пр.k}}^1 = (14.85; 4.5; 1.5).$$

Так как на второй опоре выполняется условие $|T_2^1| = T_{\text{пр.2}}^1 = 4.5$, то на второй опоре устанавливается состояние скольжения.

Шаг 2. Выполняем пробный шаг $\Delta \bar{P}^2 = 1$ (на второй опоре), из упругого расчета определяем:

$$\Delta \bar{u}_k^2 = (0; -0.1236; 0);$$

$$\Delta \bar{R}_k^2 = (1; -0.208; 0.208);$$

$$\Delta T_k^2 = (-1.414; 0; 0.105);$$

$$\Delta T_{\text{пр.k}}^2 = (0.3; -0.0625; 0.0625).$$

По формуле (10) уточняем второй шаг нагружения:

$$\Delta P^2 = 4.24$$

Так как на второй опоре имеем уменьшение предельной силы ($\Delta T_{\text{пр.2}}^2 = -0.0625 < 0$), то при сохранении состояния скольжения на опоре необходимо скорректировать усилие T_2^2 согласно (13) на величину

$$\Delta T_{c2}^2 = \Delta T_{\text{пр.2}}^2 + \delta T_2^1 = 4.24(-0.0625) + 0 = -0.265.$$

Такую же по величине, но с противоположным знаком компенсирующую силу $F_{c2}^2 = 0.265$ прикладываем ко 2-му узлу системы.

Делаем перерасчет шага при $\Delta P^2 = 4.24$, в результате значения смещений и усилий для уровня $P^2 = \Delta P^1 + \Delta P^2 = 4.5 + 4.24 = 8.74$.

$$u_k^2 = (0; -0.524; 0);$$

$$R_k^2 = (53.73; 14.05; 5.94);$$

$$T_k^2 = (-14.85; 4.232; 1.88);$$

$$T_{\text{пр.}k}^2 = (16.12; 4.22; 1.78).$$

Так как условие предельного трения для второй опоры не выполняется (имеет место $|T_2^2| > T_{\text{пр.}2}^2$, т.е. $4.235 > 4.22$), еще раз с помощью формулы (10) уточняем величину шага (уже с учетом проведенной корректировки)

В итоге получим $\Delta P^2 = 3.98$ и пересчитаем величину коррекции силы трения.

$$\Delta T_{c2}^2 = \Delta T_{\text{пр.}2}^2 + \delta T_2^1 = 3.98(-0.0625) + 0 = -0.25$$

$$F_{c2}^2 = 0.25$$

Делаем повторный перерасчет шага при $\Delta P^2 = 3.98$, в результате значения смещений и усилий для уровня $P^2 = \Delta P^1 + \Delta P^2 = 4.5 + 3.98 = 8.48$.

$$u_k^2 = (0; -0.493; 0);$$

$$R_k^2 = (53.49; 14.16; 5.88);$$

$$T_k^2 = (-14.5; 4.25; 1.76);$$

$$T_{\text{пр.}2}^2 = (16.05; 4.25; 1.76).$$

Как видно, на 2-й опоре (в состоянии скольжения) обеспечивается условие предельного трения $|T_2^2| = T_{\text{пр.}2}^2 = 4.25$. В то же время наступает событие проскальзывания на 3-й опоре $|T_3^2| = T_{\text{пр.}3}^2 = 1.76$, следовательно, устанавливаем на этой опоре состояние скольжения.

Согласно изложенному алгоритму, выполняются и все последующие шаги нагружения.

Шаг 3. В результате шага $\Delta P^3 = 1.56$ устанавливается состояние скольжения на 1-й опоре. Для уровня нагружения $P^3 = P^2 + \Delta P^3 = 8.48 + 1.56 = 10.04$. Значения смещений и усилий для уровня нагружения $P^3 = 10.04$:

$$u_k^3 = (0; -0.72; -0.087);$$

$$R_k^3 = (55.04; 13.87; 6.13);$$

$$T_k^3 = (-16.51; 4.16; 1.84);$$

$$T_{\text{пр.}k}^3 = (16.51; 4.16; 1.84).$$

Шаг 4. $\Delta P^4 = 6.15$, для уровня нагружения $P^4 = P^3 + \Delta P^4 = 10.04 + 6.15 = 16.19$ значения смещений и усилий следующие:

$$u_k^4 = (2.084; -0.72; -0.086);$$

$$R_k^4 = (61.19; 13.86; 6.14);$$

$$T_k^4 = (-18.36; 4.16; 1.84);$$

$$T_{\text{пр.}k}^4 = (18.36; 4.16; 1.84).$$

Шаг 5. $\Delta P^5 = 3.81$, для уровня нагружения $P^5 = P^4 + \Delta P^5 = 16.19 + 3.81 = 20$ значения смещений и усилий следующие:

$$u_k = (3.38; -0.72; -0.086);$$

$$R_k = (65.0; 13.87; 6.13);$$

$$T_k = (-19.5; -2.77; 1.84);$$

$$T_{\text{пр.}k} = (19.5; 4.16; 1.84).$$

Окончательно на 1-й и 3-й опорах имеет место состояние скольжения

$$u_1 = 3.38 \neq 0; |T_1| = T_{\text{пр.}1} = 19.5;$$

$$u_3 = 0.086 \neq 0; |T_3| = T_{\text{пр.}3} = 1.84;$$

на второй опоре – состояние сцепления.

$$|T_2| < T_{\text{пр.}2}; |-2.77| < 4.16$$

На рис. 8 показана диаграмма пошагового изменения сил трения на опорах: 1 – на опоре 1; 2 – на опоре 2; 3 – на опоре 3.

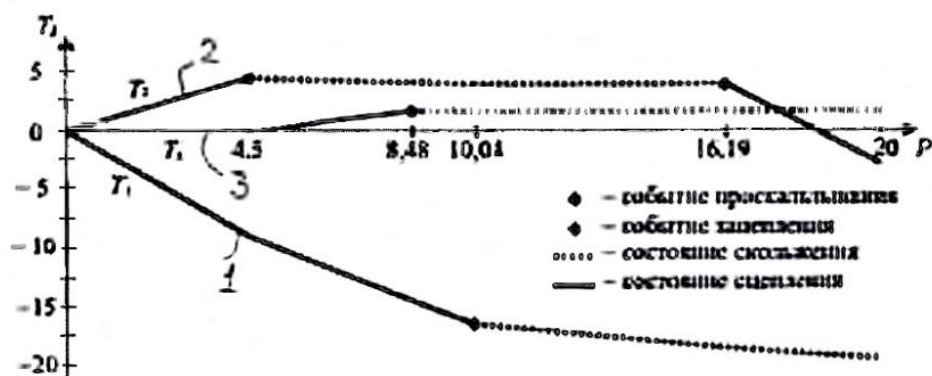


Рис.8. Диаграмма пошагового изменения сил трения на опорах

Достоверность полученных результатов подтверждается выполнением условий равновесия и совместности деформаций системы на каждом шаге нагружения. Так, конечная деформация стержня 1-2: $\Delta l_{1-2} = u_2 - u_1 = -0.72 - 3.38 = -4.1$ мм, продольная сила в этом же стержне $N_{1-2} = -P_1 - T_1 = -40 + 19.5 = -20.5$ кН.

Проверим эти результаты с помощью формулы

$$\Delta l_{1-2} = \frac{N_{1-2} \cdot l_{1-2}}{EA} = \frac{-20.5 \cdot 10}{50000} = -0.0041 \text{ м} = -4.1 \text{ мм}$$

Рассматриваемая задача также решалась с помощью метода итераций по предельным силам трения [1, 7]. Были получены аналогичные результаты, однако при этом потребовалось достаточно большое число итераций (несколько десятков). В целом же численные исследования пошаговых алгоритмов расчета систем с трением позволяют заключить следующее:

- учет трения в односторонних связях значительно усложняет задачу и делает ее решение зависящим от характера и истории загрузки, поэтому целесообразно моделировать процесс нагружения и, соответственно, строить решение на основе метода пошагового нагружения;

- при линейном характере деформирования системы с трением на опорах пошаговые алгоритмы дают вполне достоверные и физически приемлемые результаты, что подтверждается их анализом и сопоставлением с решениями, полученными с помощью других численных методов.

Тема 4. Генетическая нелинейность

Лекция 7. Методы расчета конструкций с учетом генетической нелинейности

Традиционная расчетная практика анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) несущих конструкций зданий и сооружений основана на использовании общей расчетной модели, соответствующей готовому объекту. При этом основные параметры модели (геометрия, жесткостные характеристики элементов, связи расчетной модели с внешней средой и т. п.) принимаются постоянными для рассчитываемого здания или сооружения и соответствующими состоянию готового объекта.

