

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экономики и управления в строительстве

**КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ
СИСТЕМ»**

**для студентов бакалавриата очной формы обучения
направления подготовки 08.03.01 «Экономика»**

Москва 2023

Курс лекций по дисциплине «Экономическое моделирование производственных систем»
[Электронный ресурс] : для студентов бакалавриата очной формы обучения направления
подготовки 08.03.01 «Экономика» / М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац.
исследоват. Моск. гос. строит. ун-т., кафедра экономики и управления в строительстве;
сост.: О.А.Бурова, О.В. Папельнюк — Электрон. дан. и прогр. . — Москва : НИУ МГСУ, 2023г..
— Учебное сетевое электронное издание —
Представлен теоретический материал с примерами решения задач.
Для студентов бакалавриата дневной формы обучения направления подготовки 08.03.01
«Экономика»

Учебное сетевое электронное издание

© НИУ МГСУ, 2023г.

ББК

Составители: О. А. Бурова, О.В. Папельнюк

Оглавление

Введение.....	4-5
Раздел 1 ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ	
Тема 1 Основы экономического моделирования производственных систем.....	6-17
Тема 2 Развитие экономико-математических моделей и методов.....	18-36
Раздел 2 ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	
Тема 3 Предельный анализ и оптимизация.....	37-53
Тема 4 Симплексный метод.....	54-65
Тема 5 Теория двойственности.....	66-76
Тема 6 Транспортная задача.....	77-95
Тема 7 Производственные функции.....	96-110
Тема 8 Экономико-статистическое моделирование.....	111-166
Раздел 3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	
Тема 9 Имитационное моделирование производственных систем.....	167-196
Тема 10 Моделирование процессов массового обслуживания в экономических системах.....	197-209
Список литературы.....	210-211
Приложения.....	212-217

ВВЕДЕНИЕ

В системе экономического образования дисциплина «Экономическое моделирование производственных систем» занимает важное место как базовая дисциплина, формирующая профессиональный уровень современного экономиста.

Учебное пособие, подготовленное с учетом требований действующего Государственного образовательного стандарта Министерства образования и науки РФ по экономическим специальностям и состоит из трех разделов – «Введение в экономическое моделирование производственных систем», «Экономико-математические модели и методы», «Имитационное моделирование».

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода

моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования "погружен" в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

В каждой главе лекций приведен теоретический материал, примеры с решениями типовых задач, способствующие лучшему освоению дисциплины, которые могут быть использованы в процессе аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы.

Курс лекций по дисциплине «Экономическое моделирование производственных систем» может быть использован для студентов бакалавриата очной формы обучения направления подготовки 08.03.01 «Экономика».

Раздел 1 ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Тема 1 Основы экономического моделирования производственных систем

Экономико-математическая модель: понятие, свойства, алгоритм построения. Объекты моделирования в строительстве.

Экономическая система является подсистемой общества, и представляет собой смешанную естественно-искусственную, динамическую, вероятностную, сложную систему.

Важнейшими составными элементами экономической системы является: производство, распределение, обмен и потребление материальных благ. Кроме этого, экономическая система и ее отдельные элементы состоят из технических, биологических и других сложных систем.

Особенность экономической системы - участие в ней человека как пользователя и ресурса труда, преобразователя и носителя информации. Кроме этого человек стоит над экономической системой и определяет цели ее развития.

Одной из важных подсистем экономической системы является система производства. Именно в ней происходит преобразование ограниченных ресурсов в продукцию и услуги.

Исходя из системного подхода, **производственную систему** можно представить, как преобразователь входных ресурсов в выходные результаты. Процесс использования математических методов для разработки и использования экономико-математических моделей называется моделированием.

Математическое моделирование - это прикладная наука о методах формализации экономических явлений и процессов, которые происходят в **производстве**.

Математическое моделирование используется, когда проведение эксперимента в условиях производства является сложным или же вообще невозможным. Также используется для изучения и проверки новых производственных систем, в том числе и для анализа возможностей их развития, или же для прогнозирования. Метод математического моделирования осуществляется в строго определенном порядке. Для начала, в исследуемом объекте изучаются все экономические процессы, которые протекают в нем. Это необходимо для постановки задачи и разработки модели. При изучении выясняются наиболее важные характеристики.

На основании информации, которые получают в ходе предварительного изучения объекта с учетом постановки задачи выстраивается модель процесса или явления. Модель разрабатывается таким образом, чтобы на ней можно было проводить исследования экономического объекта с помощью математических методов. Модель может быть выражена в структурной форме, представлена системой алгебраических уравнений и неравенств, в обычном виде или в матричной форме. Часто ее представляют, как аналитическую запись экономико-математической модели, которая превращается в числовую экономико-математическую модель объекта после заполнения коэффициентами и константами.

Следующим шагом использования метода математического моделирования является всесторонний анализ разработанной модели. Это необходимо для того, чтобы доказать, насколько расчетные параметры, полученные по модели, совпадают с фактической информацией о функционировании моделируемого экономического объекта. В случае значительного отклонения осуществляется корректировка модели. Только после этого можно считать, что создана модель адекватная объекту.

В дальнейшем на основе модели проводится исследование и анализ экономического процесса, его свойств и взаимосвязей. Далее, исследуются пути развития, функционирования экономического объекта, неизвестные по имеющейся информации, недоступные при прямом изучении процессов и не

подлежащие производственному эксперименту. Математическое моделирование обеспечивает разработку и создание экономико-математических моделей, адекватных экономическим процессам или явлениям.

Математическое моделирование – это важнейший инструмент научного исследования экономического объекта. Все экономико-математические модели изучаются с помощью разнообразных математических методов с решением их на электронно-вычислительных машинах, т.е. на компьютерах.

Наиболее широкой областью применения методов математического моделирования *является разработка оптимальных планов развития производства*, на всех уровнях управления и на различные временные периоды.

На предприятиях методы экономико-математического моделирования применяются по двум основным направлениям – оптимизация управления и оптимизация технологических процессов и планирования. На этом этапе самые различные экономические и организационные проблемы можно подвести к решению экстремальных задач, которые позволяют выбрать оптимальный вариант из возможных. Решение подобных задач позволяет наилучшим способом использовать ресурсы, находить самые эффективные способы организации производства и т.п.

Наиболее перспективным направлением применения математических моделей в области строительства является использование их в управлении производством для поиска оптимальных управленческих решений.

Развитие методов математического моделирования экономических процессов позволит в будущем реализовать набор задач, стоящих перед строительным производством при разработке организации и технологии строительства. Модели экономических процессов разрабатываются для оптимизации определенной целевой функции при некотором ряде ограничений. *Термин “оптимизация”* в основном используется для обозначения процессов максимизации или минимизации целевой функции.

Поэтому для одной и той же задачи можно предложить 2 отличные друг от друга модели с различными вариантами оптимизации.

К примеру, мы можем предпочесть максимизировать прибыль, или же, исходя из другой цели - минимизировать затраты. Эти критерии не равны, так как затраты могут быть функцией переменных, находящейся под контролем данного предприятия, тогда как прибыль будет зависеть от внешних факторов, независимых от фирмы, например, от благосостояния потребителей на рынке или же от общеэкономического состояния страны. Использование оптимизационных моделей, которые соответствуют этим критериям при одинаковых ограничениях не обязательно приведет к получению одинаковых оптимальных решений.

Основным выводом, который следует из вышеизложенного то, что конкретное оптимальное решение, которое получено с помощью некоторой модели будет наилучшим только при использовании именно этой модели. Иначе говоря, оно будет наилучшим из всех возможных только тогда, когда выбранный критерий оптимизации можно будет считать полностью адекватным целям предприятия, в которой возникла исследуемая проблемная ситуация.

Для изучения различных экономических явлений используются их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Строя модель, экономисты выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление и отбрасывают несущественные детали.

Модель - это удобное, упрощенное представление существенно важных характеристик объекта или ситуации.

Модели должны отвечать следующим требованиям:

1. Модель должна отображать характерные, существенные черты объекта.
2. Это отображение должно быть выражено в упрощенной форме.
3. Модель должна позволять менять некоторые свои параметры с целью исследования.

4. Модель должна быть более удобной для экспериментов и более дешевой в изготовлении, чем объект.

При построении экономической модели обычно выполняется ряд этапов:

1. Формулируется предмет и цели исследования.

2. В рассматриваемой экономической системе выделяются структурные или функциональные элементы и определяются их наиболее важные характеристики.

3. Дается словесное описание взаимосвязей между элементами модели.

4. Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик объекта моделирования и формализуются взаимосвязи между ними. Таким образом, строится математическая модель.

5. Проводятся расчеты по математической модели, и выполняется анализ полученного решения.

Объектами моделирования в строительстве являются: строительство в целом, как отрасль народного хозяйства, отрасли строительства, объединения, тресты и строительные управления (предприятия), отдельные подразделения предприятий и производственные процессы в них.

Не всякую экономическую задачу можно представить в виде экономико-математической модели с целью нахождения оптимума. Для этого необходимо наличие определенных условий, допускающих моделирование данной проблемы, а именно:

1. Все требования и условия задачи должны быть выражены математически в виде уравнений и неравенств.

2. Данная задача должна допускать многовариантность решения (иметь альтернативы).

3. Наличие четкой математической формулировки цели задачи с возможностью получения однозначного ответа, т.е. математическое программирование не допускает формулирования более чем одной цели.

Процесс моделирования включает три элемента: 1) субъект (исследователь), 2) объект исследования, 3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Пусть имеется или необходимо создать некоторый объект А. Мы конструируем (материально или мысленно) или находим в реальном мире другой объект В - модель объекта А. Этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть оригиналом), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала.

Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько "специализированных" моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение "модельных" экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее "поведении". Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели R.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал - формирование множества знаний S об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли

отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал, если этот результат необходимо связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить неправомерно.

Четвертый этап - практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им

Классификация экономико-математических моделей.

Математические модели, используемые в экономике, можно разделить на классы по ряду признаков, относящимся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария:

1. *В зависимости от типа моделируемого объекта* модели бывают:

- макроэкономические
- микроэкономические

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой ее укрупненные показатели: ВВП, инвестиции, производительность труда, занятость, процентную ставку и др. показатели.

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение одной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке, микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории.

2. *В зависимости от целей моделирования* могут разрабатываться

- теоретические
- прикладные модели.

Теоретические модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов. Прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений.

В моделировании рыночной экономики особое место занимают равновесные модели, которые описывают состояние экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю, например модели равновесия спроса и предложения.

Оптимизационные модели в рыночной экономике обычно строятся на микро уровне, например максимизация прибыли или минимизация затрат при фирменном планировании.

3. В зависимости от используемого инструментария и от характера изучаемых процессов все виды моделирования могут быть разделены на:

- детерминированные и стохастические,
- дискретные и непрерывные,
- статические и динамические,
- линейные и нелинейные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

Стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса, и оцениваются средние характеристики процесса.

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, т.е. прерывистыми, состоящими из отдельных частей.

Непрерывное моделирование позволяет отобразить непрерывные процессы в системах.

4. По временному признаку модели могут быть:

- статическими

- динамическими

В статических моделях описывается состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени, а динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени (например, за пятилетний период).

5. По степени огрубления формы структурных отношений исследуемого объекта модели подразделяются на:

- линейные
- нелинейные модели

В линейных моделях все искомые переменные в моделях записаны в первой степени, а на графиках они могут быть представлены в виде прямых линий.

6. В зависимости от формы представления объекта можно выделить:

- мысленное
- реальное моделирование

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для из физического созерцания. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного и математического.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отражающие явления и процессы, протекающие в объекте.

В основу гипотетического моделирования исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов.

Мысленный макет может применяться в тех случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию.

Символическое моделирование может быть языковым или знаковым. В основе языкового моделирования лежит некий тезаурус, т.е. словарь, очищенный от неоднозначности, присущей обычному словарю (например, слово "КЛЮЧ").

Знаковое моделирование позволяет с помощью знаков отображать набор понятий, составляя цепочки из слов и предложений и таким образом дать описание реального объекта.

Математическими моделями называют комплекты математических зависимостей, отображающие существенные характеристики изучаемого явления. Во многих случаях математические модели наиболее полно отображают моделируемый объект. В то же время математические модели более динамичны, на них лучше найти оптимальные параметры объекта. Для моделирования экономических явлений другие модели, кроме экономико-математических, как правило, использовать нельзя. Экономико-математические модели, в свою очередь, бывают двух типов: аналитические и имитационные.

Для аналитического моделирования процессы функционирования записываются в виде некоторых функциональных отношений (алгебраических, конечно-разностных и т.д.).

При имитационном моделировании имитируются элементарные явления, составляющие процесс с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Реальное моделирование является наиболее адекватным, но его возможности с учетом сложности объектов очень ограничены.

Классификация экономико-математических методов.

Экономико-математические методы (ЭММ) - обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, введенное

академиком В.С.Немчиновым в начале 60-х годов. Обычно в ЭММ включают следующие группы научных дисциплин:

1. Математическая статистика:

- дисперсионный анализ;
- корреляционный анализ;
- регрессионный анализ;
- факторный анализ.

2. Эконометрия - моделирование экономических процессов, охватывающее как абстрактные, так и статистические числовые модели:

- теория производственных функций;
- межотраслевые балансы (статические и динамические);
- анализ спроса и потребления и др.

3. Методы принятия оптимальных решений, включая исследование операций:

- оптимальное (математическое) программирование;
- линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- дискретное (целочисленное) программирование;
- стохастическое программирование;
- сетевые методы планирования и управления;
- программно-целевые методы планирования и управления;
- теория управления запасами;
- теория массового обслуживания;
- теория игр;
- теория расписаний и др.

4. Экономико-математические методы, специфические для централизованно планируемой и рыночной экономики:

- оптимальное народно-хозяйственное, отраслевое и региональное планирование;
- теория оптимального ценообразования.