Однако процесс создания сооружения в реальности многоэтапный. На каждом из этапов возведения выполняются работы по установке (удалению) отдельных конструктивных элементов или их групп, регулированию фактических размеров элементов несущих конструкций, введению (удалению) временных связей, изменению параметров связей системы с внешней средой и т. п. Каждая из таких операций определяет некоторый этап монтажа, который характеризуется определенной расчетной схемой, отличной от расчетной схемы полностью готовой конструкции. Выполненный отдельный этап возведения здания приводит к замыканию в системе некоторого предварительного НДС, которое может существенно влиять на итоговое НДС системы несущих конструкций.

Традиционная технология расчета не соответствует реальной практике возведения здания. В реальных условиях свободные узлы конструкции (на каком бы уровне здания эта конструкция не находилась) устанавливаются строго в проектное положение, а геометрия элементов, соединяющих их с уже смонтированной частью здания, корректируется. Фактически при возведении здания происходит компенсация деформаций нижних ярусов конструкций и основания путем изменения проектной длины вертикальных несущих конструкций верхних ярусов.

Для железобетонных зданий, в которых нагрузки от собственного веса могут составлять до 60-65 % величины основного сочетания нагрузок и до 80-85 % суммы длительно действующих нагрузок, такое несоответствие расчетной модели реальному состоянию конструкций не может быть признано приемлемым.

В основу технологии расчета, учитывающей это обстоятельство, положен принцип поэтапного отслеживания изменения основных параметров расчетной модели (геометрия, жесткостные параметры элементов модели и связей, нагружение и деформирование) с замыканием системы на каждом заранее определенном этапе возведения здания. При этом четко различается суммарное НДС системы, возникающее на каждом этапе монтажа с учетом всех предшествующих этапов, и приращение НДС, вызванное дополнительными воздействиями на систему, относящимися исключительно к рассматриваемому этапу монтажа.

Все расчеты, связанные с монтажом системы, как правило, выполняются в предположении справедливости обычных допущений линейной строительной механики для каждой стадии монтажа. Однако в целом за счет изменения расчетной схемы при переходе от одной стадии к другой задача становится нелинейной. Такая нелинейность, обусловленная историей создания системы, названа генетической.

Деформированное состояние системы, полученное на этапе $r - 1$ с учетом характеристик системы, изменяющихся поэтапно, и нагрузок, приложенных к системе в рамках каждого этапа, является начальным состоянием для расчета этапа r . Таким образом, координаты узлов, общих для элементов, входящих в систему на этапах $r - 1$ и r применяются по результатам решения системы на этапе $r - 1$.

Изучением вопросов расчета несущих конструкций зданий с учетом их поэтапного воздействия занимались и продолжают заниматься: Гильман Г.Б., Борисенко В.С. [1], Городецкий А.С., Батрак [2], Карпенко Н.И., Травуш В.И. [5], Куроедов В.В. [6], Перельмутер А.В., Сливкер В.И. [3], Кабанцев О.В., Тамразян А.Г. [4], Белостоцкий А.М., Акимов П.А. [7], Сапожников А.И., Григоршев С.М.

[8], Мкртычев О.В., Андреев М.И. [9], Шеин А.И., Завьялова О.Б. [10], Барабаш М.С. [11] и др. исследователи.

Для многоэтажных гражданских зданий проблема учета стадийности возведения была создана в 70-х годах прошлого века. Одной из первых здесь была публикация Чакрабарти S. и Нейека G. [12], где на примере расчета двух многоэтажных конструкций с различной конфигурацией была продемонстрирована разница результатов многостадийного и одномоментного расчетов. Первые обобщающие результаты были опубликованы в монографии Сафарини Н. и Вилсона Е. [13].

Конструкции высотных зданий относятся к такому классу сооружений, для которых процесс возведения может существенно влиять на проектное решение. Так, в процессе установки и снятия опалубки происходит изменение расчетной схемы плит и балочных ростверков перекрытий, и это может привести к необходимости корректировки проектных решений, которые были приняты исходя из расчета уже возведенного здания на проектные нагрузки.

Метод наращивания многоэтажного здания предусматривает установку монтируемого элемента строго в проектное положение с компенсацией тем или иным способом деформации нижерасположенных конструкций. Под действием нагрузок от смонтированных элементов происходит деформирование нижерасположенных конструкций, что требует корректировки геометрических размеров вертикальных конструкций для обеспечения установки плит перекрытий в проектное положение. На рис. 1 в схематичном виде показано изменение расчетной модели каркаса здания в процессе пошагового возведения.

Плиты перекрытий высотных зданий имеют ряд особенностей, которые значительно отличают их от ранее применявшихся сборных плит перекрытий на прямоугольных планах. К основным особенностям можно отнести: сложную конфигурацию в плане; нерегулярно расположенные опоры различного сечения – диафрагма, пилоны, крестовые, уголковые, тавровые колонны; нерегулярно расположенные отверстия; нерегулярные включения балочных ростверков; переменная толщина плиты, вызванная необходимостью усиления опорных зон

плиты в районе колонн. Важным фактором являются возможные неравномерные осадки опор плиты, особенно для верхних этажей, обусловленные не так нагрузкой собственно на плиту рассматриваемого перекрытия, как неравномерными укорочениями вертикальных элементов в общей схеме здания.

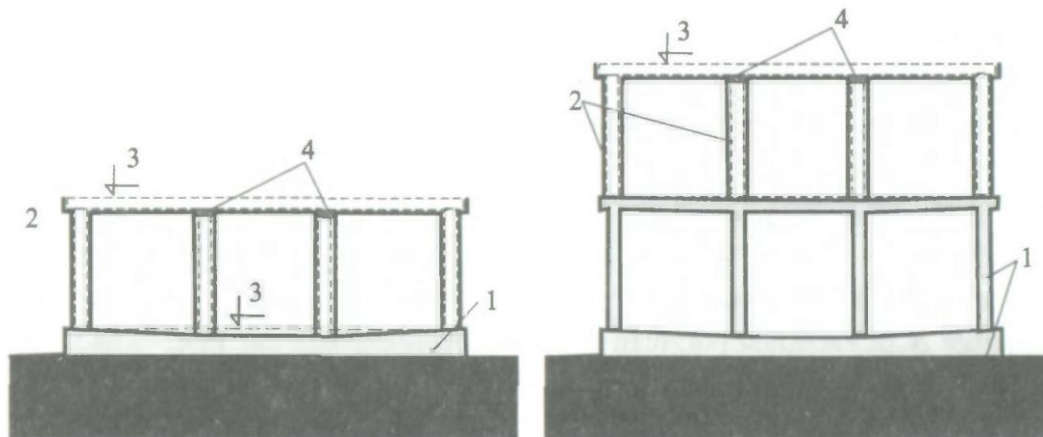


Рис. 1. Схема изменения расчетной модели в процессе возведения:

- 1 – выполненная часть сооружения на этапе n-1;*
- 2 – возводимая часть сооружения на этапе n;*
- 3 – проектный уровень (отметка) установки конструкции на этапе n;*
- 4 – приращение длины конструктивного элемента, вызванное деформациями ранее выполненных нижних ярусов конструкции.*

На рис. 2а (взятом из книги Городецкого А.С. [2]) показаны изополя прогибов плиты верхнего этажа, полученные на основании расчета плиты в составе общей схемы здания, а на рис. 2б – расчет той же плиты из условия, что опоры плиты не имеют вертикальных перемещений.

Необходимо отметить, что технология поэтапного наращивания здания приводит не только к приращению длины элементов конструкции в вертикальном направлении, но и к горизонтальному смещению ярусов конструкции, т.е. отклонению оси здания от вертикали. Причиной перекосов могут быть нерегулярность жесткостей здания в плане (нерегулярное расположение проемов, локально расположенные жесткие узлы лестнично-лифтовых блоков и т.п.), а также неравномерные осадки грунтового основания. Компенсировать горизонтальное смещение ярусов, расположенных ниже уровня монтажа

соответствующего этапа, практически невозможно, но учитывать их в расчете сооружения необходимо.

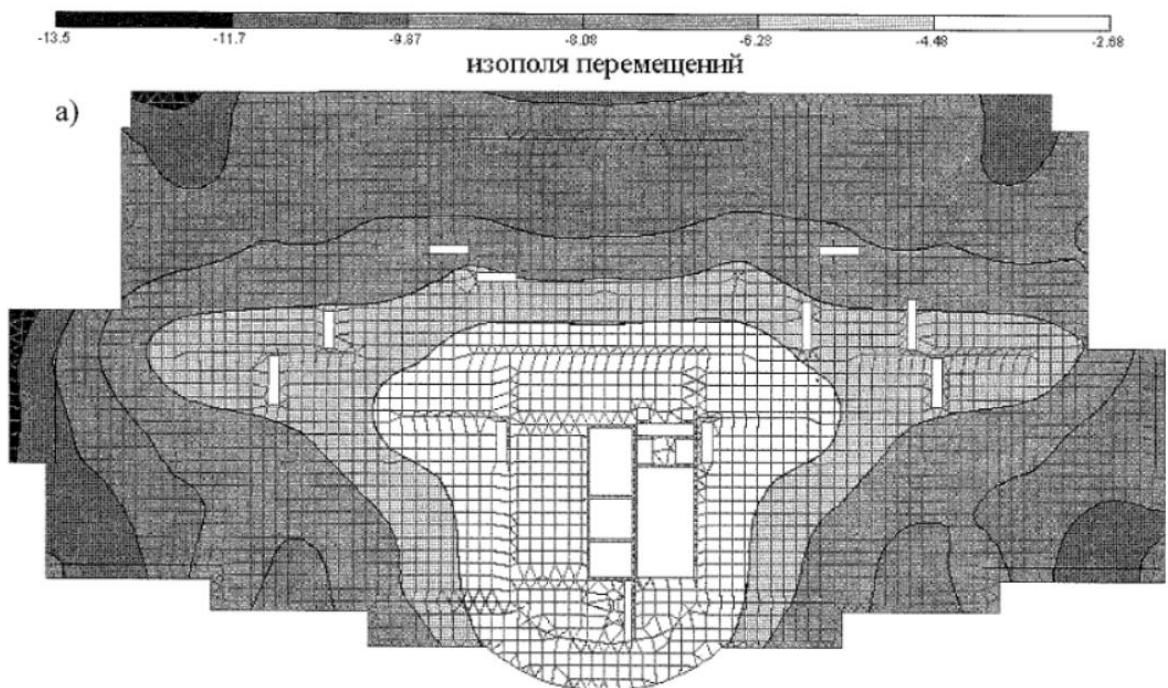


Рис. 2а. Изополя прогибов плиты верхнего этажа, полученные на основании расчета плиты в составе общей схемы здания

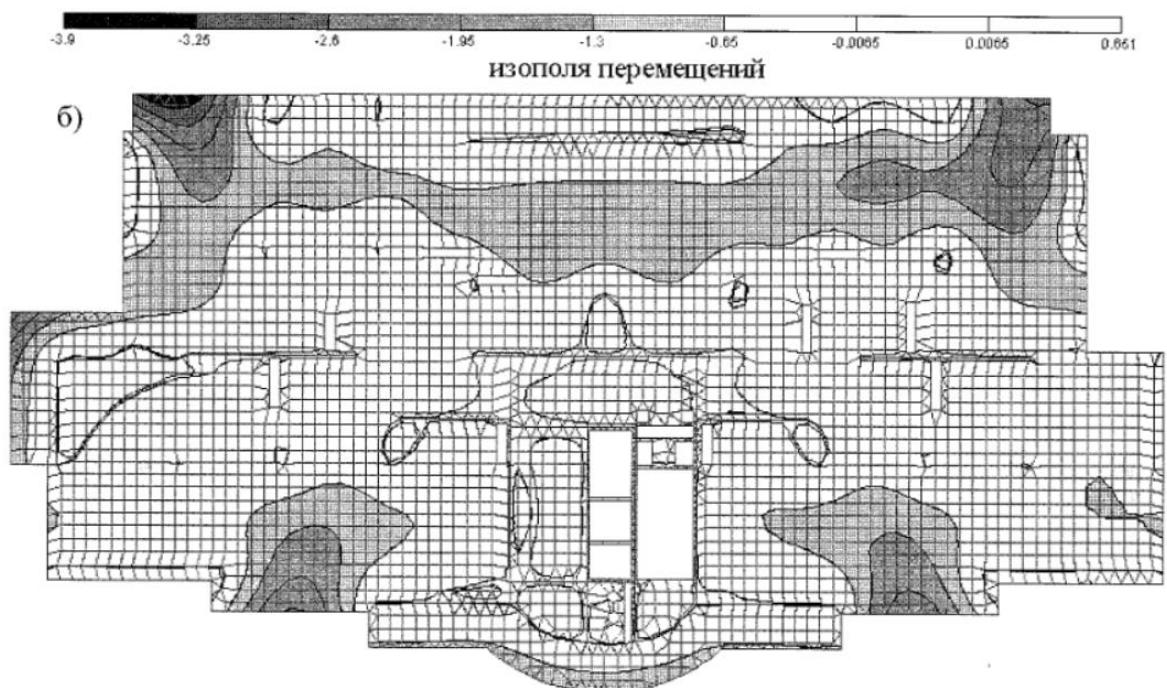


Рис. 2б. Изополя прогибов плиты верхнего этажа с условием, что опоры плиты не имеют вертикальных перемещений

Расчеты деформаций несущих конструкций по традиционной расчетной технологии (одномоментной) сопровождаются накоплением ошибок за счет принятия неизменными геометрических параметров модели. При этом величина накопленной ошибки может существенно превысить приемлемые пределы и привести к недопустимому искажению действительного деформированного состояния здания. Наибольшее значение учет изменения геометрии элементов системы несущих конструкций имеет для расчетного обоснования многоэтажных и высотных зданий с нерегулярным распределением жесткостей в плане и по вертикали.

В работе О.В. Кабанцева [14] (см. рис. 3 и рис. 4) приводятся расчетные деформации и схемы деформирования несущих конструкций высотного дома жилого комплекса «Аквамарин» (г. Владивосток) от действия нагрузки собственного веса, определенные по разным расчетным технологиям (одномоментный расчет и поэтапное изменение расчетной модели).

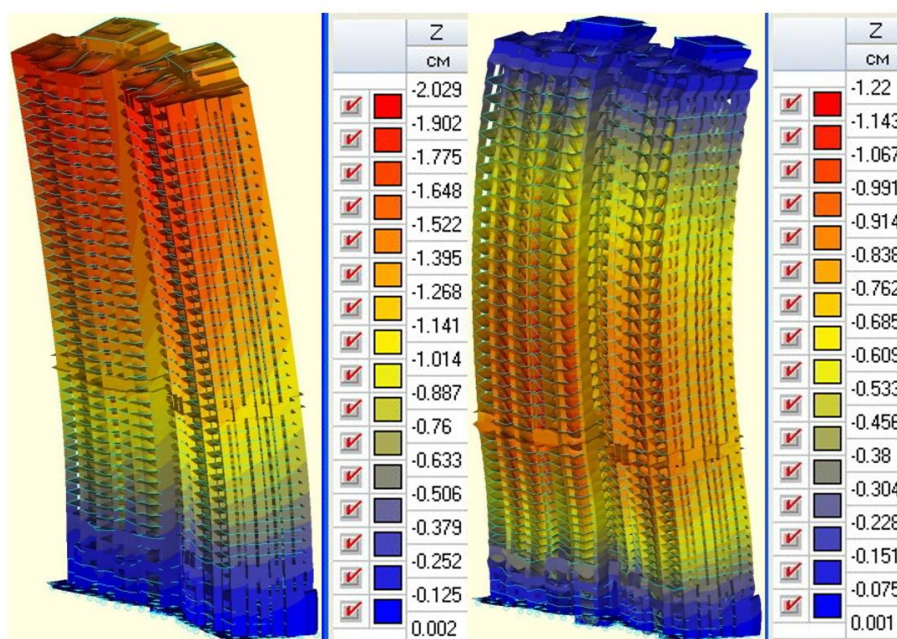


Рис. 3. Высотный жилой комплекс «Аквамарин». Результаты расчета вертикальных перемещений от нагрузок собственного веса по (Z) в традиционной расчетной технологии (слева) и в расчетной технологии, учитывающей поэтапное изменение расчетной модели (справа)

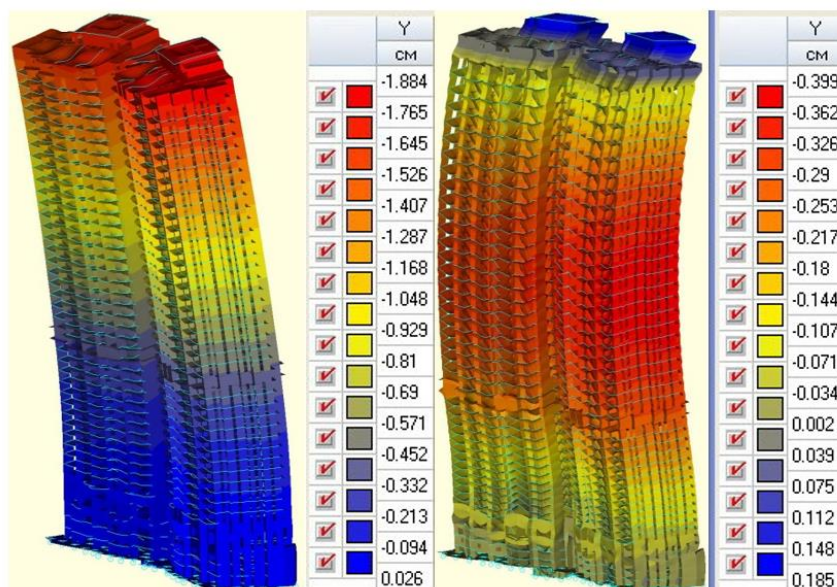


Рис. 4. Высотный жилой комплекс «Аквамарин». Результаты расчета перемещений от нагрузок собственного веса в поперечном направлении по (Y) в традиционной расчетной технологии (слева) и в расчетной технологии, учитывающей поэтапное изменение расчетной модели (справа)

Анализ результатов расчета перемещений от нагрузки собственного веса показывает, что в расчетной технологии, учитывающей поэтапное изменение расчетной модели, вертикальные деформации составляют 60%, а горизонтальные перемещения в поперечном направлении – 21% от соответствующих результатов расчета по традиционной технологии.