5. Экономическая кибернетика:

- системный анализ экономики;
- теория экономической информации;
- теория автоматизированных систем управления.

6. Методы экспериментального изучения экономических явлений:

- методы машинной имитации;
- деловые игры;
- методы реального экономического эксперимента.

В экономико-математических методах применяются различные разделы математики, математической статистики и математической логики. Большую роль в машинном решении экономико-математических задач играют вычислительная математика, теория алгоритмов и другие смежные дисциплины.

Тема 2. Развитие экономико-математических моделей и методов.

Курс «Экономическое моделирование производственных систем» объединяет комплекс экономических и математических дисциплин, предназначенных для изучения экономики. Экономическое моделирование производственных систем имеет общий с другими экономическими дисциплинами объект исследования – экономику как социально-экономическую систему. Однако у этого научного направления есть свой собственный предмет исследования – это прежде всего количественные взаимосвязи и закономерности. При этом используются особые научные методы, которые сами становятся объектом исследования.

О значении и оценке мировым научным сообществом данного направления можно судить по количеству лауреатов Нобелевской премии по экономике, проводивших свои исследования на стыке экономики и математики. Нобелевская премия по экономике начала присуждаться с 1969 г. Лауреатами этой премии стали свыше 40 выдающихся ученых-экономистов, в том числе почти три четверти ученых-экономистов – за исследования на стыке математики и экономики.

Экономическое моделирование производственных систем объединяет достаточно широкий круг дисциплин. Над их созданием трудились большое число ученых. Знать наиболее выдающихся из них и их конкретный вклад в науку во времени означает знание и понимание процесса становления науки, ее основных достижений и стоящих перед ней проблем. Само по себе это формирует восприятие научной дисциплины как процесса постижения человечеством тайнств экономики как социально-экономической системы. При этом подавляющее большинство ученых руководствовалось идеей поиска наиболее точной модели социально-экономической системы или методов ее формирования.

Сам термин «экономическое моделирование» появился лишь в XX веке. До этого экономико-математическая наука развивалась в рамках политической экономии, а позже в рамках чистой экономической теории.

Термин «политическая экономия» был введен во Франции в 1614 г. **Антуаном де Монкретьеном** и обозначал науку о государственном хозяйстве, об экономике национальных государств. Политическая экономия рассматривалась и **А. Смитом** как отрасль знания, необходимая государственному деятелю и законодателю, как наука, которая ставит себе целью «обогащение как народа, так и государя». При таком понимании данной науки без ее определения как политическая обойтись было нельзя.

В конце XIX - начале XX века, благодаря во многом вышедшей в 1890 г. книге английского экономиста **Альфреда Маршалла** «Принципы экономики» («Principles of economics»), все более широкие позиции завоевывает термин «экономическая теория» (экономикс). С этого времени экономическая теория понимается как общественная наука, изучающая поведение людей в процессе производства, обмена и потребления материальных благ и услуг в целях удовлетворения своих неограниченных потребностей посредством ограниченных ресурсов. Термин «политическая экономия» сохранился, но он относится лишь к той части экономической теории, которая касается роли государства в регулировании экономики.

Впервые в истории количественную модель национальной экономики создал **Франсуа Кенэ** (1694-1774), французский экономист, лейб-медик Людовика XV. Данная модель получила название «Экономическая таблица Кенэ». Политической экономией Франсуа

Кенэ начал заниматься в возрасте около 60 лет. Франсуа Кенэ – основоположник школы физиократов, которая признавала единственной производительной отраслью только сельское хозяйство. Он ввел понятие совокупного продукта общества, движение которого рассматривается с единой макроэкономической точки зрения.

Давид Рикардо (1772-1823) - выдающийся английский экономист. Важной заслугой Д. Рикардо была разработка методов научного исследования в экономической науке. Д. Рикардо доказал

целесообразность международной торговли и для тех случаев, когда страна не обладает абсолютным преимуществом в производстве каких-либо товаров, и обосновал теорию сравнительных преимуществ, которая, несмотря на свою статичность, является стройной и логичной. Он показал, что всегда, когда в отсутствии торговли сохраняются различия между странами в соотношении издержек производства разных товаров, каждая страна будет располагать сравнительным преимуществом: у нее всегда найдется товар, производство которого будет более эффективно, чем производство остальных при существующем соотношении издержек в разных странах. Именно на производстве такого товара страна должна специализироваться и экспортировать его в обмен на другие товары.

Модель Д. Рикардо демонстрирует закон сравнительного преимущества: страны специализируются на производстве тех товаров, которые они могут производить с относительно более низкими издержками по сравнению с другими странами.

Курно Антуан Огюстен (1801-1877) - французский математик и экономист, в 1838 г. опубликовал первую в истории монографию экономико-математического содержания: «Исследование математических принципов теории богатства». А. Курно сформулировал:

- основы математического аппарата теории фирмы;
- впервые показал спрос как падающую функцию цены;
- показал, что максимум прибыли достигается в точке, когда предельные издержки сравниваются с предельным доходом.

Количественный анализ экономики в своих трудах активно использовал **Карл Маркс** (1818-1883). Особого внимания заслуживают его воспроизводственные модели. Именно К. Марксу принадлежат слова, что наука лишь тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой. К. Маркс, наряду с Ф. Кенэ, может считаться одним из «предтеч макроэкономики». Он создал двухсекторную модель экономики, посредством которой проанализировал условия

воспроизводства «совокупного общественного продукта» - СОП.

При этом, в отличие от Ф. Кенэ, он проводил различие между «простым» и «расширенным» типами воспроизводства, выделял также «натурально-вещественную структуру» СОП. В его трактовке СОП подразделяется на средства производства (т.е. капитальные блага) и предметы потребления.

Заметный вклад в экономико-математическую науку внесла Лозаннская экономическая школа в лице ее виднейших представителей Леона Вальраса и Вильфредо Парето.

Леон Вальрас (1834-1910) - швейцарский экономист, один из основателей и крупнейший представитель математической школы в политической экономии. Он родился во Франции, в течение 22 лет (с 1870 по 1892 г.) возглавлял кафедру политической экономии в Лозаннском университете в Швейцарии. Примечательно название основного труда Л. Вальраса «Элементы чистой политической экономии», в котором он сделал попытку построить обобщенную математическую модель экономики, а также рассчитать условия равновесия экономической системы.

Л. Вальрас утверждал, что логически обоснованно доказать правильность теории можно лишь с помощью математического метода. Применение математики в экономических исследованиях заметно распространилось в конце XIX и начале XX столетия. Конечно, и до Вальраса экономисты часто прибегали к использованию цифр, например, Вильям Петти, затем Рикардо и Маркс. Но использование математики для того, чтобы выразить результаты анализа в виде системы уравнений, было делом совершенно новым. «Рост и падение цен, - писал Л. Вальрас, - это метод решения уравнений посредством нащупывания, который делает рыночное решение таким же, как и теоретическое».

В модели Л. Вальраса рынки всех товаров взаимосвязаны, все цены и объемы производства взаимно согласованы, все секторы и все участники

экономической системы стремятся максимизировать полезность. Модель Л. Вальраса включает в себя производство, обмен, образование капиталов и денежное обращение. Над своей моделью он работал всю жизнь, приходя к теории общего равновесия. Л. Вальрас показал невозможность сведения различных факторов к какому-то одному, например к труду. Ценность фактора определяется не только затратами труда, но и его полезностью или редкостью.

Парето Вильфредо (1848-1923) - ярчайший представитель Лозаннской экономической школы и ее глава. Родился в Италии, после окончания Туринского университета занимал инженерные должности. В 1892 г. Сменил Л. Вальраса на посту заведующего кафедрой экономики Лозаннского университета, которой руководил до 1907 г. Продолжил теоретические изыскания своего предшественника, причем особое внимание уделял использованию математических методов анализа.

Основной его вклад в экономическую науку - принцип оптимума по Парето, который гласит: «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а которое некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением».

Данный принцип положен в основу современной математизированной теории экономики благосостояния. Он соблюдается в оптимизационных моделях, в которых оптимальное решение находится через ряд последовательных улучшений первоначального базисного решения. Однако этот принцип имеет не только большое экономико-математическое, но и несоизмеримое нравственно-этическое значение. Прежде чем произвести какие-либо изменения, необходимо убедиться, не причинят ли они кому-либо вреда. Далее желательно, чтобы эти изменения принесли некоторым людям пользу, но не по нашей, а по их собственной оценке. И только в этом случае эти изменения могут рассматриваться как улучшение. Игнорирование этого принципа приводит к противоположным результатам - «хотели как лучше, а получилось как всегда».

На базе дифференциального исчисления в математической экономике возникли теории, получившие название маржиналистских (от англ. marginal - предельный). Это теория предельной полезности, теория предельной производительности труда, теория предельной доходности и др. Все эти теории базируются на принципах предельного анализа в экономике. Наиболее существенный вклад в эти теории внесли Стенли Джевонс и Джон Кларк.

Джевонс Уильям Стенли (1835-1882) - английский экономист, основатель математической школы западной политэкономии. Преподавая в Манчестерском колледже, а затем Лондонском университете, он явился основоположником теории предельной полезности, предельных издержек и предельных условий «оптимального поведения», внес существенный вклад в теорию индексов (сконструировал взвешенный индекс цен) и дал собственную трактовку деловых циклов.

В 1862 г. Джевонс без особого успеха представляет в Британскую ассоциацию две свои работы: краткие тезисы «Об общей математической теории политической экономии», в которой сжато и даже без формул и графиков изложено основное содержание будущей «Теории политической экономии», и заметку о статических способах исследования сезонных колебаний. В предисловии к «Теории политической экономии» С. Джевонс формулирует свой знаменитый тезис о том, что «наша наука должна быть математической хотя бы потому, что имеет дело с количествами». Основную проблему экономики можно свести к строгой математической форме, и лишь отсутствие точных данных для определения ее законов или функций методом индукции никогда не позволит ей стать точной наукой.

Он вывел экономическую науку из колеи трудовой теории стоимости и направил ее в новое русло. Его заслуги в экономической теории соизмеримы с заслугами Ньютона в физике. Результаты научных исследований Стенли Джевонса были высоко оценены и он был принят в члены Королевского общества. В этом обществе это был второй экономист

после В. Петти. К сожалению, Ст. Джевонс в возрасте 47 лет утонул в Темзе.

Другой маржиналист **Кларк Джон Бейтс** (1847-1938), американский экономист, прожил большую жизнь. Он учился в Европе, преподавал в колледжах США, являлся профессором Колумбийского университета. Одним из первых применил принципы предельного анализа к экономике, автор теории предельной производительности факторов производства. Однако Дж. Кларк ошибочно полагал, что распределение дохода между владельцами факторов производства (труд, земля, капитал) соответственно предельной производительности факторов является социально справедливым.

Маршалл Альфред (1842-1924) - английский экономист, основатель неоклассической экономической теории, математической экономики и Кембриджской экономической школы. Он родился в Лондоне в семье кассира Национального банка Англии. Отец надеялся, что мальчик станет священником. Однако молодой Маршалл имел свои планы. Он прекратил заниматься теологией и начал в Кембридже изучать математику. Одновременно занимался философией и экономикой

В 1863 г. он получил степень магистра математики и поставил перед собой цель укрепления классической экономической теории с помощью математики. Будучи профессором и руководителем кафедры политэкономии Кембриджского университета (1885-1908), А. Маршалл скоро перерос рамки классической школы. В своем труде «Принципы экономики» («Principles of economics»), вышедшем в 1890 г., он заложил основы неоклассической школы и математической экономики. Этот труд на протяжении многих десятилетий служил основным учебником по экономической теории во многих странах мира.

По Маршаллу, достижение на рынке посредством цен равновесия между спросом и предложением лежит в основе почти всех экономических проблем. Его модель «спрос-предложение» - один из наиболее полезных

инструментов в арсенале экономиста.

Он сформулировал свойства кривой спроса, дал понятие эластичности спроса от цены, ввел в анализ понятия мгновенного, короткого и длительного периодов, показав, как зависит цена от длительности рассматриваемого периода.

Особые заслуги А. Маршалла состоят в том, что он воспитал целую плеяду великих ученых-экономистов. Достаточно сказать, что под его руководством в Кембриджском университете получили образование такие известнейшие экономисты, как Артур Пигу и Джон М. Кейнс.

Кейнс Джон Мейнард (1883-1946) - английский экономист и государственный деятель, основатель макроэкономики. Отец Кейнса читал лекции в Кембриджском университете по экономике и логике. После школы Дж. Кейнс поступил в частный колледж Итона, затем в Королевский колледж Кембриджского университета. Его любимым предметом стала экономика, которую преподавали А. Маршалл и А. Пигу. После окончания Кембриджского университета (1906) Кейнс поступает на работу в государственное Управление по делам Индии.

Однако служба в этом учреждении показалась ему скучной, и через два года он уплывает в Бомбей. По приглашению своего учителя А. Маршалла Кейнс в 1909 г. возвращается в Кембриджский университет, где читает лекции по экономике и занимается научной работой. Опубликование им в 1913 г. первой экономической монографии «Индийская валюта и финансы» имела своим следствием назначение Дж. Кейнса членом Королевской комиссии по финансам Индии. В работе «Трактат о вероятностях» («Treatise on probability», 1919) Кейнс широко применяет математические уравнения.

После Первой мировой войны участвовал в работе Парижской мирной конференции в качестве главного представителя Британского казначейства. Выступал против чрезмерных репараций в Германии. Его предложения о размере репараций в 2 млрд ф. ст. были почти в 12 раз

меньше цифры, предложенной банком Англии. Кейнс предвидел, что за намеренное обнищание Германии последует возмездие, которое не заставит себя долго ждать. Он выступал за предоставление Германии американских займов, предвосхитив известный план Маршалла для послевоенной Европы. Из-за несогласия с величиной репараций Кейнс покинул Парижскую мирную конференцию. В 1920-е гг. в своих работах Кейнс критикует политику невмешательства государства в экономику, принцип «laissez faire».