Моделирование процесса возведения конструкции

Рассмотрим последовательность возведения конструкции на конкретном примере. На рис. 5 схематически смоделирован процесс возведения однопролетной трехэтажной рамы.

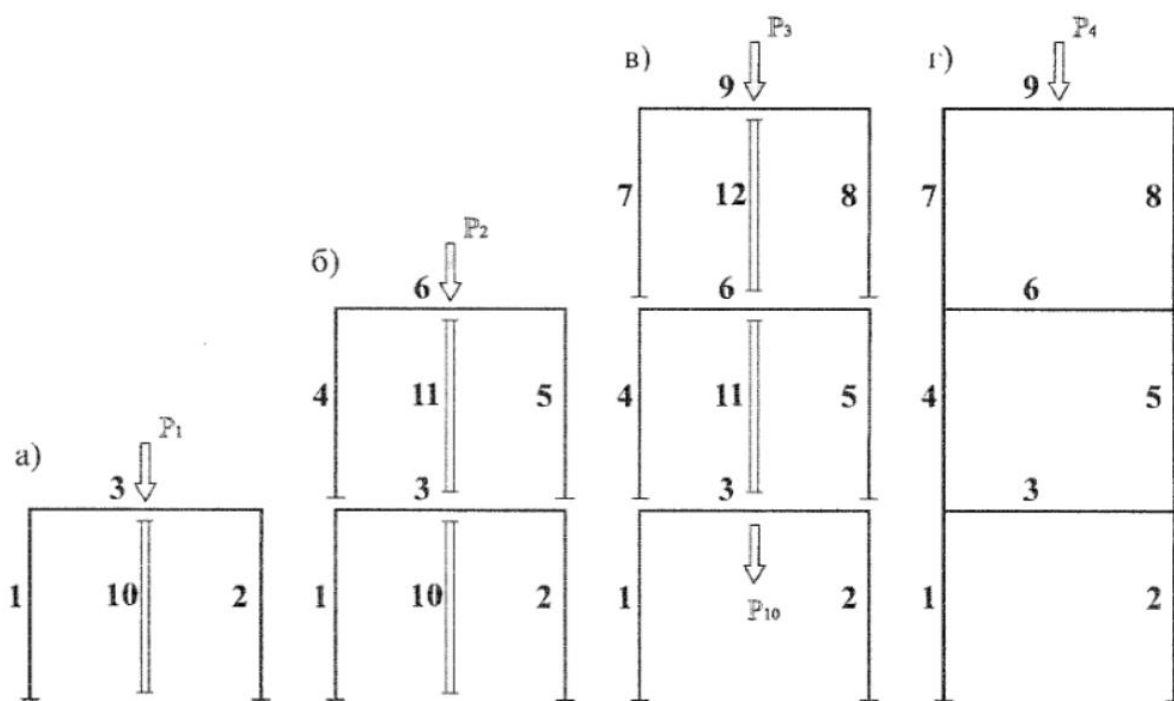


Рис. 5. Последовательность возведения рамы

Первая стадия монтажа – рис. 5а.

Смонтированы элементы первого этажа 1, 2, 3 и стойка опалубки – 10. Обобщенная нагрузка P_1 – собственный вес смонтированных конструкций + монтажная нагрузка, соответствующая этому этапу возведения. В результате расчета кроме всех параметров НДС определяется арматура в сечении элементов 1, 2, 3 с учетом пониженной прочности бетона, например $K_1 = 0.3$.

Вторая стадия монтажа – рис. 5б.

Кроме элементов первого этажа дополнительно возведены элементы второго этажа 4, 5, 6 и установлена дополнительная временная стойка 11. Нагрузка P_2 – собственный вес вновь возведенных конструкций + монтажная нагрузка на этом этаже. Усилия в элементах, соответствующие нагрузке P_2 , суммируются с зафиксированными усилиями в элементах, присутствовавших на этапе 1 от нагрузки P_1 . По найденным усилиям определяется арматура во всех элементах 1, 2, 3, 4, 5, 6 с учетом неполной прочности бетона, которая может быть разной для разных элементов. Например, для возведенных на втором этаже (элементы 4, 5, 6) $K_2 = 0.3$, а для возведенных на этом первом этаже (элементы 1, 2, 3), например $K_1 = 0.6$.

Третья стадия монтажа – рис. 5в.

Кроме элементов первых двух этажей 1, 2, 3, 4, 5, 6 возведены элементы третьего этажа 7, 8, 9, установлена дополнительная временная стойка 12, временная стойка 11 оставлена, а временная стойка 10 удалена. Нагрузка P_3 – собственный вес вновь возведенных конструкций + монтажная нагрузка на этом этапе. Удаление временной стойки моделируется приложением силы P_{10} равной усилию в убранной стойке.

Накопление усилий в элементах на этом этапе аналогично второму этапу, т.е. для ранее возведенных элементов 1-6, происходит суммирование зафиксированных усилий на предыдущем втором этапе со вновь полученными усилиями на третьем этапе.

По найденным усилиям определяется арматура во всех элементах 1-9 с учетом пониженной прочности бетона на этом этапе, например, $K_3 = 0.3, K_2 = 0.6, K_1 = 0.8$.

Эксплуатационная стадия – рис. 5г.

На этой стадии расчетная схема соответствует проектной. Процедура удаления всех временных стоек выполняется аналогично удалению стойки 10 на третьем этапе. Обобщенная нагрузка P_4 включает все полезные нагрузки и дополнительные постоянные нагрузки, за исключением нагрузок от собственного веса, включенных в нагрузки P_1, P_2, P_3 , усилия от которых зафиксированы на предыдущих этапах расчета.

Прочность бетона на этой стадии может приниматься в соответствии с классом бетона или быть несколько заниженной, т.к. замораживание бетонной смеси в процессе монтажа может снизить окончательную прочность бетона.

Компьютерное моделирование процесса возведения конструкции

При разработке программ для расчета строительных конструкций была учтена необходимость анализа работы конструкции на этапах ее возведения. Одной из первых разработок такого рода (1971 г.) была программа ГАММА-1 для ЭВМ Минск-22, созданная в КиевЗНИИЭП Г.Б. Гильманом и В.С. Борисенко [1] и ориентированная в основном на расчет вантовых конструкций, где на каждом

шаге использовалась расчетная схема с добавленными (по сравнению с предыдущим шагом) элементами. Опыт этой разработки позже был использован в системе ЛИРА. Появились некоторые возможности поэтапного исследования конструкции в процессе возведения, но на первых этапах, по сути, исследовались различные монтажные ситуации без учета случая, когда некоторое напряженно-деформированное состояние создается в одной ситуации, а наследуется другими.

Начальные исследования в этой области относились к такой постановке задачи, когда на каждом этапе монтажа известны действующие на конструкцию нагрузки. Более общая постановка задачи была связана с возможностью управления напряженно-деформированным состоянием собранной конструкции за счет нахождения значений управляющих воздействий, в роли которых предполагалось использовать заранее не известные балластные грузы и параметры предварительного напряжения (удлинения/укорочения стержней, смещения опор и т.п.). Эти, так называемые, управляющие параметры подлежали определению исходя из достижения некоторого желательного напряженно-деформированного состояния конструкции. В дальнейшем в работах А.В. Перельмутера [15,16,3] был выполнен детальный анализ и указаны основные особенности тех элементарных операций, совокупность которых позволяет выполнить расчет произвольной конструкции с учетом стадийности ее возведения.

В настоящее время режим МОНТАЖ в той или иной модификации присутствует практически во всех распространенных программных комплексах, ориентированных на строительное проектирование. Здесь можно упомянуть такие коммерческие комплексы как СКAD, ЛИРА, ANSYS, MIRAS/CIVIL, SOFISTIC и ряд других.

Процесс фактического создания сложной системы в общем случае является многоэтапным и тесно увязан с последовательностью операций по сборке системы. При этом в том или ином порядке могут выполняться работы по установке и удалению некоторых элементов системы, установке или удалению балластных грузов, регулированию длин тех или иных элементов, изменению

состояния некоторых связей и т.п.. На некоторых шагах этого процесса возможно проведение контрольных измерений внутренних сил в элементах и/или перемещений в некоторых точках. Каждая из этих операций определяет некоторую стадию монтажа. Совокупность тех стадий, которые относятся к одной и той же расчетной схеме, определяет этап монтажа. Один монтажный этап может включать в себя одну или несколько стадий монтажа.

Элементарные операции в специализированном процессоре МОНТАЖ

Большинство из действий, выполняемых в процессе монтажа, приводит к изменению расчетной схемы и/или напряженно-деформированного состояния системы.

Воздействия на систему, определяющие характер ее напряженно-деформированного состояния, разбиваются на два класса:

- базовые (накапливаемые) воздействия, для которых напряженно-деформированное состояние передается на последующие стадии монтажа;
- независимые нагружения, действующие только на текущей стадии монтажа и не имеющие отношения к другим стадиям.

Типичными примерами базового воздействия является собственный вес или предварительное напряжение, а примером независимого воздействия может служить ветровая нагрузка на здание, находящееся в процессе сборки.

В вычислительном комплексе СКАД действует соглашение, что все базовые воздействия должны быть отнесены к одному заранее predetermined (например, первому) нагружению. Состав этого нагружения может меняться на различных стадиях монтажа за счет включения или исключения определенных групп нагрузок.

В МОНТАЖЕ предусмотрены следующие элементарные операции:

- А) Нагружение системы известным воздействием;
- В) Установка внешней связи в узле системы;
- С) Установка внутренней связи между узлами системы;
- Д) Снятие внешней связи;
- Е) Снятие внутренней связи;

- Ф) Монтаж элемента любого типа;
- Г) Демонтаж элемента;
- Н) Изменение модуля упругости элемента (с помощью которого можно имитировать процесс твердения бетона, износ конструкции [17] и другие явления, ведущие к изменению жесткости элемента);
- И) Назначение или изменение коэффициентов постели для текущей и всех последующих стадий монтажа.

Мы перечислили операции, которые «встроены» в специализированный модуль МОНТАЖ, программного комплекса SCAD (также ЛИРА). Для подготовки исходных данных используется инструментарий ПК СКAD (также ПК ЛИРА). В целях экономии времени мы ограничимся перечислением операций без их описания, с подробным описанием операций можно ознакомиться в руководстве пользователя ПК SCAD и ПК ЛИРА.

Методы расчета

Если рассматривать многостадийный процесс монтажа, то для каждой стадии в отдельности можно использовать любой из классических методов строительной механики, но с учетом специфики многоэтапного расчета, полезно представить эти методы в форме, где отражается переменность системы.

Для разрешающих уравнений метода перемещений имеем:

$$K^{(r)}\Delta u^{(r)} = \Delta q^{(r)}, \quad (1)$$

где $K^{(r)}$ – матрица жесткости системы на r -том этапе, $\Delta u^{(r)}$ и $\Delta q^{(r)}$ – векторы дополнительных перемещений и дополнительных приведенных узловых нагрузок, относящихся к r -ому этапу соответственно.

Зная $\Delta u^{(r)}$, можно определить приращения усилий $\Delta s^{(r)}$ и получить накопленные по всем r этапам значения перемещений $u^{(r)}$ и усилий $s^{(r)}$

$$u^{(r)} = u^{(r-1)} + \Delta u^{(r)}; \quad (2)$$

$$s^{(r)} = s^{(r-1)} + \Delta s^{(r)}. \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) являются законами наследования монтажных состояний конструкции. Одновременное выполнение линейных соотношений (1) и законов наследования (2) и (3) и порождает генетическую нелинейность задачи.

При переходе к следующему $(r + 1)$ -му этапу расчета меняется матрица жесткости $K^{(r)}$, которая получает приращение $\Delta K^{(r)}$, положительное при добавлении элементов и отрицательное при их выбытии, т.е.

$$K^{(r+1)} = K^{(r)} + \Delta K^{(r)} \quad (4)$$

или подробно

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(r)} & K_{12}^{(r)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r)} & K_{22}^{(r+1)} & K_{23}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(r+1)} & K_{33}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(r)} & K_{12}^{(r)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r)} & K_{22}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{22}^{(r)} & \Delta K_{21}^{(r)} & 0 \\ 0 & \Delta K_{32}^{(r)} & \Delta K_{33}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Система разрешающих уравнений $(r + 1)$ -го этапа имеет вид

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(r)} & K_{12}^{(r)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(r)} & K_{22}^{(r+1)} & K_{23}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(r+1)} & K_{33}^{(r+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1^{(r+1)} \\ \Delta u_2^{(r+1)} \\ \Delta u_3^{(r+1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u_2^{(r+1)} \\ \Delta u_2^{(r+1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

В некоторых случаях изменения расчетной схемы связаны с корректировкой параметров тех или иных ранее смонтированных элементов (изменение модуля упругости, коэффициента постели упругого основания и т.п.). В этом случае можно полагать, что происходит замена ранее введенной, например, на s -м этапе матрицы жесткости $\Delta K^{(s)}$ на новую матрицу $\Delta K^{(r)}$:

$$K^{(r+1)} = K^{(r)} - \Delta K^{(s)} + \Delta K^{(r)} \quad (7)$$

Понятно, что для воздействий, относящихся к различным стадиям одного и того же этапа монтажа, действуют обычные линейные законы механики, а расчетная схема конструкции меняется только при переходе к следующему монтажному этапу. В этой связи под приращениями Δu_r и Δs_r следует понимать изменение перемещений и усилий, произошедшее от момента завершения последней стадии предшествующего этапа монтажа.

Заметим, что в некоторых случаях часть нагрузок действует только в рамках r -ого этапа монтажа, и при переходе к последующим этапам снимается. Такая ситуация типична, например, для навесного монтажа конструкции, когда вес кранового оборудования учитывается при формировании вектора Δq , с расположением кранов, соответствующих именно этому этапу. При переходе к

следующему $(r + 1)$ -ому этапу монтажа вектор узловых нагрузок формируется с учетом нового положения кранового оборудования, но при этом нужно помнить о необходимости приложения на $(r + 1)$ -ом этапе и отрицательных крановых нагрузок, аннулирующих их воздействия на систему, относящиеся к предыдущему этапу. Если этого не сделать, то законы наследования (2) и (3) не будут работать.

Итак, на каждом из этапов возведения выполняются работы по установке (удалению) отдельных конструктивных элементов или их групп, регулированию фактических размеров элементов несущих конструкций, введению (удалению) временных связей, изменению параметров связей системы с внешней средой и т.п. В основу технологии расчета, учитывающей указанные выше обстоятельства, положен принцип поэтапного отслеживания изменения основных параметров расчетной модели (геометрии, жесткостных параметров элементов модели и связей, нагружения и деформирования) с замыканием системы на каждом (заранее определенном) этапе возведения здания. При этом четко различается суммарное НДС системы, возникающее на каждом этапе монтажа с учетом всех предшествующих этапов, и приращение НДС, вызванное дополнительными воздействиями на систему, относящимися исключительно к рассматриваемому этапу монтажа.

При этом все расчеты выполняются в предположении справедливости обычных допущений линейной строительной механики для каждой стадии монтажа. Однако, в целом задача становится нелинейной за счет изменения расчетной схемы при переходе от одного этапа монтажа к другому.

Специализированный процессор МОНТАЖ является незаменимым инструментом для моделирования процесса возведения монолитных железобетонных конструкций высотных зданий. В процессе компьютерного моделирования может учитываться пониженная прочность бетона на различных этапах возведения, вызванная постепенным набором прочности или замораживанием уложенной бетонной смеси. На каждом этапе возведения производится расчет конструктивной схемы здания, соответствующей

возведенным на данный момент конструкциям, с учетом пониженной прочности бетона и наличия системы временных стоек опалубки. На каждом этапе такого расчета производится определение арматуры во всех сечениях железобетонных элементов (колонн, плит перекрытий, диафрагм жесткости), и если проектной арматуры или проектного железобетонного сечения оказывается недостаточно – выдается информация о необходимости корректировки проектных решений.