В главном своем труде «Общая теория занятости, процента и денег» (1936) Кейнс показал, что экономика страны не просто сумма составляющих ее малых подсистем - фирм и домашних хозяйств, а нечто качественно иное. А раз это так, то бесполезно давать микроэкономические ответы на макроэкономические проблемы. Кейнс выступает за активное государственное регулирование экономики. Центральным понятием в кейнсианской модели выступает эффективный спрос, который стимулирует производство. Задача государства состоит в поддержании эффективного, проса, основными компонентами которого являются потребление домашних хозяйств, инвестиции, госрасходы и чистый экспорт. В развитой экономике обычно значительная часть национального дохода не потребляется, а выступает в виде сбережений, отложенного спроса. Отсюда время от времени наступают кризисы перепроизводства. Задача государства состоит в том, чтобы через бюджетно-налоговую и кредитно-денежную политику активизировать сбережения, повысить эффективный спрос. Для этого пригодны льготное налогообложение и кредитование, государственные закупки товаров и услуг, инвестиции в производственную и социальную инфраструктуру, стимулирование экспорта, который расширяет рынок. Возникающий при этом бюджетный дефицит может покрываться как за счет внутренних и внешних займов, так и в известных пределах посредством денежной эмиссии. Все это создает условия для полной занятости и повышает

эффективный спрос и, наоборот, эффективный спрос создает условия для полной занятости.

Кейнс разработал модель общего экономического равновесия, развил понятие мультипликатора, исследовал вопросы денежного обращения, инфляции, международной денежной системы.

Его идеи воплотились в многочисленных программах государственного регулирования экономики, в создании Международного валютного фонда.

Незаурядность Кейнса проявилась во всем. Он составил себе солидный капитал, успешно играя на бирже. Будучи казначеем Кембриджского Королевского колледжа, укрепил его финансовое положение. Он дружил со многими знаменитыми людьми. Женой Кейнса была прима Дягилевского балета Лидия Лопухина. Он безвозмездно помогал балетной труппе, а в 1935 г. в Кембридже построил здание театра.

За научные заслуги Кейнс в 1945 г. был удостоен звания лорда. Он стал основателем направления в экономической теории, которое теперь носит его имя. Однако, в отличие от многих своих последователей, он рассматривал экономическую теорию не как свод норм, правил, законов, предназначенных для того, чтобы «...давать советы, немедленно применимые в политике. Это скорее метод, чем доктрина, аппарат мышления, техника обдумывания, помогающая тому, кто овладел этим методом, делать корректные выводы».

В создание и использование эконометрических моделей существенный вклад внесли Роналд Фишер, Рагнар Фриш и Ян Тинберген.

Фишер Роналд Эйлмер (1890-1962) - английский статистик и генетик. Один из основателей математической статистики, с помощью которой оцениваются параметры уравнения регрессии. Он учился в Кембридже, работал в отделе статистики одной из экспериментальных станций, преподавал в Кембриджском университете. Внес вклад в теорию статистической проверки гипотез, разработал методику планирования

эксперимента. За научные заслуги был избран в члены Лондонского Королевского общества.

Фриш Рагнар (1895-1973) - норвежский экономист, один из основателей эконометрии. Окончил университет в Осло и в течение 34 лет (с 1931 по 1965 г.) преподавал в том же университете. Его научная и практическая деятельность охватывает теорию программирования и макроэкономического планирования, теорию экономических моделей циклического, общего равновесного и неравновесного экономического развития, экономическую динамику и математическую статистику. Фриш – автор норвежского варианта системы национальных счетов. Он первым определил эконометрию как синтез экономической теории, статистики и математики. В 1930 г. ученый организовал Эконометрическое общество и стал первым редактором журнала «Эконометрика». В 1969 г. за научный вклад «в формирование понятий эконометрии и математической экономики» ему была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Тинберген Ян (1903-1994) - нидерландский экономист, видный представитель современной математической экономики. Окончил Лейденский университет, работал в центральных экономических ведомствах Нидерландов, в Комитете по планированию ООН, преподавал в Школе экономики и Лейденском университете. Его работы посвящены теории экономического роста, государственного регулирования экономики, составлению долгосрочных программ экономического развития.

Он в числе первых совершил переход от концептуальных моделей к расчетным. В 1969 г. «за научный вклад в области эконометрии и математического представления экономической теории» награжден Нобелевской премией по экономике.

Леонтьев Василий Васильевич (1906-1999) - американский экономист русского происхождения. Родился в С.-Петербурге. Там же в 1921-1925 гг. изучал философию, социологию и экономические науки.

Затем учился в аспирантуре в Берлинском университете, где в 1928 г. получил степень доктора философии. С 1927 г. - младший научный сотрудник Кильского института мировой экономики, с 1929 г. работает в Китае в качестве экономического советника при министерстве железных дорог. В 1931 г. эмигрирует в США, где до 1975 г. преподает экономику в Гарвардском университете. В 1946 г. организует Центр экономического анализа, который впоследствии прославил Гарвардскую экономическую школу. С 1975 по 1986 г. – директор Нью-Йоркского института экономического анализа.

В 1941 г. опубликовал первую крупную монографию «Структура американской экономики 1919-1929 гг.», в которой изложил основы нового метода экономического анализа и прогнозирования, получившего название метод «затраты-выпуск» (Input-Output), известный в отечественной литературе как метод межотраслевого баланса.

Этот метод, благодаря его строгой математической формализации, стал применяться в большинстве стран мира, в учреждениях ООН и принес его автору широкую известность.

В последующих работах он развивал свой метод и создал динамический вариант модели «затраты-выпуск», учитывавшей технический прогресс, изменение цен и базировавшийся на гибких коэффициентах.

Под руководством В. Леонтьева группа экспертов по заказу ООН подготовила доклад-прогноз «Будущее мировой экономики», который был переведен и опубликован в СССР на русском языке в 1979 г.

В 1973 г. удостоен Нобелевской премии «за развитие метода экономического анализа “затраты-выпуск”», используемого в различных формах более чем в 50 промышленных странах для планирования и прогнозирования.

Объясняя студентам, как функционирует экономика, он сравнивал ее с яхтой в море. «Чтобы дела шли хорошо, нужен ветер - это

заинтересованность, руль - это государственное регулирование... Самое трудное состоит в том, чтобы найти правильное соотношение между ответственными действиями предприятий и государства».

Перед экономической наукой всегда стояла проблема, как наилучшим образом использовать ограниченные экономические ресурсы. Поиском оптимума в экономике занимались многие экономисты, Однако наиболее существенный вклад в теорию оптимального распределения ресурсов с созданием соответствующих моделей внесли Л.В. Канторович и Т. Купманс.

Канторович Леонид Витальевич (1912-1986) - советский математик и экономист. Родился 19 января 1912 г. в Санкт-Петербурге в семье врача. В 18 лет закончил математический факультет Ленинградского университета (1930) и уже через четыре года получил звание профессора. В 1935 г., ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации. С 1934 по 1960 г. работал профессором в том же университете, затем в институтах Академии наук в Новосибирске и Москве, Академии народного хозяйства. С 1964 г. - академик АН СССР.

Еще до войны Л.В. Канторович опубликовал статью об оптимальном раскрое материала, открыв тем самым метод линейного программирования.

Работы Л.В. Канторовича: Математические методы организации и планирования производства (1939г.); Расчет рационального раскроя промышленных материалов (1951); Экономический расчет наилучшего использования ресурсов (1951 г.); Оптимальные решения в экономике (1972). В 1975 г. он единственный из советских экономистов был удостоен Нобелевской премии (вместе с Т. Купмансом) за «вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Купманс Тьяллинг (1910-1985) - американский экономист голландского происхождения. В 1933 г. окончил университет в Утрехте.

Работал профессором в Нидерландской школе экономики, затем в финансовом секретариате Лиги Наций. В 1940 г. переехал в США. Работал исследователем в Принстонском университете, в коммерческих фирмах. С 1944 по 1985 г. - профессор в Чикагском и Йельском университетах.

Т. Купманс инициатор целого ряда исследований в математическом программировании и эконометрике. В 1975 г. он был удостоен Нобелевской премии (вместе с Л.В. Канторовичем) за «вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Фридмэн Милтон (р. 1912), американский экономист, глава монетаристского направления в современной экономической науке, глава Чикагской экономической школы.

Он родился в Нью-Йорке в бедной семье иммигрантов из Восточной Европы. В 1928-1932 гг. - студент Рутгерского университета, после окончания которого получил степень бакалавра по математике и экономике. В 1933 г. в Чикагском университете получил степень магистра и начал заниматься научной работой. Во время Второй мировой войны - сотрудник казначейства США, занимается налогами и военно-экономическими исследованиями. После окончания войны выступал в качестве консультанта при реализации плана Маршалла. С 1948 г. возвращается в Чикагский университет

На формирование научных позиций М. Фридмэна большое влияние оказали идеи экономистов Кембриджской школы, американского экономиста-математика, первого президента Международного эконометрического общества Ирвинга Фишера (1867-1947) и его знаменитое «уравнение обмена», а также сотрудничество с такими крупными учеными-экономистами, как Саймон Кузнец лауреат Нобелевской премии по экономике 1971 г., Герберт Саймон - лауреат Нобелевской премии по экономике 1978 г. и др.

В своих многочисленных трудах М. Фридмэн выступает за возврат к традиционным критериям рыночной экономики, за сужение

государственного регулирования экономики, так как «ни одно правительство не может быть мудрее рынка». «За неизбежные ошибки правительства мы отвечаем своими деньгами, а оно – нашими». Он выступает за оздоровление денежного обращения, сфера кредитно-денежных отношений – основная для теоретических изысканий и практических рекомендаций. Экономические идеи Фридмэна и его сторонников получили название монетатаризма.

Фридмэн подметил отсутствие жесткой связи между ростом дохода и потреблением, цель которого состоит в сохранении относительно устойчивого жизненного стандарта. Потребитель стремится сохранить его даже в периоды снижения текущих доходов. Отсюда некорректность кейнсианской теории «эффективного спроса». Однако основной удар по кейнсианской концепции «накачивания спроса» был нанесен возникшей в середине 70-х годов в развитых странах Запада стагфляцией – периодом хронической инфляции и спадом экономической активности. Устранить ее удалось с помощью рецептов монетаристов, а не сторонников кейнсианства. Однако монетаризм не содержит абсолютных рецептов экономического роста. Существует, например, британская версия монетаризма М. Тэтчер, польская версия Джеффри Сакса («шоковая терапия») и др. Главное в монетаризме – это обеспечение стабильности «путем оздоровления денежного обращения, освобождения рыночных сил от пут регулирования, создание атмосферы, в которой человек обретает экономическую свободу, а предприниматель стремится к капиталовложениям, новациям, риску».

С 1967 г. М. Фридмэн – президент Американской экономической ассоциации. Нобелевская премия присуждена ему в 1976 г. В решении Нобелевского комитета отмечена книга М. Фридмэна «Капитализм и свобода», а также указано, «что редко случается, чтобы экономист оказывал столь сильное влияние не только на экономические исследования, но и на актуальную практику».

Ярким представителем Чикагской экономической школы является Гарри Марковиц.

Гарри Марковиц родился в 1927 г.в Чикаго, США. По словам Г. Марковица,- изучение экономики вовсе не было мечтой его детства. Долгое время он увлекался философией. Однако после окончания программы бакалавра Чикагского университета (1947) он решает посвятить себя экономической теории. Особый интерес у Марковица вызывали исследования в области экономики неопределенности, в том числе и работы М. Фридмэна и Л. Сэвиджа, преподававших тогда в Чикаго.

Его первая крупная работа - магистерская диссертация (1950) - посвящена изучению возможности применения математических методов к анализу фондовых рынков.

Гарри Марковиц - один из родоначальников теории финансов, одной из наиболее быстро развивающихся экономических наук. Эта наука закладывает основы прикладной дисциплины - финансового управления фирмой. С помощью инструментария и методов исследования этой дисциплины любая фирма может проанализировать свое финансовое положение, оценить стоимость своего капитала и его структуру, выбрать наилучший проект для вложения средств и источник финансирования, решить, как и в каком количестве выпускать акции и облигации, управлять своим капиталом многое другое.

Особая заслуга Г. Марковица - теория оптимального портфеля. Вниманию мировой общественности Гарри Марковиц ее предложил в 1952 г., за что в 1990 г. заслуженно награжден Нобелевской премией в области экономики. Автор совершил чудо для финансового мира. После того как он сумел сугубо прикладную финансовую задачу перевести на язык математики, оказалось, что на заданном множестве активов можно формировать такие портфели, которые при одинаковой ожидаемой доходности могут иметь в несколько раз меньший риск по сравнению с другими. Кроме того, он доказал, что более эффективного портфеля из

данных акций составить нельзя - его просто не существует.

Ярким представителем Чикагской экономической школы, которая подарила миру восемь Нобелевских лауреатов, является Роберт Лукас.

Роберт Лукас родился 15 сентября 1937 г. в городке Яжима, штат Вашингтон. Изучал математику в Чикагском университете. С 1959 г. Продолжал учебу в Калифорнийском университете в Беркли, специализируясь в области истории. В 1959 г. получил в Чикагском университете диплом бакалавра по специальности «история». В 1964 г. там же защитил докторскую диссертацию по теме «Замещение между трудом и капиталом в промышленности США в 1929-1958 гг.».

В течение многих лет преподавал в Чикагском университете, пройдя путь от простого преподавателя до профессора и декана и экономического факультета. Р. Лукас, автор новой теории циклов, основными компонентами которой являются: теория несовершенной информации, особая функция предложения и гипотеза о рациональных ожиданиях.