Модуль МОНТАЖ имеет широкие возможности по обработке исходной информации, в частности,

- моделируемое здание может иметь неограниченное количество этажей (50-60) и более;
- блоки здания могут быть разновысокими;
- в плане здание может иметь произвольную форму – произвольный набор прямоугольных и криволинейных в плане блоков;
- плиты перекрытий также могут иметь произвольный контур (лоджии, эркеры, балконы, произвольно расположенные отверстия любой формы);
- плиты перекрытий могут иметь включения различной толщины, могут быть подперты балочным ростверком или иметь безбалочную схему;
- допускается задание нагрузок различных типов: равномерно распределенная по всему перекрытию или по области, ограниченной произвольным многоугольником, сосредоточенная нагрузка или линейный штамп (нагрузка от перегородок);
- расположение временных опор (стоек опалубки) может быть произвольным, последовательность их установки и снятия также произвольная.

Вначале задается конструктивная схема всего объекта, т.е. описываются все элементы, включая как основные несущие элементы объекта (колонны, балки, плиты, диафрагмы), так и временные элементы (элементы опалубки, стойки подмостей и др.). Затем для каждого этапа возведения описываются все конструктивные элементы, которые возведены на момент данного этапа, временные стойки подмостей, которые присутствуют на данном этапе, а также

стойки подмостей, которые демонтируются на данном этапе. Для каждого этапа задаются нагрузки (собственный вес, монтажные нагрузки), которые действуют на данном этапе, а при необходимости понижающий коэффициент прочности бетона.

Исходные данные для последнего этапа соответствуют эксплуатационной стадии объекта, т.е. стадия, когда объект полностью возведен, убраны временные опоры (стойки подмостей), набрана эксплуатационная прочность бетона, действуют эксплуатационные нагрузки (собственный вес, ветер, снег, полезные нагрузки).

Основной задачей специализированного процессора МОНТАЖ является отслеживание необходимой арматуры на каждой стадии возведения объекта. На основе выдаваемой информации легко проследить, достаточно ли арматуры, заложенной в проекте, или на какой-либо стадии монтажа этой арматуры недостаточно и количество арматуры, заложенной в проекте, должно быть увеличено.

Схематическая организация компьютерного моделирования процесса возведения однопролетной шестизэтажной рамы представлена на рис. 6.

- Рама включает 30 элементов, из которых элементы 7-12 – временные опоры.
- Сечение ригелей 40×80.
- Сечение колонн 40×60.
- Смоделировано шесть стадий монтажа и эксплуатационная стадия.

Таким образом, на основе предложенного компьютерного моделирования можно исследовать различные варианты установки и снятия элементов опалубки, достаточность проектной арматуры для восприятия монтажных нагрузок на различных стадиях монтажа, деформированность конструкции в период переопирания временных стоек.

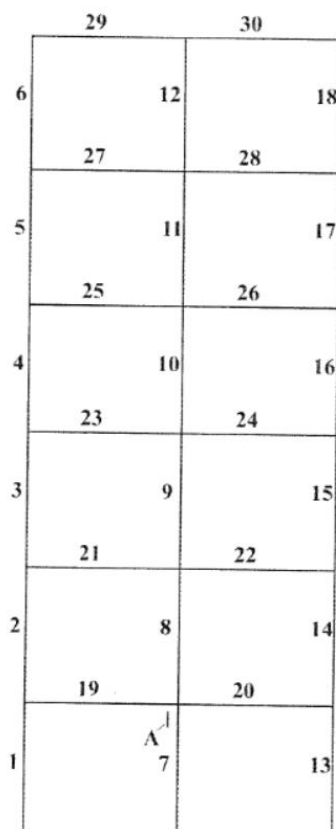


Рис. 6. Однопролетная шестиэтажной рамы

I стадия: смонтированы колонны 1, 2, 13, 14, ригели 19, 20, 21, 22 и временные стойки 7 и 8.

Прочность бетона составляет 30% от проектной.

II стадия: смонтированы дополнительно колонны 3, 4, 15, 16, ригели 23, 24, 25, 26 и временные стойки 9 и 10.

Прочность бетона составляет 30% от проектной для элементов, возведенных на второй стадии, и 60% – для элементов, возведенных на первой стадии.

III стадия: убрана временная стойка 7, при этом прочность бетона составила 40% от проектной для элементов, смонтированных на второй стадии, и 90% – для элементов, смонтированных на первой стадии.

IV стадия: смонтированы остальные элементы, при этом прочность бетона составила 30% от проектной для элементов, смонтированных на этой стадии, 60% – для элементов, смонтированных на второй стадии, и 100% – для элементов, смонтированных на первой стадии.

V стадия: убраны временные стойки 8 – 12.

Прочность бетона составляет 100% для элементов, смонтированных на первой и второй стадиях, и 80% – для элементов, смонтированных на четвертой стадии.

VI стадия: эксплуатационная. Прочность бетона достигла проектной для всех элементов.

На монтажных стадиях прикладывалась монтажная нагрузка и собственный вес, на эксплуатационной стадии – полезная нагрузка.

Показательным является изменение усилий в процессе монтажа в середине ригеля первого этажа (сечение А) – см. таблицу 1 усилий и рис. 6.

Таблица 1. Усилия и армирование по стадиям монтажа

№ стадии	M	Q	Величина арматуры, см ²		
			нижняя AS ₁	верхняя AS ₂	поперечная
1	-9.1	19.6	1.57	3.01	3.76
2	16.0	5.6	5.91	1.57	0.32
3	26.9	4.6	10.69	1.57	0.08
4	17.9	4.6	6.39	1.57	0.08
5	17.6	4.6	6.94	1.57	0.08
6	16.6	4.6	6.13	1.57	0.08
экспл.	18.3	0.0	9.98	1.57	0.08

Анализируя табл.1 видно, что для поперечной и верхней арматуры определяющей является стадия 1 (верхняя арматура 3.01 см² против 1.57 см² эксплуатационной, поперечная арматура 3.76 см² против 0.08 эксплуатационной). Для нижней арматуры определяющей является стадия 3 (10.69 см² против 9.98 см² эксплуатационной).

Таким образом, компьютерное моделирование процесса возведения помимо ответа на вопрос о достаточности проектной арматуры для обеспечения прочности на различных стадиях монтажа, может дать необходимую информацию для определения стратегии организации возведения здания.

Приведем еще пример эффективного использования модуля МОНТАЖ. Пример взят из книги А.С. Городецкого [2].

Как запроектировать конструктивную схему такой, чтобы при внезапном удалении наиболее ответственных элементов не допускалось прогрессирующее разрушение. Возможно также допущение, что конструкция частично может потерять эксплуатационные качества (может получить недопустимые для эксплуатации прогибы, трещины и т.п.).

Действительно, удаление одного или нескольких элементов изменяет конструктивную схему и именно эту задачу решает специализированный процессор МОНТАЖ, на основе которого можно в автоматизированном режиме исследовать большое количество возможных вариантов и принять ряд конструктивных мер с тем, чтобы, рационально используя минимальные дополнительные материалозатраты, «помочь» конструкции приспособиться к неожиданно возникшей ситуации и не допустить прогрессирующего разрушения.

На рис. 7 приведен несложный план здания высотой 25 этажей. При нагрузке $1,2 \text{ т/м}^2$ усилие в одной из наиболее нагруженных колонн - средней колонне первого этажа достигает 1110 т. при внезапном удалении этой колонны конструктивная схема здания меняется: средние вышележащие колонны уже не являются опорами и «зависают» на всех оставшихся перекрытиях, перекрытия в средней части уже работают пролетом $12 \times 12 \text{ м}$ и если не применить определенных конструктивных мер может произойти обрушение всей конструкции.

При рассмотрении новой схемы можно отметить, что все перекрытия над удаленной колонной получают большие прогибы и могут, изменив схему работы за счет мембранных усилий, приспособиться к новой ситуации.

Изополя главных мембранных напряжений для нижнего перекрытия находящиеся в наиболее неблагоприятной ситуации представлены на рис. 8. На этом рисунке видно, что средняя часть перекрытия размером $12 \times 12 \text{ м}$ работает как мембрана (большие главные растягивающие напряжения), а в окаймляющей зоне этой мембраны выделилась сжатая зона (своеобразный сжатый бортовой элемент). На этом же рисунке обозначено направление возникновения трещин.

Для обеспечения такой приспособляемости в проектных решениях необходимо предусмотреть непрерывность верхней и нижней арматуры по всей области плиты (часто нижняя арматура в районе колонн обрывается или не стыкуется). В данном конкретном примере фоновая верхняя и нижняя арматура $\varnothing 16$ с шагом 100×100 мм обеспечивает восприятие мембранных усилий. Увеличение усилий в близлежащих колоннах находится в рамках допустимых перегрузок при особых воздействиях. Несомненно, большой прогиб центра перекрытий – 0,3 м и недопустимые величины трещин нарушают эксплуатационные качества сооружения, но прогрессирующего разрушения не произошло. Конечно, для исследования подобного ряда ситуаций необходимо, чтобы программные комплексы, реализующие расчет по изменяющимся расчетным схемам, допускали возможность учета физической и геометрической нелинейности* (основные факторы, обуславливающие приспособляемость конструкции).

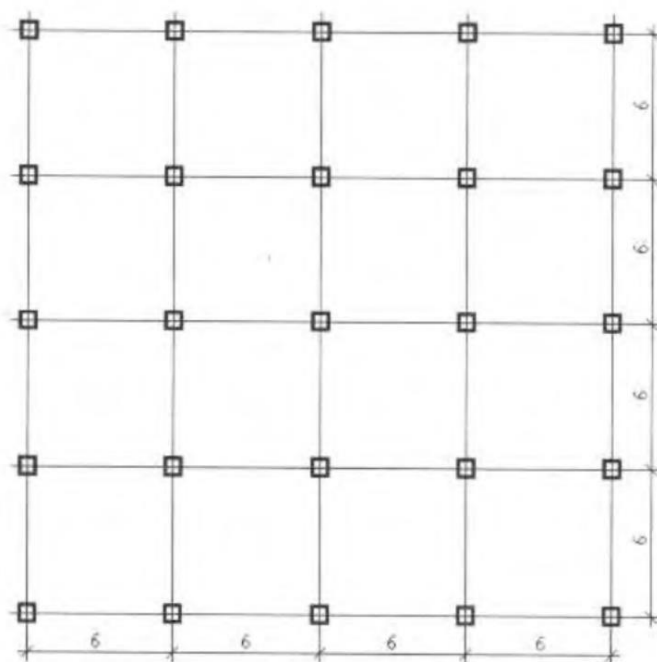


Рис. 7а. План колонн здания

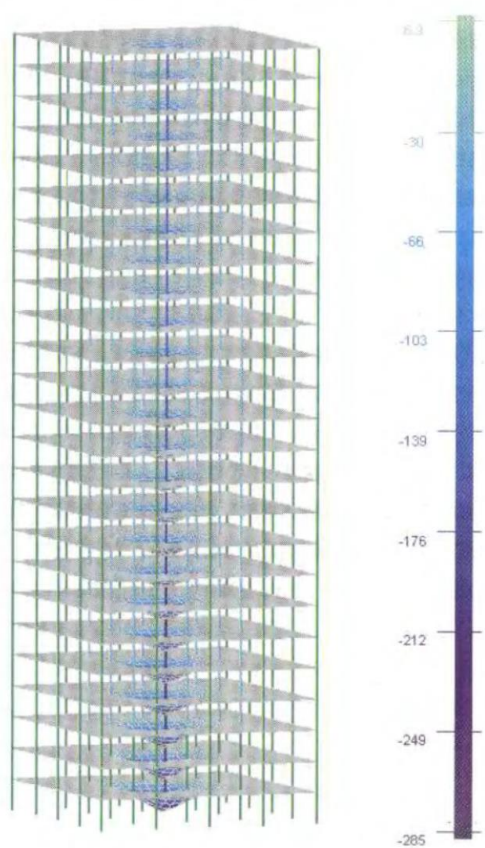


Рис. 76. Схема 25-ти этажного здания

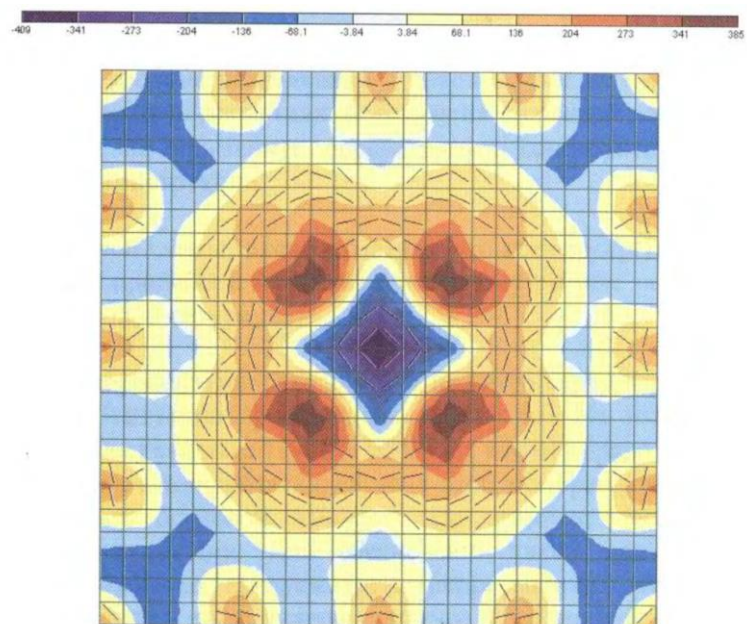


Рис. 8. Изополя главных мембранных напряжений для нижнего перекрытия находящиеся в наиболее неблагоприятной ситуации

Этот пример показывает, как за счет применения определенных конструктивных мер, не влекущих практически дополнительные материалозатраты, можно в ряде случаев воспрепятствовать прогрессирующему разрушению. Конечно, этот, как и всякий демонстрационный пример содержит много допущений и упрощений (например, не учитывается динамика внезапного удаления элемента) однако в полной мере показывает возможность устранения причин прогрессирующего разрушения без особых дополнительных материалозатрат.

Многоэтажные здания с нерегулярной структурой каркаса

Для железобетонных зданий, в которых нагрузки от собственного веса могут составлять до $60 \div 65\%$ величины основного сочетания нагрузок и до $80 \div 85\%$ суммы длительно действующих нагрузок, несоответствие традиционной «одномоментной» расчетной модели реальному состоянию конструкций сказывается весьма заметно. Особенно остро этот факт отражается на результатах расчета зданий с нерегулярной структурой каркаса, у которых перераспределение нагрузки между его отдельными частями может качественно меняться в зависимости от соотношения жесткостей конструкций отдельных участков (зон) сооружения.

Нерегулярность структуры несущих конструкций наиболее ярко представлена в зданиях повышенной этажности, что определяется не только объемно-планировочными решениями здания, но и требованиями по созданию зон с высокой огнестойкостью для размещения противопожарных укрытий.

Очевидно, что существенная нерегулярность жесткостей многоэтажных и высотных зданий должна влиять на деформирование и распределение напряжений в несущей системе здания.

В основу расчета таких зданий должен быть положен принцип поэтапного отслеживания изменения основных параметров расчетной модели (геометрии,

жесткостных параметров элементов модели и связей, нагружения и деформирования) с замыканием системы на каждом (заранее определенном) этапе возведения здания. При этом могут быть получены результаты существенно отличные от тех, которые дает «одномоментно» созданная расчетная модель.

Для исследования влияния нерегулярной структуры жесткостей как по высоте сооружения, так и в пределах плана этажа разработана [18] специальная тестовая модель, в которой предусмотрены стеновые конструкции (лестнично-лифтовой блок) и колонны в пределах плана этажа, что приводит к существенной неоднородности жесткостей. В уровне верха модели предусмотрены стены (в поперечном направлении) и высокие балки (по наружным осям в продольном направлении). Перекрытия модели загружены равномерно распределенной нагрузкой 15 кПа (1,5 т/м²).

Выяснилось, что традиционная расчетная технология приводит к нелепому результату, согласно которому появляются «подвешенные» к более жестким конструкциям верхних ярусов каркаса растянутые элементы колонн (ряд цифр серии «а» на рис. 9б. Ожидаемые результаты, которые можно получить с использованием грузовых площадей, показаны в виде серии «б» на этом же рисунке.