Обосновывая свою теорию несовершенной информации, Р. Лукас сравнивает рынки отдельных товаров с разбросанными в море островами и полагает, что товаропроизводитель не имеет полной информации о положении на других рынках, подобно тому, как островитянин не имеет понятия о том, что делается на других островах. Участники рынка, как и обитатели острова, владеют всей информацией о нем, однако при этом они отделены от других рынков (или островов) и узнают обо всем происходящем за пределами их острова только с запозданием (лагом). Несовершенная информация оказывает серьезное воздействие на совокупный спрос и ведет к сознательному увеличению экономическими агентами совокупного предложения.

Теория «рациональных ожиданий» позволяет представить влияние экономической политики на развитие экономического процесса. Она предполагает, что фирмы в своих прогнозах исходят из оценок того, как функционирует экономическая модель, какова динамика цен, расходов,

уровня процентной ставки, каковы вероятные последствия принимаемых правительством решений, как могут измениться основные макроэкономические показатели. Исходя из данной информации, фирмы определяют свое рациональное поведение.

Нобелевская премия по экономике была присуждена Р. Лукасу в 1995 г. «за развитие и применение гипотезы о рациональных ожиданиях, а также за вклад в макроэкономический анализ и углубление понимания экономической политики». В условиях перехода наиболее развитых стран к информационному обществу среди ученых-экономистов начало формироваться представление, что в экономике очень важную роль играет информация, знания.

Джозеф Стиглиц – профессор Колумбийского университета, родился в 1943 г. В городе Гэри, штат Индиана. Нобелевская премия по экономике присуждена в 2001 г. совместно с Джорджем Акерлофом, профессором Калифорнийского университета и Майклом Спенсом, профессором Стэнфордского университета. Нобелевские лауреаты рассматривали проблему «рынков с асимметричной информацией», т.е. таких рынков, на которых одни участники обладают большим объемом информации, чем другие.

Рынки не всегда функционируют эффективно, поскольку покупатели и продавцы не всегда имеют доступ к информации, которая необходима для осуществления правильного выбора. Экономические агенты не всегда хорошо информированы об альтернативных возможностях, предоставляемых им рынком. Компании не располагают информацией об уровне риска по отношению к отдельным клиентам. В условиях неполной информации потребители, скорее всего, купят не лучший товар.

Вследствие этого нельзя утверждать, что совершенная конкуренция обязательно приведет к равновесию спроса и предложения. Несовершенная информация - еще одно основание, которое позволяет говорить, что рынки неэффективны и что невидимую руку следует

заменить видимой. Более развитые страны уже создали механизмы сложных рынков, которые преодолевают проблемы асимметричной информации. «Их теории, - писала "Нью-Йорк Таймс", включают "несовершенную информацию" в экономическую науку. Их концепция отклоняется от общепринятого представления о том, что рынок сам по себе регулируется и на нем всем известно все».

Модель - это всегда упрощение. Их нельзя недооценивать, но нельзя и переоценивать. В частности, по этому поводу очень интересно мнение Дж. Стиглица, высказанное им в его монографии «Глобализация: тревожные тенденции» (Globalization and its discontents, 2002): «Отчасти проблема состоит в чрезмерном доверии к моделям экономики, почерпнутым из учебников, которые могут быть весьма удобны для обучения студентов, но на них нельзя опираться при консультировании правительств, пытающихся воссоздать рыночную экономику».

Раздел 2 ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Тема 3. Предельный анализ и оптимизация

Оптимизационные задачи или задачи линейного программирования

Дифференциальное исчисление в форме предельного анализа широко применяется в экономике, в частности, при решении задач оптимального программирования, а также в моделях экономического роста и др. Надо учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины: во-первых, многие объекты экономических расчетов неделимы, во-вторых, обычно эти расчеты ведутся по годам, месяцам и другим дискретным промежуткам времени. Тем не менее особенно в теоретических работах метод предельного анализа применяется широко.

Математический аппарат предельного анализа применяется, как известно, теорией предельной полезности, которая использует его для объяснения процессов ценообразования в условиях рыночного хозяйства.

Максимизация прибыли является доминирующей проблемой любого субъекта хозяйствования. Получение максимальной прибыли возможно при определенном сочетании объема производства, цены продукта и затрат на его производство и реализацию. Максимизация прибыли заключается в выборе такого объема производства (реализации) продукции, при котором предельные затраты на производство и реализацию продукции равны предельному доходу.

Предельный доход - это прирост выручки на единицу прироста количества произведенной продукции.

Соответственно *предельные затраты* равны приросту затрат на единицу прироста количества производимой продукции.

При этом следует учитывать, что не всякое расширение производства ведет к адекватному росту прибыли, так как:

а) по-разному выглядит динамика издержек;

б) происходит снижение цен при росте объема выпуска продукции.

Предприятие должно найти такой объем производства продукции, при котором оно извлекло бы наибольший доход.

Существует несколько способов определения оптимального объема производства:

- аналитический;
- графический;
- статистический.

Сущность аналитического способа состоит в сопоставлении предельного дохода и предельных издержек. Если предельный доход больше предельных издержек, то дальнейший рост выпуска увеличивает общую сумму прибыли, и наоборот. Следовательно, для максимизации прибыли предприятие должно расширять объем производства до тех пор, пока предельный доход выше предельных издержек, и прекратить расширение производства, как только предельные издержки начнут превосходить предельный доход (Таблица 3.1).

Таблица 3.1.

Объем продукц ии, тыс. шт.	Цена, тыс. руб.	Общий доход (выручка) , млн руб.	Общие издержки, млн руб.	Прибыль, млн руб.	Предельны й доход, млн руб.	Предельны е издержки, млн руб.
1	2	3	4	5	6	7
0	250	0	210	-210	—	—
1	240	240	350	-110	240	140
2	230	460	480	-20	220	130
3	220	660	600	+60	200	120
4	210	840	710	+130	180	110
5	200	1000	810	+190	160	100
6	190	1140	915	+225	140	105
7	180	1260	1030	+230	120	115
8	170	1360	1155	+205	100	125

9	160	1440	1300	+140	80	140
10	150	1500	1455	+45	60	155

Согласно данным табл. 3.1, самый выгодный объем производства - 7 тыс. ед. Затем предельные издержки уже превосходят предельный доход, что явно неблагоприятно для предприятия. Следовательно, до 7 тыс. ед. предприятию выгодно производить продукцию, но сверх этой величины производство неэффективно.

Этот же результат можно получить *графическим методом* (рис. 3.1).

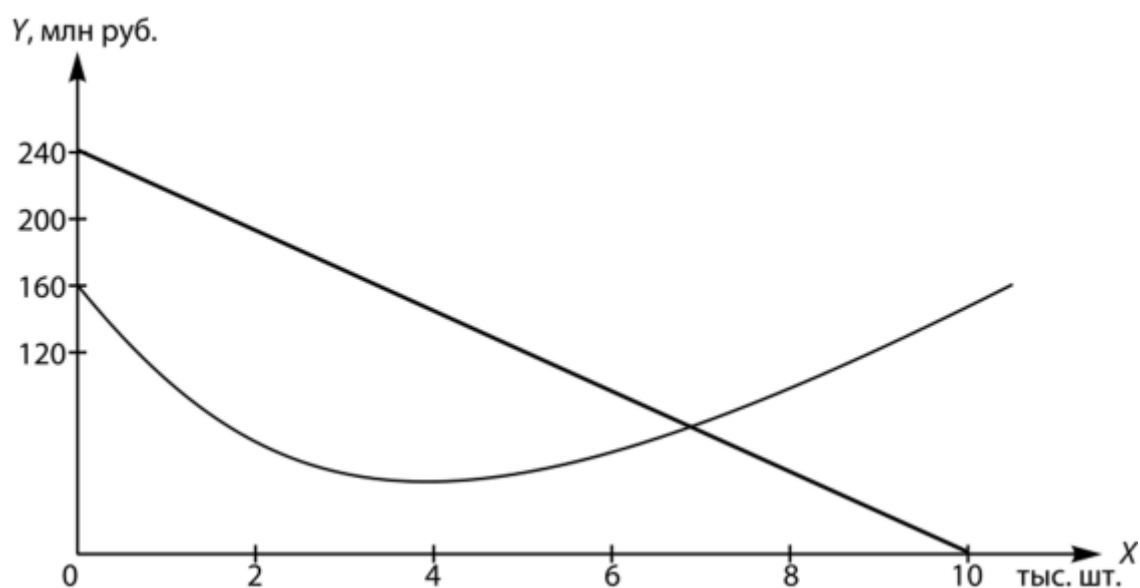


Рис. 3.1. Предельные издержки и доход на единицу продукции

До 7 тыс. ед. кривая предельных издержек ниже кривой предельного дохода и поэтому каждая дополнительная единица выпускаемой продукции увеличивает сумму прибыли.

Максимальная прибыль — это точка пересечения кривой предельных издержек с кривой предельного дохода. После этой точки кривая предельных издержек располагается выше кривой предельного дохода, из чего следует, что каждая дополнительная единица продукции уменьшает прибыль и ее производство неэффективно для предприятия.

Сущность *статистического метода* заключается в том, что на основании массовых данных исследуется зависимость предельного дохода и предельных издержек от объема реализации продукции.

Данные таблицы 3.1 позволяют сделать вывод, что зависимость между предельным доходом и количеством реализованной продукции может быть описана уравнением прямой

$$MR = a + bx,$$

где MR — предельный доход на единицу продукции; x — количество продукции в натуральном выражении.

Найдя неизвестные параметры a и b по методу наименьших квадратов, получим:

$$MR = 260 - 20x.$$

Зависимость предельных издержек от объема производства продукции можно описать уравнением параболы:

$$MC = a + bx + cx^2.$$

В нашем примере оно будет иметь следующий вид:

$$MC = 163,16 - 22,235x + 2,159x^2.$$

Зависимость общей суммы издержек от объема продаж будет такой:

$$Z = a + bx = 229 + 115x.$$

Сейчас приравняем предельный доход и предельные издержки и найдем величину оптимального объема производства продукции, который обеспечит максимальную сумму прибыли:

$$260 - 20x = 163,16 - 22,235x + 2,159x^2;$$

$$2,159x^2 - 2,235x - 96,84 = 0;$$

$$px = 250x - 10x^2;$$

$$V = \frac{2,235 + \sqrt{2,235^2 + 4 \times 2,159 \times 96,84}}{2 \times 2,159} = \frac{31,235}{4,318} = 7,23 \text{ тыс. шт.}$$

Полученная прибыль составит:

$$\Pi = B - Z = 1300 - 1060 = 240 \text{ млн руб.}$$

Следовательно, данному предприятию можно придерживаться стратегии наращивания объема производства до 7200 ед. при условии, что себестоимость его продукции существенно не повысится в ближайшей перспективе.

Дифференциальное исчисление пользуется предельными величинами, и именно это создало ему силу, которая, как известно, в свое время революционизировала естественные науки. Ф. Энгельс писал: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение». В экономике обычно пользуются средними величинами: подсчитывают среднюю себестоимость продукции, среднюю производительность труда и т. д.

Это полезный инструмент экономического анализа. Планируя развитие производства, предприятия сталкиваются с такой задачей: надо узнать, на какую величину вырастет результат, если мы увеличим затраты, и, наоборот, насколько уменьшится результат, если сократить затраты.

Средние величины ответа на такой вопрос не дадут. Здесь речь должна идти о приростах, переменных величинах. В подобных задачах требуется найти предел соотношения прироста эффекта к приросту затрат, или, как говорят, *предельный эффект*.

Наиболее важны здесь два правила. Первое: когда предельный эффект является положительной величиной, масштаб производства должен по возможности расширяться. Можно все больше и больше вкладывать средств, но если рабочей силы не прибавится, каждый дополнительный рубль будет давать все меньшую отдачу (хотя общая прибыль и будет возрастать). Значит, масштаб производства должен расширяться лишь до того момента, пока дополнительные затраты не сравняются с дополнительными результатами

(доходом). Далее каждый дополнительный рубль затрат будет давать эффект меньше рубля, т. е. убыток.

Оптимальный размер производства достигается тогда, когда предельный эффект равен нулю (при этом прибыль — наибольшая).

Второе: когда есть несколько видов производства или, что то же, направлений использования изучаемого ресурса, то для получения общих максимальных результатов они должны давать одинаковый предельный эффект на единицу затрат. Объясняется это так: перераспределение ресурсов с менее эффективных на более эффективные направления дает дополнительный выигрыш, причем, без всяких дополнительных затрат. Следовательно, нужно так распределить ресурсы, чтобы не осталось более выгодных и менее выгодных направлений их использования, т. е. чтобы предельный эффект был везде одинаковым.

Оптимизационный анализ — это процесс, посредством которого предприятие оценивает или определяет уровень выпуска и максимизирует свою общую прибыль. Существует два основных подхода к оптимизации:

- Общий доход и общий подход к затратам
- Предельный доход и предельная стоимость

Подход общего дохода и общей стоимости.

Согласно этому подходу общая прибыль максимальна на уровне производства, где разница между доходом и затратами максимальна.

Когда прибыль равна нулю, это означает, что предприятие достигло точки безубыточности.

Метод предельной выручки и предельной стоимости.

В случае маржинального анализа прибыль максимальна, если максимальна разница между предельным доходом и предельными издержками.

Предельные издержки — это изменение общих затрат в результате изменения объема производства на одну единицу.

Предельный доход – это изменение общего дохода в результате изменения продажи на одну единицу.

При решении экономических задач мы ставим перед собой определенную цель, которую желаем достичь.

Задача о нахождении экстремума (целевого значения) функции при соблюдении ряда условий (ограничений) носит название ***задачи оптимизации или задачи линейного программирования***.

Цель - это то, во имя чего осуществляется моделируемый производственный процесс.

Для выбора из множества возможных путей достижения цели наилучшего служит ***критерий оптимальности***, т.е. признак, по которому могут сравниваться и оцениваться варианты достижения цели. Критерий оптимальности характеризует качество решения, эффективность намечаемого пути достижения цели. В качестве критерия оптимальности обычно принимают экономическую величину, экстремальное значение которой определяют в процессе решения задачи.

Критерий оптимальности должен иметь стоимостную, натуральную или временную размерность. Критерием оптимальности могут быть: объем СМР, прибыль, приведенные затраты, производительность труда и т.д.

Математическая интерпретация критерия оптимальности задач в виде функции многих переменных носит название целевой функции.

Математические модели задач линейного программирования

Основой для решения экономических задач являются математические модели.

Математической моделью задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих суть задачи.

Составление математической модели включает: 1) выбор переменных задачи; 2) составление системы ограничений; 3) выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Обычно их записывают в виде вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Системой ограничений задачи называют совокупность уравнений и неравенств, описывающих ограниченность ресурсов в рассматриваемой задаче.

Целевой функцией задачи называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Общая задача МП формулируется следующим образом: найти переменные $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, обеспечивающие экстремум целевой функции задачи

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$$

удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \dots, l \\ \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, & i = l+1, l+2, \dots, m \end{cases}$$

Задача МП является задачей линейного программирования, если все функции, входящие в математическую модель – линейные.

В общем случае задача линейного программирования может быть записана в виде:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n = b_l \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + \dots + a_{(l+1)n}x_n \leq b_{l+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

Данная запись означает следующее: найти экстремум целевой функции и соответствующие ему переменные $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений и условиям, указанным выше.

Допустимым решением задачи линейного программирования называется любой n -мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений задачи образует **область допустимых решений** (ОДР).

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Примеры составления математических моделей задач линейного программирования

Задача использования ресурсов (сырья). Для изготовления n видов продукции используются m видов ресурсов (сырья). Известны: b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) - запасы каждого i -того вида ресурса (сырья); a_{ij} , ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) - затраты каждого i -го вида ресурса (сырья) на производство единицы объема j -го вида продукции; c_j ($j = \overline{1, n}$) - прибыль от реализации единицы объема j -го вида продукции. Требуется составить план производства продукции, который обеспечивает максимум прибыли при заданных ограничениях на ресурсы (сырье).

Решение.

Введем вектор переменных задачи $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j - объем производства j -того вида продукции. Затраты i -го вида ресурса (сырья) на изготовление данного объема x_j продукции равны $a_{ij}x_j$, поэтому ограничение на использование этого ресурса на производство всех видов продукции имеет

вид $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$. Прибыль от реализации j -го вида продукции равна c_jx_j , поэтому целевая функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$

Математическая модель имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max ,$$

[illegible]

Задача составления рациона. Для полноценного откорма каждое животное должно ежедневно получать m питательных веществ в количествах не менее $b_1, b_2, \dots, b_m$. В рацион животных входит n видов кормов. Известно a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)- содержание i -го питательного вещества в единице j -го вида корма; c_j - стоимость единицы j -го вида корма. Требуется составить суточный рацион полноценного откорма животных, обеспечивающий минимальные затраты.

Решение

Введем переменные задачи $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j - объем j -го вида корма, входящего в суточный рацион; Так как количество i -го питательного вещества, содержащегося в j -ом виде корма равно $a_{ij}x_j$, то ограничение на содержание этого питательного вещества в рационе имеет вид $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$. Так как стоимость j -го вида корма, входящего в суточный рацион равна c_jx_j , то целевая функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$

Математическая модель задачи имеет вид:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

Каноническая форма задачи линейного программирования.

1. Каноническая задача ЛП в *координатной* записи имеет вид:

Данную задачу можно записать, используя знак суммирования,

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} Z(X) = CX &\rightarrow \max (\min), \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n &= A_0, \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

В данном случае введены векторы $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$,
 $0 = (0, 0, \dots, 0)$,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3. Каноническая задача ЛП в *матричной* записи имеет вид:

$$Z(X) = CX \rightarrow \max \quad (\min) \\ AX = A_0, \quad X \geq 0$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Здесь A – матрица коэффициентов системы уравнений, X – матрица-столбец переменных задачи, A_0 – матрица-столбец правых частей системы ограничений.

Приведение общей задачи линейного программирования (ЛП) к канонической форме

В большинстве методов решения задач ЛП предполагается, что система ограничений состоит из уравнений и естественных условий неотрицательности переменных. Однако при составлении математических моделей экономических задач ограничения в основном формируются в виде системы неравенств, поэтому необходимо уметь переходить от системы неравенств к системе уравнений. Это может быть сделано следующим образом.

Возьмем, например, линейное неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$ и прибавим к его левой части некоторую величину x_{n+1} , такую, чтобы

неравенство превратилось в равенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b$. При этом данная величина $x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n$ является неотрицательной.

Если неравенство имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$, то дополнительную неотрицательную переменную x_{n+1} необходимо ввести в его левую часть со знаком минус, т.е. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - x_{n+1} = b$

Неотрицательные переменные, вводимые в ограничения неравенства для превращения их в уравнения, называются **дополнительными переменными**. Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами и поэтому не влияют на ее значение.

В том случае, когда задача имеет произвольно изменяющиеся переменные, то любую такую переменную x_j заменяют разностью двух неотрицательных переменных, т.е. $x_j = x'_j - x''_j$, где $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$.

Опорное решение задачи ЛП

Рассмотрим систему ограничений некоторой конкретной задачи

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, \quad \forall j, \end{cases}$$

которая в векторной записи имеет вид $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = A_0$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Векторы A_1, A_2, A_3, A_4 называются **векторами условий**.

Данная система имеет бесконечное множество допустимых решений, например, некоторые частные решения $X_1 = (4, 8, 1, 1)$, $X_2 = (9, 12, 1, 0)$ и базисное решение $X_3 = (7, 15, 0, 0)$

Положительным координатам допустимых решений ставят в соответствие векторы условий. Для решений X_1 и X_2 такими являются векторы A_1, A_2, A_3, A_4 и A_1, A_2, A_3 соответственно. Эти системы векторов

являются линейно зависимыми, так как число входящих в них векторов больше размерности вектора. Таких решений бесконечное множество. Базисное решение X_3 является особым решением, так как соответствующие его положительным координатам единичные векторы A_1 и A_2 линейно независимые.

Базисные решения, координаты которых удовлетворяют условию неотрицательности, являются так называемыми **опорными**.

Опорным решением задачи ЛП называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$ для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно независимые.

Очевидно, что число отличных от нуля координат любого опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). В дальнейшем будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $m = r$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m , то оно называется **невырожденным**, в противном случае (меньше m) **вырожденным**.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, соответствующие отличному от нуля координатам опорного решения.

Графический метод

Наиболее простым и наглядным методом решения задачи линейного программирования (ЗЛП) является графический метод. Он применяется при решении ЗЛП с двумя переменными, заданными в стандартном виде (т.е. система ограничений задана виде неравенств), и многими переменными, в канонической форме (т.е. система ограничений задана в виде уравнений) при условии, что $n - r \leq 2$, где n – число неизвестных системы ограничений;

r - ранг системы векторов условий. Если уравнения ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m .

Решение задачи графическим методом выполняется в два этапа: построение области допустимых решений (ОДР) и нахождение в этой области оптимального решения.

Пусть требуется найти максимальное значение функции $Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Для построения ОДР вводится на плоскости прямоугольная система координат x_1Ox_2 . Геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе линейных неравенств, образует выпуклый многоугольник. Этот многоугольник является многоугольником решений одной системы неравенств. Стороны этого многоугольника располагаются на прямых, уравнения которых получаются при замене каждого неравенства системы ограничений соответствующим уравнением. Сам многоугольник образуется в результате пересечения полуплоскостей каждой из построенных прямых

При построении области допустимых решений может встретиться один из следующих случаев: I – пустая область; II – выпуклый многоугольник и III – неограниченная выпуклая многоугольная область.

Прямая, уравнение которой получено из целевой функции задачи, при равенстве ее постоянной величине, называется *линией уровня*. Она проходит через начало координат, перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (c_1, c_2)$, где c_1, c_2 - коэффициенты перед переменными в целевой функции задачи.

Линия уровня, имеющая общие точки с ОДР и расположенная так, что ОДР целиком находится в одной из полуплоскостей, называется **опорной прямой**.

С геометрической точки зрения в ЗЛП ищется такая угловая точка или набор точек из области допустимых решений, на которой достигается самая верхняя (или самая нижняя) линия уровня, расположенная дальше (или ближе) остальных в направлении быстрого роста целевой функции. Для нахождения искомой точки используется теорема: *Значения целевой функции в точках линии уровня увеличиваются, если линию уровня перемещать параллельно начальному положению в направлении нормали и убывает при перемещении в противоположном направлении.*

Алгоритм решения задачи линейного программирования с двумя переменными графическим методом.

1. Строится область допустимых решений (ОДР).
2. Если ОДР является не пустым множеством, то строится вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$, выходящий из начала координат.
3. Перпендикулярно вектору $\vec{n}$ проводится одна из линий уровня, например, линия уровня, соответствующая уравнению $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.
4. Линия уровня перемещается параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{n}$.
5. Перемещение линии уровня происходит до тех пор, пока у нее окажется только одна общая точка с ОДР. Эта точка определяет единственное решение задачи и является точкой экстремума.
6. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

При нахождении оптимального решения задачи, возможны следующие случаи.

1) задача не имеет решения, если ОДР – пустая область (т.е. системы ограничений в области допустимых решений несовместна);

2) задача имеет оптимальное решение, если ОДР – ограниченный выпуклый многоугольник; 3) задача может иметь или не иметь решения в зависимости от направления вектора $\vec{n}$, если ОДР – неограниченная выпуклая многоугольная область.

В случае 2) - задача может иметь единственное оптимальное решение, совпадающее с одной из вершин области, и бесконечное множество решений (альтернативный оптимум), если линия уровня при своем перемещении совпадает с одной из сторон ОДР.

В случае альтернативного оптимума и ограниченной области оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка, соединяющего две вершины области. Тогда на «оптимальной» граничной прямой находят еще одно оптимальное решение $\vec{X}_2$ и далее общее оптимальное решение представляют формулой:

$$\vec{X} = (1-t)\vec{X}_1 + t\vec{X}_2, \text{ где } 0 \leq t \leq \infty$$

Тема 4. Симплексный метод решения задач линейного программирования

При количестве переменных $n > 2$ задачу ЛП решают аналитическим методом, который называется симплексным методом. Алгоритм симплекс-метода состоит в том, что, начиная с некоторого исходного *опорного решения*, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Вычисления, которые обеспечивают вычисление целевой функции и переменных, называют *итерацией*. Симплекс-метод является универсальным, так как позволяет практически решить любую задачу линейного программирования, заданную в каноническом виде. Он позволяет за конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует.

Решение задачи симплексным методом состоит из следующих этапов:

1. Найти начальное опорное решение.
2. Перейти от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному.
3. Согласно критериям, найти оптимальное решение задачи или сделать вывод об его отсутствии.

Рассмотрим каждый из них.

1. Опорное решение задачи линейного программирования

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j, \quad b_i \geq 0, \quad \forall i$$

Будем считать, что правые части всех уравнений системы ограничений неотрицательны. Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на -1 .

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$, для которого векторы условий $A_1, A_2, \dots, A_m$ (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений), соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). Будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $r = m$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m , то решение называется *невырожденным*, в противном случае (меньше m) – *вырожденным*.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, соответствующие отличным от нуля координатам опорного решения.

При нахождении начального опорного решения заполняем симплексную таблицу по данным системы ограничений и целевой функции. Симплексная таблица имеет вид:

2. Улучшение опорного решения

Начальное опорное решение необходимо проверить на оптимальность и переход от одного опорного решения к другому осуществлять таким образом, чтобы значение целевой функции увеличивалось в задаче на максимум и уменьшалось в задаче на минимум.

Оценка разложения вектора условий A_k по базису опорного решения для переменных вычисляется по формуле

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m c_i x_{ik} - c_k$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_{\bar{o}} \cdot X_k - c_k$$

и по формуле для свободного члена

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m c_i x_{ik}$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_{\bar{o}} \cdot X_k$$

где $C_{\bar{o}} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ - вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$ - вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения; c_k - коэффициент целевой функции при переменной x_k ; в формуле $C_{\bar{o}} \cdot X_k$ - скалярное произведение векторов.

Для удобства вычислений оценок коэффициенты целевой функции записываются сверху над таблицей 4.1.

Таблица 4.1

Б	$C_{\bar{o}}$	A_0	A_1	...	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_s
A_{n+1}	c_{n+1}	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	0	...	0
A_{n+2}	c_{n+2}	b_2	a_{21}	...	a_{2n}	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	0
A_s	c_s	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	0	...	1
Δ_k		Δ_0	Δ_1	...	Δ_n	0	0	...	0

Теорема. Если в задаче ЛП на максимум (минимум) хотя бы для одного вектора условий оценка по базису невырожденного опорного решения отрицательная (положительная), то опорное решение может быть улучшено, т.е. можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше (меньше).

Чтобы обеспечить наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому, векторы, выводимый из базиса и

вводимый в базис опорного решения, необходимо выбирать, исходя из условий:

в задаче на максимум

$$\max_k \{-\theta_{0k} \Delta_k\}$$

в задаче на минимум

$$\min_k \{-\theta_{0k} \Delta_k\}$$

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис, можно выбрать, исходя из условий:

в задаче на максимум

$$\min_k \{\Delta_k\}$$

в задаче на минимум

$$\max_k \{\Delta_k\}$$

3. Критерий оптимальности.

Опорное решение задачи ЛП на максимум (минимум) является *оптимальным*, если для любого вектора условий оценка разложения по базису опорного решения неотрицательная (положительная), т.е.

в задаче на максимум

$$\Delta_k \geq 0 \quad \forall k;$$

в задаче на минимум

$$\Delta_k \leq 0 \quad \forall k$$

В последней строке таблицы с оценками Δ_k значение Δ_0 есть значение целевой функции на полученном опорном решении.