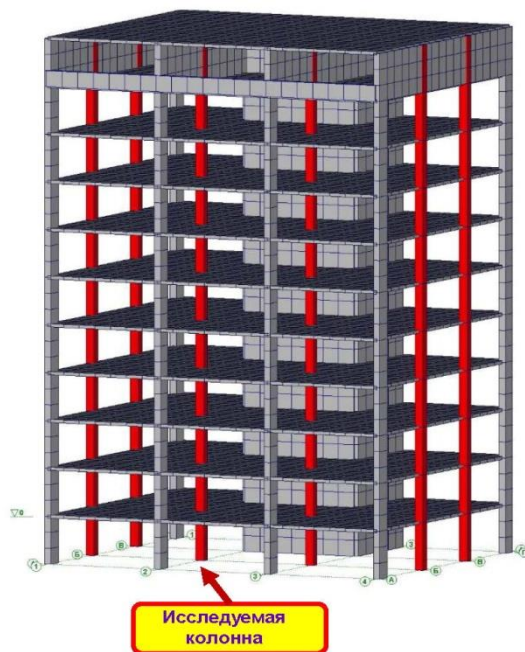


Рис. 9а. Расчет тестового примера. Схема здания

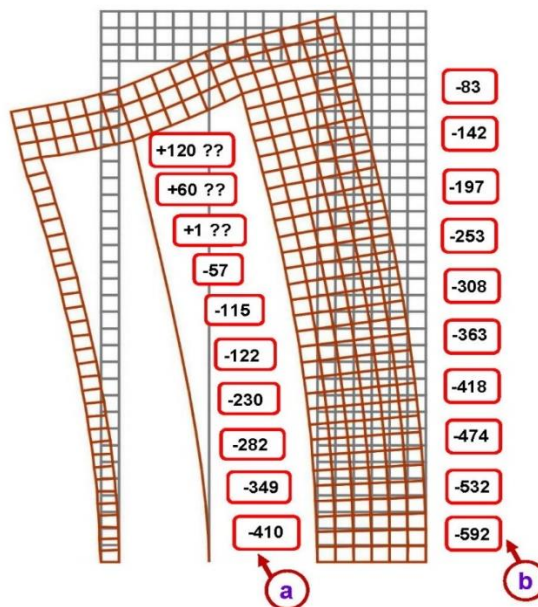


Рис. 9б. Усилия в колоннах. Расчет тестового примера

Если выполнить расчет с учетом стадийности возведения конструкции, при котором учитывается накопление деформаций на каждом этапе возведения конструкции, устанавливая при этом конструктивные элементы следующего этапа в проектное положение, то мы получим вполне достоверные результаты расчета, которые хорошо коррелируют с ожидаемыми (см. табл. 2).

Таблица 2. Сравнение результатов тестового расчета

Способ расчета	Усилия в колоннах по оси «2» (+ растяжение; - сжатие), т				
	1 этаж	3 этаж	5 этаж	8 этаж	10 этаж
Традиционный	-410	-289	-172	+1	+80
С учетом стадийности	-592	-474	-363	-197	-83

Особенности поведения грунтового основания

Необходимо подчеркнуть, что расчетная технология «Монтаж» не ограничивается рамками решения задач, определяемых влиянием изменяющейся от этапа к этапу геометрии системы и формированием деформированной схемы при действии соответствующих этапам нагрузок. Очевидно, что существует ряд других параметров, которые изменяются при возведении сооружения. К таким основным параметрам относятся, например, значения деформационных свойств

основания, которые нелинейно зависят от величины передаваемых на основание нагрузок и от жесткости надфундаментных конструкций.

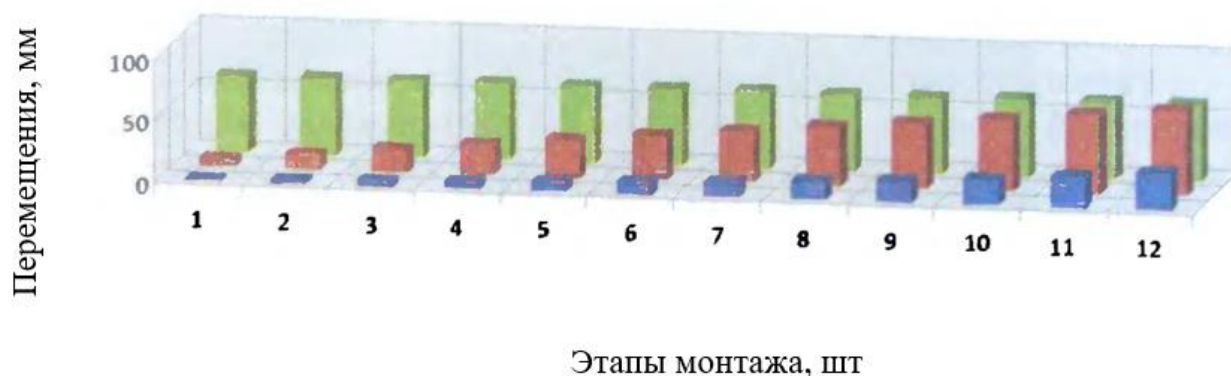
Следует отметить, что деформационные свойства грунтов основания не возникают «мгновенно» - на момент их реализации влияет время консолидации грунтового массива.

Для исследования процесса деформирования основания с учетом влияния поэтапного изменения напряжений под фундаментной плитой (рассмотрен случай с малым временем консолидации) выполнен расчет тестовых моделей №2 и №2-1. Модели аналогичны модели на рис. 10, но с фундаментной плитой на деформируемом основании. В расчетной модели №2 коэффициенты постели определены при действии нагрузок от полной модели и приняты равными $C_1 = 200 \text{ т/м}^3$, а расчет выполнен по традиционной расчетной технологии. В расчетной модели №2-1 (расчетная технология «Монтаж») коэффициенты постели определены в двух вариантах:

- вариант 1: постоянный коэффициент постели $C_1 = 200 \text{ т/м}^3$ для всех стадий монтажа;
- вариант 2: переменный коэффициент постели, изменяющийся от этапа к этапу от величины $C_{1.1} = 1300 \text{ т/м}^3$ до величины $C_{1.12} = 200 \text{ т/м}^3$, что моделирует ситуацию, при которой коэффициент постели $C_{1.i} = f(\sigma_{z,i})$, где $\sigma_{z,i}$ – напряжения под фундаментной плитой на i -том этапе монтажа.

Динамика формирования осадок фундаментной плиты в сопоставляемых расчетных моделях представлена на рис. 10.

Анализ процесса формирования вертикальных деформаций тестовой модели при различных методах моделирования деформационных свойств основания позволяет наглядно проиллюстрировать тот факт, что, используя технологию с поэтапным отслеживанием НДС (предположительно позволяющую получить более точный результат), но принимая при этом величину коэффициента постели, соответствующую максимальной нагрузке на сооружение, результат расчета будет еще более удален от ожидаемого уровня (см. результаты расчета модели №2-1, вариант 1).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blue	1,16	2,60	4,15	5,82	7,63	9,62	11,83	14,31	17,17	20,55	24,67	29,81
Red	6,91	12,73	18,56	24,30	29,98	35,61	41,19	41,19	52,26	57,75	63,11	68,26
Green	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90	61,90

Рис. 10. Вертикальные перемещения контрольного узла фундаментной плиты

Увеличение жесткостных характеристик несущих элементов

Элементы расчетной модели строительной конструкции наделены определенными характеристиками жесткости, которые традиционно полагаются неизменными. Но это не соответствует реальному поведению строительной конструкции, поскольку некоторые из этих характеристик меняют свое значение вследствие внешнего вмешательства или же под влиянием изменения внешней среды.

Так, например, при реконструкции зданий возникает необходимость увеличения нагрузок на существующие конструкции, в которых в течение жизненного цикла сформировалось напряженно-деформированное состояние, соответствующее нагрузкам предшествующего эксплуатационного периода. Для обеспечения нового (более высокого) уровня несущей способности конструкций выполняются мероприятия по их усилению: наращивание сечения колонн, устройство дополнительного (внешнего) армирования ригелей и т.п. Для повышения несущей способности стен из каменной кладки применяются такие

методы, как инъектирование цементными растворами по разрядно-импульсной технологии устройство одно- и двухсторонних аппликаций из монолитного железобетона и метод торкретирования.

Как правило, методы повышения несущей способности конструкций, включая приведенные выше, приводят к увеличению жесткостей элементов несущей системы. При этом в условиях сформировавшегося НДС существующего сооружения увеличение жесткостей элементов несущей системы не может изменить сложившееся распределение усилий, но должно проявиться в работе при изменении нагрузок на конструкцию либо при изменении модели внешних связей.

При реконструкции зданий, связанной с повышением нагрузок, нередко требуется обеспечить более высокую несущую способность грунтовых оснований. Более распространенными являются случаи, при которых необходимо обеспечить отсутствие или минимизацию дополнительных осадок фундаментов при увеличении нагрузок. Для реализации указанных требований применяют различные методы: цементация массива грунта под сооружением, устройство свай, работающих совместно с существующими фундаментами и т. п.

Учитывая все вышесказанное, можно отметить, что расчетная технология МОНТАЖ позволяет проследить полный жизненный цикл сооружения, начиная с монтажа, далее эксплуатационную стадию, реконструкцию, а при необходимости – усиление конструкций и грунтовых оснований. Расчетная технология МОНТАЖ предоставляет для этих целей полный инструментарий.