В случае невыполнения критерия оптимальности, переходим к следующей симплексной таблице с целью улучшения опорного плана. Для этого выполняем следующие преобразования.

Пусть в задаче на максимум одна оценка $\Delta_k < 0$, тогда этот столбец принимаем за разрешающий. Разрешающей строкой выбираем ту, для которой выполнены условия

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ при } a_{ik} > 0$$

k – номер вектора условия A_k , вводимого в базис (номер выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а l – номер вектора A_l , выводимого из базиса (номер строки системы, в которой следует выбирать разрешающий элемент). Элемент $a_{lk} \neq 0$, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки, называется разрешающим элементом.

Заполняем симплексную таблицу следующего шага:

1. Все числа в разрешающей строке делим на разрешающий элемент $a_{lk} \neq 0$;
2. Все числа в разрешающем столбце, кроме самого разрешающего элемента a_{lk} , заменяем нулями;
3. Остальные коэффициенты и свободные члены определяются по так называемому «правилу прямоугольника».

Рассмотрим 4 элемента матрицы A :

a_{lk} – разрешающий элемент матрицы. Тогда все остальные элементы находятся по формулам:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{lk} - a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{lk}}, \quad b'_i = \frac{b_i \cdot a_{lk} - a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}},$$

если $i \neq l$

Получаем новое опорное решение, которое снова проверяем на оптимальность.

Оптимальное решение задачи является *единственным*, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$$

Здесь предполагается, что первые m векторов входят в базис оптимального решения.

Задача ЛП имеет *бесконечное множество* оптимальных решений, если при оптимальном решении оценка хотя бы одного вектора условий, не входящего в базис, равна нулю, т.е.

$$\exists k \in \{m+1, m+2, \dots, n\} : \Delta_k = 0$$

Задача ЛП *не имеет решения* ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условий A_k с оценкой Δ_k выполняется:

в задаче на максимум

$$\exists A_k : \Delta_k < 0 \quad \text{и} \quad x_{ik} \leq 0 \quad \forall i$$

в задаче на минимум

$$\exists A_k : \Delta_k > 0 \quad \text{и} \quad x_{ik} \leq 0 \quad \forall i$$

4. Алгоритм решения задачи симплексным методом

1. Привести задачу к каноническому виду.
2. Найти начальное опорное решение с базисом единичных векторов и коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения. Если опорное решение отсутствует, задача не имеет решения в виду несовместности системы ограничений.
3. Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора найти все оптимальные решения.

6. Если имеют место условия неограниченности целевой функции, то задача не имеет решения.

Если алгоритм не выполняется, найти новое опорное решение и перейти к пункту 3.

Пример.

Участок цеха изготавливает три вида запасных деталей, проходящих обработку на двух станках – токарном и фрезерном. Затраты времени в часах на каждую деталь на токарном станке соответственно равны 2; 1; 2; на фрезерном – 5; 2; 2. Мощность токарного станка 30ч., фрезерного 70 ч. Детали реализуются по следующей цене: I вида – 7 руб., II вида – 3 руб. и III вида – 3 руб. за одну деталь. Найти план выпуска деталей, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение:

1. Составим экономико-математическую модель задачи

а) Вводим переменные:

Пусть $\bar{x} = x_1, x_2, x_3$ - количество единиц запасных деталей 1-го, 2-го и 3-го видов.

б) Составляем функцию цели:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$7x_1 + 3x_2 + 3x_3$ - размер прибыли от производства запасных деталей всех видов.

в) Составляем ограничения.

Функциональные ограничения (по времени работы оборудования):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

В левой части ограничений $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ - расход ресурса i -го вида на производство всей продукции; в левой части ограничений – запас сырья i -го вида.

Получаем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 70 \end{cases}$$

Т.к. количество деталей не может быть отрицательным числом, то имеем прямое ограничение:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Таким образом, имеем задачу линейного программирования:

Найти вектор переменных $\bar{x} = x_1, x_2, x_3$, при котором значений функции цели $f(\bar{x}) = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3$ достигает максимального значения, при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 70 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Найдем решение задачи симплексным методом

Шаг 1. Приводим задачу к каноническому виду

Канонический вид записи модели означает, что система функциональных ограничений состоит только из уравнений с неотрицательной правой частью. В левые части неравенств вводим неотрицательные добавочные переменные x_4, x_5 со знаком «+» (т.к. знак неравенства $\leq$):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 70 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Находим 1-е базисное решение

Переменные x_4, x_5 берем за основные, переменные x_1, x_2, x_3 будут неосновные.

Первое допустимое базисное решение:

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} x_1, x_2, x_3 = 0 \\ x_4 = 30 \\ x_5 = 70 \end{cases}$$

Значение функции цели:

$$f(\bar{x}_1) = 0$$

Дальнейшее решение оформляем в симплексные таблицы.

c_i - коэффициенты при основных переменных в функции цели $f(\bar{x})$;

c_j - коэффициенты при переменных функции цели.

Перейдем к построению симплексной таблицы 4.2.

Таблица 4.2

Симплексная таблица

№	Базис	c_i / c_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ
			7	3	3	0	0		
←	x_4	0	2	1	2	1	0	30	15
	x_5	0	5	2	2	0	1	70	14
$\Delta_j =$			-7	-3	-3	0	0	$f(x) =$	0
←	x_4	0	0	0,2	1,2	1	-0,4	2	10
→	x_1	7	1	0,4	0,4	0	0,2	14	35
$\Delta_j =$			0	-0,2	-0,2	0	1,4	$f(x) =$	98
→	x_2	3	0	1	6	5	-2	10	
	x_1	7	1	0	-2	-2	1	10	
$\Delta_j =$			0	0	1	1	1	$f(x) =$	100

Шаг 3. Проверка первого опорного решения на оптимальность

Для этого находим оценки переменных Δ_j .

Оценки переменных входящих в базис равны 0, т.е. $\Delta_4, \Delta_5 = 0$

Оценки остальных переменных находим по формуле:

$$\Delta_j = \sum c_i \cdot a_{ij} - c_j, \text{ где}$$

a_{ij} - координаты вектора.

Получаем,

$$\Delta_1 = -7, \Delta_2 = -3, \Delta_3 = -3$$

Критерий оптимальности задачи на максимум - все $\Delta_j \geq 0$.

Первое опорное решение не является оптимальным, т.к. есть отрицательные оценки переменных.

Шаг 4. Находим второе базисное решение.

Переменную с наибольшей отрицательной оценкой вводим в базис, т.е. переменную x_1 . Выделяем в симплексной таблице координаты этой переменной.

Находим переменную, которую надо вывести из базиса. Для этого рассчитываем величину Θ по формуле:

$$\Theta = \min \Theta_i = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} \quad a_{ik} > 0, \text{ где}$$

b_i - значение основной переменной опорного решения (план).

a_{ik} - координаты переменной, вводимой в базис (выделенные координаты).

Получаем:

$$\Theta = \min \left\{ \frac{30}{2}; \frac{70}{5} \right\} = \{15; 14\} = 14$$

Переменная x_5 выходит из базисного (опорного) плана, становится неосновной переменной;

Заполняем координаты переменных.

Находим элементы той строки, которая была направляющей в предыдущей таблице (2-я строка) путем деления этой строки на направляющий (главный) элемент.

Элементы 1-й строки находим по правилу «прямоугольника».

Получили второе базисное решение:

$$\overline{x_2} = \begin{cases} x_2, x_3, x_5 = 0 \\ x_1 = 14 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Находим значение функции цели по найденному опорному плану:

$$f(\overline{x_2}) = 7 \cdot 14 = 98$$

Значение функции цели выросло, следовательно, нашли улучшенное решение.

Шаг 5. Проверка второго опорного решения на оптимальность

Находим оценки переменных по формуле:

$$\Delta_j = \sum c_i \cdot a_{ij} - c_j$$

Получаем: $\Delta_2 = -0,2$, $\Delta_3 = -0,2$, $\Delta_5 = 1,4$.

Решение является оптимальным, т.к. нет отрицательных оценок свободных клеток, все $\Delta_j \geq 0$.

Решение НЕ является оптимальным, т.к. есть отрицательная оценка переменной.

Шаг 6. Находим третье базисное решение.

Переменную с отрицательной оценкой вводим в базис, т.е. переменную x_2 . Выделяем в симплексной таблице координаты этой переменной.

Находим переменную, которую надо вывести из базис:

$$\Theta = \min \left\{ \frac{2}{0,2}; \frac{14}{0,4} \right\} = 10$$

Переменная x_4 выходит из базисного (опорного) плана, становится неосновной переменной;

Заполняем координаты переменных.

Находим элементы той строки, которая была направляющей в предыдущей таблице (1-я строка) путем деления этой строки на направляющий (главный) элемент.

Элементы 2-й строки находим по правилу «прямоугольника».

Получили третье базисное решение:

$$\bar{x}_3 = \begin{cases} x_3, x_4, x_5 = 0 \\ x_1 = 10 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Находим значение функции цели по найденному опорному плану:

$$f(\bar{x}_3) = 7 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 100$$

Значение функции цели выросло, следовательно, нашли улучшенное решение.

Шаг 7. Проверка третьего опорного решения на оптимальность

Находим оценки переменных по формуле $\Delta_j = \sum c_i \cdot a_{ij} - c_j$

Получаем: $\Delta_3 = 1, \Delta_4 = 1, \Delta_5 = 1$.

Решение является оптимальным, т.к. нет отрицательных оценок свободных клеток, все $\Delta_j \geq 0$.

Ответ: $\max f(\bar{x}) = 100$ при $x_1 = 10, x_2 = 10$.

Экономический смысл: Максимальную прибыль от реализации запасных деталей в 100 руб. участок цеха сможет получить, если будет выпускать 10 единиц деталей 1-го вида и 10 единиц деталей 2-го вида, а детали 3-го вида не выпуска совсем.

Экономический смысл добавочных переменных x_4, x_5 - неизрасходованные остатки ресурсов.

$x_4, x_5 = 0$ - мощности токарного и фрезерного станков используются в оптимальном плане полностью.

Тема 5. Теория двойственности

Виды математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

Рассмотрим конкретный пример.

Задача 1.

Из двух сортов бензина образуются для различных целей две смеси А и В. Смесь А содержит 60% бензина I сорта и 40% II сорта; смесь В содержит 80% I и 20% II сорта бензина. Продажная цена 1 кг смеси А – 10 руб., 1 кг смеси В – 12 руб. Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50т бензина I сорта и 30т бензина II сорта.

Решение.

Обозначим через x_1 количество тонн смеси А, а через x_2 – количество тонн смеси В, образование которых должно принести максимальный доход.

Так как одна тона смеси реализуется за 1000 руб., то x_1 тонн дадут прибыль, равную $1000 x_1$ руб. Так как одна тонна смеси В реализуется за 1200 руб., то x_2 тонн дадут прибыль, равную $1200 x_2$ руб. Таким образом, требуется найти максимум общей прибыли, т.е. максимизировать линейную функцию $Z = 1000x_1 + 1200x_2$.

Составим систему ограничений задачи. Количество бензина I сорта, идущего на образование смесей А и В не должно превышать 50 т. Аналогично,

количество бензина II сорта, поступающего в эти смеси, не должно превышать 30 т. На каждую тонну смеси А идет 0,6 т (60%) бензина I сорта, тогда на x_1 т пойдет $0,6 x_1$ т I сорта. Аналогично на x_2 т смеси В уходит $0,8 x_2$ т бензина I сорта.. Следовательно, должно быть

$$0,6x_1 + 0,8x_2 \leq 50$$

Рассуждая также, имеем, что расход бензина II сорта должен удовлетворять неравенству:

$$0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 30$$

Количество тонн смеси x_1 и x_2 не должны быть отрицательными. Таким образом, экономико-математическая модель задачи имеет вид:
 $Z = 1000x_1 + 1200x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,8x_2 \leq 50 \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Можно показать, что максимальный доход будет получен, если образовать 70 т смеси А и 10 т смеси В. При таком плане образования смесей общая сумма реализации составит

$$Z = 1000 \cdot 70 + 1200 \cdot 10 = 82000 \text{ руб.}$$

Задача 2.

Предположим теперь, что предприятие, занимающееся составлением смесей, имеет возможность продать бензин, не составляя их. Естественно, оно желает выручить за бензин не меньше той суммы, которую оно получило бы при образовании смесей.

С другой стороны, покупатель бензина заинтересован в том, чтобы уплатить за него как можно меньше. Возникает вопрос: по какой цене следует реализовать бензин?

Пусть y_1 представляет собой некоторую оценку бензина I сорта, а y_2 — II сорта, например, цену одной тонны бензина. Так как смесь А содержит 60% бензина I сорта и 40 % бензина II сорта, то цена одной тонны смеси А равна $0,6y_1 + 0,4y_2$. Так как предприятие, реализующее бензин, заинтересовано в

максимальной выручке, то эта цена должна быть не менее 1000 руб (цена 1 т смеси А). Таким образом, мы получаем неравенство $0,6y_1 + 0,4y_2 \geq 1000$. Рассуждая аналогично относительно оценки или цены одной тонны смеси В, получим, что она равна $0,8y_1 + 0,2y_2$ и поскольку она должна быть не меньше 1200 руб., то получаем неравенство $0,8y_1 + 0,2y_2 \geq 1200$. При выполнении этих двух неравенств реализация всего бензина принесет предприятию доход, не меньший того который оно получило бы при продаже смесей.

С другой стороны, покупатель бензина заинтересован в том, чтобы потратить на его приобретение как можно меньше денег, т.е. цена всего бензина, равная $50y_1 + 30y_2$ должна быть минимальная.

В результате мы получили следующую экономико-математическую модель задачи:

$$F(y) = 50y_1 + 30y_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} 0,6y_1 + 0,2y_2 \geq 1000 \\ 0,8y_1 + 0,2y_2 \geq 1200 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Решением этой задачи является значение: $y_1 = 1400, y_2 = 400$. При этом линейная форма принимает значение: $F_{\min} = 50 \cdot 1400 + 30 \cdot 400 = 82000$ руб.

Запишем обе задачи рядом.

Задача 1.

$$Z(x) = 1000x_1 + 1200x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,8x_2 \leq 50 \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 2.

$$F(y) = 50y_1 + 30y_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0,6y_1 + 0,2y_2 \geq 1000 \\ 0,8y_1 + 0,2y_2 \geq 1200 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили пару двойственных задач.

Рассмотренные исходная и двойственная задачи могут быть экономически интерпретированы следующим образом. Если исходная задача заключается в установлении плана выпуска продукции, максимизирующего

общий доход производства при заданных ограниченных ресурсах, то двойственная задача заключается в установлении оптимальных цен, входящих в состав продукции компонентов, обеспечивающих необходимую сумму реализации от единицы продукции и минимизирующих стоимость производственных ресурсов.

Алгоритм составления двойственных задач

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.

2. Если в исходной задаче ищется максимум целевой функции $Z(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, то знаки ограничений-неравенств должны иметь вид $\leq$, если же ищется минимум – то иметь вид $\geq$. Неравенства, в которых это требование не выполняется, умножают на « - 1 ».

3. Выписывают матрицу A коэффициентов при переменных исходной задачи, полученных после преобразования п.2, и составляют матрицу A' , транспонированную относительно матрицы A .

4. Составляют систему ограничений двойственной задачи, взяв в качестве коэффициентов при переменных элементы матрицы A' , а в качестве свободных членов – коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи, и записывают неравенства противоположного смысла по сравнению с неравенствами, полученными в п. 2.

5. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению – неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности а неизвестное, отвечающее ограничению – равенству, может быть любого знака.

6. Целевая функция двойственной задачи имеет вид $F(y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$, где c_0 – свободный член целевой функции $Z(x)$ исходной задачи, $b_i, i = \overline{1, m}$ – свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения исходной

задачи, которому соответствует неизвестная y_i , а $y_1, y_2, \dots, y_m$ - неизвестные в двойственной задаче.

7. Максимум целевой функции исходной задачи заменяется на минимум целевой функции двойственной задачи .

8. Записывают условие неотрицательности переменных двойственной задачи.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным выше условиям, называются симметричными взаимно двойственными задачами, причем любую из них можно рассматривать как исходную, тогда другая окажется двойственной ей. Этот факт позволяет выбирать для решения более легкую форму задачи. Если, например, исходная задача содержит большое количество строк (т.е. решение ее достаточно трудоемко), то решение двойственной может значительно снизить объем выполняемой работы. В это состоит практическая значимость двойственных задач.

Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи. Они различаются по способу задания ограничений на переменные в исходной задаче.

В *симметричных двойственных задачах* ограничения на переменные, как в исходной, так и в двойственной к ней, задаются в виде неравенств. Тогда и переменные обеих задач могут принимать только неотрицательные значения.

В *несимметричных двойственных задачах* система ограничений исходной задачи состоит из уравнений, а двойственной – из неравенств. А сами переменные двойственной задачи могут быть любого знака.

В *смешанных двойственных задачах*, когда ограничения на переменные задаются в виде неравенств и уравнений, условия неотрицательности на переменные двойственной задачи накладываются лишь на те переменные, которые соответствуют ограничениям-неравенствам исходной задачи. На переменные, которые отвечают ограничениям- уравнениям исходной задачи, никаких ограничений в двойственной задаче не налагается.

Прямая и двойственная задачи ЛП связаны между собой теоремами двойственности.

Теорема 1. (Первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.*

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема 2. (Вторая теорема двойственности). *Для того, чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений, i – тое ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i – тая координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i – тая координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i – тое ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Экономический смысл переменных двойственной задачи

Величину y_i считают некоторой характеристикой ценности i – го ресурса. В частности, при увеличении i – го ресурса на единицу, оптимальный доход возрастает на y_i , что позволяет рассматривать y_i как «условную цену», оценку единицы i – го ресурса, объективно обусловленную оценку.

Пусть оптимальное значение некоторой переменной двойственной задачи строго положительно, т.е. $y_i > 0$. Тогда из условия второй теоремы двойственности, получим:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

Экономически это означает, что если объективно обусловленная оценка некоторого ресурса больше нуля, то этот ресурс полностью (без остатка) расходуется в процессе выполнения оптимального плана. Это означает, что незначительному увеличению i -го ресурса будет соответствовать значительное увеличение оптимального дохода, и ценность ресурса в этом случае велика.

Пусть для оптимального значения некоторой переменной x_j исходной задачи выполняется неравенство $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$. Тогда из этого же условия следует, что $y_i = 0$.

Экономически это означает, что если в оптимальном плане какой-то ресурс используется не полностью, то его объективно обусловленная оценка равна нулю. Действительно, ресурс, запасы которого превышают потребности в нем, не представляют ценности для производства и его оценку можно принять равной нулю.

Поставим вопрос, как оценить относительную стоимость сырья с точки зрения максимальной прибыли при изменении запасов сырья. Очевидно, что ценность того или иного вида сырья определяется величиной роста наибольшей прибыли при увеличении запаса сырья i -го вида. Другими словами, как изменится величина $Z_{\max}$, если в исходной задаче увеличить свободный член b_i в i -м ограничении- неравенстве на величину Δb_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Величина $Z_{\max}$, рассматриваемая теперь как функция

переменных $b_1, b_2, \dots, b_m$, получит приращение $\Delta Z_{\max}$, которое находится по формуле

$$\Delta Z_{\max} = y_i \Delta b_i$$

где y_i — компонента оптимального решения двойственной задачи.

Иногда ставится задача о включении в план производства новых видов продукции. Оценка такого включения находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{onmi} - c_j$$

Если $\Delta_j < 0$, то прибыль превышает затраты и, следовательно, новый вид продукции улучшает план.

При $\Delta_j > 0$ затраты производства превысят прибыль и в этом случае новый вид продукции включать нецелесообразно.

Покажем сказанное на конкретном примере.

Пример.

Для производства трех изделий А, В и С используются три вида сырья. Каждый из видов сырья используется в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Вид сырья	Норма затрат сырья на одно изделие, кг		
	А	В	С
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена изделия, ден. ед.	10	14	12

1. Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода.

2. Составить для данной задачи двойственную и найти следующие решения:

- 1) оптимальный план двойственной задачи;

- 2) увеличение максимального дохода при увеличении количества сырья 2-го и 3-го видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья 1-го вида на 40 кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений;
- 3) целесообразность введения в план производства 4-го изделия, нормы затрат сырья на изделие которого составляют 1, 4 и 6 кг, а цена изделия равна 18 ден.ед.

Решение.

1. Обозначим через x_1, x_2, x_3 план производства изделий А, В и С соответственно. Тогда математическая модель задачи примет вид:
 $Z(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$

Таблица 5.2

Б	С _б	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
A ₂	14	83	2,375	1	0	0,625	0	-0,125
A ₅	0	85	2,875	0	0	0,125	1	-0,625
A ₃	12	14	-0,75	0	1	-0,25	0	0,25
Δк		1330	14,25	0	0	5,75	0	1,25

при ограничениях $\bar{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 236 \end{cases}$$

Решаем исходную задачу симплексным методом. Последняя таблица (таблица 5.2) будет иметь вид:

Из таблицы следует, что $\max Z(x) = 1330$ ден.ед. при оптимальном решении $X^* = (0, 83, 14, 0, 85, 0)$

Первые три компоненты этого решения показывают оптимальный план выпуска продукции, а последние три - остатки сырья видов I, II, III.

2. 1). Составим для данной задачи двойственную задачу:

$$F(y) = 180y_1 + 210y_2 + 236y_3 \rightarrow \min \text{ при ограничении } \bar{y} \geq 0 \text{ и}$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12 \end{cases}$$

Согласно теоремам двойственности $\min F(y) = 1330$ усл. ед. при

$$Y^* = (5,75; 0; 1,25)$$

Равенство нулю переменной y_2 в оптимальном решении означает, что переменная x_5 положительна в оптимальном решении исходной задачи, т.е. подстановка компонент оптимального решения во второе неравенство системы ограничений исходной задачи не обращает его в строгое равенство.

Переменные y_1, y_3 положительны, а соответствующие им переменные исходной задачи x_4, x_6 равны нулю в оптимальном решении исходной задачи.

Подстановка компонент оптимального решения в первое и третье неравенства исходной задачи обращает их в строгие равенства.

Экономический смысл этого факта состоит в том, что сырьё вида II имеется с избытком (85 единиц останутся неизрасходованными), поэтому для него дается нулевая оценка. Сырьё же вида I и III расходуется полностью, т.е. оно является дефицитным, поэтому эти виды сырья оцениваются некоторыми положительными оценками ($y_1 = 5,75; y_3 = 1,25$).

2). Изменение количества сырья согласно условиям задачи на $-40, +80, +160$ кг приводят к ограничению запаса сырья до $140, 290$ и 396 кг соответственно.

Раздельное их влияние на прибыль найдем по формуле:

$$\Delta Z_{\max} = y_i \Delta b_i.$$

$$\Delta Z_1 = y_1 \Delta b_1 = 5,75 \cdot (-40) = -230,$$

$$\Delta Z_2 = y_2 \Delta b_2 = 0 \cdot 80 = 0,$$

$$\Delta Z_3 = y_3 \Delta b_3 = 1,25 \cdot 160 = 200$$

Суммарное влияние на прибыль равно:

$$\Delta Z_{\max} = \Delta Z_1 + \Delta Z_2 + \Delta Z_3 = -230 + 0 + 200 = -30$$

Решая исходную задачу симплексным методом с измененными правыми частями ограничений неравенств:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 290 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 396 \end{cases}$$

получим, что при измененном условии максимальная прибыль равна $\max Z(x) = 1300$ ден. ед при $X^* = (0, 38, 64, 0, 60, 0)$

3) Для оценки целесообразности введения в план производства четвертого вида изделия используем формулу:

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^4 a_{ij} y_{onmi} - c_4 = 1 \cdot 5,75 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1,25 - 18 = -4,75.$$

Так как $\Delta_4 < 0$, то новый вид продукции улучшает план, т.е. прибыль будет превышать затраты, то введение в план производства четвертого вида изделия целесообразно.

Решая исходную задачу с измененным условием, (проверить самостоятельно), получим:

$$\max Z(x) = 1383,2 \text{ ден. ед. при } X^* = (0; 84,4; 0; 11,2; 0; 80,8; 0)$$

Тема 6. Транспортная задача

При решении вопросов о выборе наиболее оптимальной схемы прикрепления транспортировки продукции используются модели транспортного типа.

Математическая модель транспортной задачи

Формулируется следующим образом: однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \dots, a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, \dots, b_n$. Известны c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) - стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи записываются или в таблице следующего вида (таблица 6.1)

Таблица 6.1

a_i / b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

или в виде матриц: $a_i = (a_1; a_2; \dots; a_m)$ - матрица поставщиков груза;

$b_j = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ матрица потребителей груза и

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица стоимости}$$

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) - объемы перевозок от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$$

Целевая функция задачи выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех поставщиков вывозятся полностью.

Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей.

Неравенства являются условиями неотрицательности всех переменных задачи.

Таким образом, математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем:

Найти переменные задачи $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1, 2, \dots, m}$; $j = \overline{1, 2, \dots, n}$ удовлетворяющие системе ограничений, условиям неотрицательности и обеспечивающие минимум целевой функции.

В рассмотренной модели ТЗ предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*. Если же равенство не выполняется, то задача называется задачей с *неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

Теорема. Для того, чтобы ТЗ линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей (равенство), т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Задача 1. Составить математическую модель ТЗ, исходные данные которой таковы – таблица 6.2.

Таблица 6.2.

a_i/b_j	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

Решение.

Введем переменные задачи (матрицу перевозок)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу стоимостей $C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матриц С и Х:

$$Z(x) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X – запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью. Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2; \quad j=1,2,3$$

Ответ: математическая модель задачи формулируется следующим образом:

Найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции

$$Z(x) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$

$$x_{11} + x_{21} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

и условиям неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2; \quad j=1,2,3.$$

Любое решение ТЗ называется *распределением поставок*. Так как поставки не могут быть отрицательными, то речь идет только о допустимых решениях. Оптимальному решению транспортной задачи соответствует оптимальное распределение поставок, при котором целевая функция

достигает своего минимума. В ходе решения задачи и нужно получить это оптимальное распределение поставок, которому соответствует какое-то допустимое базисное решение системы ограничений.

При распределительном методе решения транспортной задачи последовательно используются расчетные таблицы, соответствующие тому или иному шагу решения. Каждая таблица включает определенное распределение поставок. Так как распределение поставок должно соответствовать базисному решению, то и клетки таблицы должны соответствовать основным (положительным) и неосновным (равным нулю) переменным. На практике это сводится к тому, что в клетке, соответствующей основным переменным, записывают поставки, а клетки, которым соответствуют неосновные, т.е. равные нулю, переменные, остаются не заполненными (свободными).

Замечание. Условимся использовать следующий способ заполнения клеток: в верхнем правом углу записываем показатель затрат, а в нижнем левом – поставки.

Число заполненных клеток определяется числом переменных системы ограничений, а последнее равно числу линейно независимых уравнений системы.

Решение ТЗ состоит в переходе от одного распределения поставок к другому распределению, от одной таблицы к другой. Новое распределение поставок должно снижать или по крайней мере не увеличивать общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

Чтобы осуществить переход от одного распределения поставок к другому, нужно иметь исходное (первоначальное) распределение поставок.

Первоначальное распределение поставок.

Рассмотрим задачи, которые имеют закрытую модель, т.е. выполняется равенство.

Опорным решением ТЗ называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Прежде чем начать заполнение клеток таблицы поставками, нужно установить число таких клеток. Так как ранг системы векторов условий ТЗ равен $N = m + n - 1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат больше, чем N . Отсюда следует, что число заполненных клеток равно $N = m + n - 1$

Рассмотрим один из методов получения первоначального распределения поставок.

Метод минимальной стоимости. Данный метод позволяет построить опорное решение, которое достаточно близко к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = (c_{ij})$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. Он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы. Клетку, соответствующую $\min_{i,j} \{c_{ij}\}$ заполняют исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы заканчиваются. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от него требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль (0^*) и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично поступают с потребителем.

Пример.

Используя метод минимальной стоимости построить начальное опорное, решение ТЗ, исходные данные которой представлены в таблице 6.3.

Таблица 6.3.

	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

Решение.

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{14} = 1$. Это стоимость перевозки груза от первого поставщика четвертому потребителю. В соответствующую клетку (1, 4) записываем максимально возможную перевозку $x_{14} = \min \{a_1, b_4\} = 200$. Запасы первого поставщика и запросы четвертого потребителя удовлетворены полностью. Исключаем их из рассмотрения. В оставшейся части матрицы C наименьшей является стоимость $c_{31} = 2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от третьего поставщика к первому потребителю равна $x_{31} = \min \{400, 250\} = 250$. В соответствующую клетку таблицы записываем перевозку $x_{31} = 250$. Запросы первого потребителя исчерпаны, исключаем его из рассмотрения. Запасы первого поставщика уменьшаем на 250, $a_3' = 400 - 250 = 150$. В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $c_{32} = 3$. Заполняем клетку (3,2) $x_{32} = \min \{150, 300\} = 150$. Запасы первого поставщика исчерпаны, вычеркиваем его из рассмотрения. Запросы второго потребителя уменьшаем на 150, $b_2' = 300 - 150 = 150$. В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $c_{23} = 6$. Заполняем клетку (2,3) $x_{23} = \min \{350, 200\} = 200$. Запросы третьего потребителя исчерпаны, вычеркиваем его из рассмотрения. Запасы второго поставщика уменьшаем на 200, $a_2' = 350 - 200 = 150$. В матрице C остался единственный элемент $c_{22} = 10$.

Записываем в клетку таблицы (2,2) перевозку $x_{22} = 150$. Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы должно быть равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Однако у нас число заполненных клеток равно 5, поэтому базисный нуль записываем в клетку (1, 3).

В результате получим первое опорное решение – таблица 6.4.

Таблица 6.4.

	250	300	200	200
200	9	8	3 0*	1 200
350	7	10 150	6 200	4
400	2 250	3 150	8	12

Посчитаем суммарные затраты по составленному опорному решению:

$$Z(X) = 1 \cdot 200 + 10 \cdot 150 + 6 \cdot 200 + 2 \cdot 250 + 3 \cdot 150 = 3850 .$$

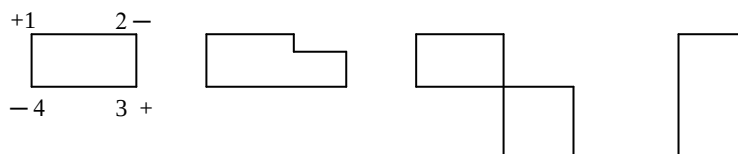
Переход от одного опорного решения к другому.

В ТЗ переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла.

***Циклом** называется замкнутый многоугольник (вообще говоря, не выпуклый), сторонами которого являются горизонтальные и вертикальные отрезки, одна вершина которого совпадает со свободной клеткой, для которой образуется цикл, а все остальные – с заполненными клетками.*

Если распределение в таблице таково, что заполнено ровно $m + n - 1$ клеток, то для каждой свободной клетки можно построить цикл, и притом, единственный. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок (осуществляется сдвиг по циклу). Перевозка «загружается» в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток. Получается новое опорное решение.

Для удобства вычислений вершины циклов нумеруют и отмечают нечетные знаком «+», а четные – знаком «-». Такой цикл называется *отмеченным*. Циклы могут иметь вид:



При перераспределении поставки по циклу она прибавляется ко всем поставкам нечетных клеток и вычитается из всех поставок четных клеток. При этом число заполненных клеток (число основных переменных) должно сохраняться. В результате перераспределения поставок будет освобождаться клетка с четным номером, имеющая наименьшую поставку. Выбор наименьшей поставки обусловлен тем, что все поставки должны быть неотрицательными.

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», и уменьшение объемов перевозок на ту же величину θ во всех четных клетках, отмеченных знаком «-».

Целью передачи поставки в свободную клетку является уменьшение стоимости затрат, т.е. следующая таблица должна приводить к более оптимальному значению целевой функции. Но как определить наиболее выгодную в этом отношении свободную клетку?

Широко распространенным методом решения ТЗ является метод потенциалов.

Метод потенциалов

Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i = \overline{1, m}$ и потребителей v_j , $j = \overline{1, n}$,

удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

Первая группа равенств используется как система уравнений для нахождения потенциалов $m+n$ неизвестных $u_i, i = \overline{1, m}$ и $v_j, j = \overline{1, n}$. Число уравнений системы, как и число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения, равно $m+n-1$. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одной из них можно задать значение произвольно, а остальные найти из системы.

Вторая группа неравенств используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобнее представить в следующем виде:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0 \text{ при } x_{ij} = 0$$

Числа Δ_{ij} называются **оценками** для свободных клеток таблицы транспортной задачи.

Критерий оптимальности: опорное решение является оптимальным, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительные, т.е. $\Delta_{ij} \leq 0$.

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются при улучшения опорного решения. Для этого находят клетку (l, k) таблицы, соответствующую $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \leq 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки и строят ЦИКЛ и улучшают решение, перераспределяя груз $\theta = \min_{\text{„-“}} \{x_{ij}\}$ по этому циклу.

Особенности решения ТЗ с неправильным балансом

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то необходимо ввести фиктивного $(n+1)$ -го

потребителя с запросами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{i(n+1)} = 0, \forall i$

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то необходимо ввести фиктивного $(m+1)$ -го поставщика с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j} = 0, \forall j$.

3. При составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Построить начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или методом северо-западного угла), проверить правильность его построения по количеству занятых клеток (их должно быть $m+n-1$).

3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$, которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одному из потенциалов

(обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам:

$$u_i = c_{ij} - v_j \text{ при } x_{ij} > 0$$

или

$$v_j = c_{ij} - u_i \text{ при } x_{ij} > 0$$

если известны потенциалы v_j или u_i соответственно.

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

5. Перейти к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{\text{«-»}} \{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{\text{«-»}} \{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$.

Далее перейти к пункту 3.

Задача. Решить транспортную задачу, исходные данные которой представлены в таблице 6.5.

Таблица 6.5.

	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

Решение.

1. Проверяем: $\sum_{i=1}^3 a_i = 200 + 300 + 500 = 1000$;

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100$$

Задача с неправильным балансом. Вводим четвертого фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза.

2. Находим начальное опорное решение (таблица 6.6) методом минимальной стоимости. Полученное решение X_1 имеет $m+n-1=4+4-1=7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении:

$$Z(X_1) = 200 + 400 + 300 + 700 + 2700 + 1200 + 0 \cdot = 5300$$

Таблица 6.6.

	200	200	300	400
200	4	3	2	1
200				200
300	2	3	5	6
300	200	100		
500	6	7	9	12
500		100	300	100
	0	0	0	0

100				100
-----	--	--	--	-----

3. Для проверки опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$).

Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$u_1 + v_4 = 1; u_2 + v_1 = 2;$$

$$u_2 + v_2 = 3; \quad u_3 + v_2 = 7; \quad u_3 + v_3 = 9; \quad u_3 + v_4 = 12; \quad u_4 + v_4 = 1$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одной из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_3 = 0$. Остальные потенциалы находят однозначно:

$$u_3 = 0; \quad v_2 = 7 - u_3 = 7; \quad v_3 = 9 - u_3 = 9; \quad v_4 = 12 - u_3 = 12;$$

$$u_1 = 1 - v_4 = -11; \quad u_4 = 0 - v_4 = -12; \quad u_2 = 3 - v_2 = -4; \quad v_1 = 2 - u_2 = 6$$

Значения потенциалов записываем в таблицу 6.7. рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей.

Таблица 6.7

	200	200	300	400	u_i
200	— 4	— 3	— 2	200 1	-11
300	200 2	100 «—» 3	0 5	2 «+» 6	-4
500	0 6	100 «+» 7	300 9	100 «-» 12	0
100	— 0	— 0	— 0	100 0	-12
v_j	6	7	9	12	

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9 < 0; \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4 < 0; \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2 > 0; \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0;$$

$$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6 < 0; \Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5 < 0;$$

$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3 < 0$$

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «—».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительная оценка $\Delta_{24} = 2$.

5. Переходим к новому опорному решению. Для клетки (2,4) с положительной оценкой строим цикл: (2,4), (3,4), (3,2), (2,2). В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «—», начиная с клетки (2,4). Определяем величину груза θ , перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «—»: $\theta = \min_{“-”} \{100, 100\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу таблица 6.8. на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 :

Таблица 6.8.

	200	200	300	400	u_i
200	— 4	— 3	— 2	200 1	— 5
300	200 2	0* 3	0 5	100 6	0
500	0 6	200 7	300 9	— 12	— 4
100	— 0	— 0	— 0	100 0	— 6
v_j	2	3	5	6	

Находим для этого решения потенциалы (они приведены в таблице).

Вычисляем оценки:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -7 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -5 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -2 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0;$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -2 < 0;$$

$$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -4 < 0;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -3 < 0;$$

$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1 < 0.$$

Все оценки неположительные. Следовательно, решение является оптимальным. Вычисляем значение целевой функции на этом решении:

$$Z(X_2) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200$$

$$\text{Ответ: при } X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$$

Применение транспортных моделей в экономических задачах

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих отношения к транспортировке грузов. В этом случае величины тарифов c_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной задачи.

1. Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них величина c_{ij} является производительностью. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождения минимума, то значения c_{ij} берутся с отрицательным знаком.

2. Оптимальные назначения или проблема выбора. Имеется m механизмов, которые могут выполнять n различных работ с производительностью c_{ij} . Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности.

3. Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.

4. Увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега, сокращение которого позволит уменьшить количество автомобилей для перевозок за счет увеличения их производительности.

5. Решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости.

Пример.

Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющих в количествах 60, 30, 45, 25 между пятью видами работ; потребности в специалистах для каждого вида работы соответственно равны 20, 40, 25, 45 и 30; матрица

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе. Составить распределение специалистов между работами, чтобы эффективность их использования была наибольшей.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом решения закрытой транспортной задачи. При этом под тарифом будем понимать использование специалистов по виду работ.

Так как в задаче требуется найти максимум, а согласно алгоритму транспортной задачи находится минимум, тарифы будем брать с отрицательным знаком. Составим таблицу 6.9.

Таблица 6.9.

a_i/b_j		1	2	3	4	5	u_i
		20	40	25	45	30	
1	60	-7 20	-5 40	-2	0	-4 0^*	0
2	30	-4	0	-8 25	-6	-3 5	1
3	45	-5	-7	0	-9 45	-8 0^*	-4
4	25	-6	-4	-5	-7	-6 25	-2
v_j		-7	-5	-9	-5	-4	

Так как $m+n-1=8$, а число занятых клеток равно 6, то для исключения вырожденности введем в клетки (1, 5) и (3, 5) нулевые поставки.

Находим потенциалы свободных клеток:

$$\Delta_{13} = -7, \Delta_{14} = -5, \Delta_{21} = -2, \Delta_{22} = -4, \Delta_{24} = 2, \Delta_{31} = -6,$$

$$\Delta_{32} = -2, \Delta_{33} = -13, \Delta_{41} = -3, \Delta_{42} = -3, \Delta_{43} = -6, \Delta_{44} = 0.$$

Так как $\Delta_{24} = 2 > 0$, необходимо произвести перераспределение

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}} & \begin{array}{c} 5 \\ 0^* \end{array} \\ 45 & \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 40 \end{array} \boxed{\phantom{\begin{array}{cc} & \\ & \end{array}}} \begin{array}{c} \\ 5 \end{array}$$

поставок;

Полученное перераспределение операций занесем в новую таблицу 6.10.

Таблица 6.10.

a_i/b_j		1	2	3	4	5	u_i
		20	40	25	45	30	
1	60	-7 20	-5 40	-2	0	-4 0^*	0

2	30	-4	0	-8	-6	-3	-1
3	45	-5	-7	0	-9	-8	-4
4	25	-6	-4	-5	-7	-6	-2
v_j		-7	-5	-7	-5	-4	

Оценки свободных клеток составляют:

$$\Delta_{13} = -5, \Delta_{14} = -5, \Delta_{21} = -4, \Delta_{22} = -6, \Delta_{25} = -2, \Delta_{31} = -6,$$

$$\Delta_{32} = -2, \Delta_{33} = -11, \Delta_{41} = -3, \Delta_{42} = -3, \Delta_{43} = -4, \Delta_{44} = 0$$

Найденное решение является оптимальным, так как все оценки свободных клеток неположительные; это решение имеет вид

$$x_{11} = 20, x_{12} = 40, x_{23} = 25, x_{24} = 5, x_{34} = 40, x_{35} = 5, x_{45} = 25.$$

Таким образом, 60 специалистов первого профиля целесообразно распределить между первым и вторым видами работ (20 и 40 человек соответственно), 25 и 5 специалистов второго профиля распределяются соответственно между третьим и четвертым видами работ, специалисты третьего профиля — в четвертом и пятом видах работ (40 и 5 человек соответственно) и все 25 специалистов четвертого профиля целесообразно направить на пятый вид работ.

Тема 7 ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Виды производных функций и их свойства

Производственные функции в широком смысле охватывают моделирование зависимостей, существующих между такими показателями производственной деятельности, как объем выпускаемой продукции, капитальные затраты, фондоотдача, производительность труда и т.д.

В более узком смысле под производственной функцией понимается зависимость выпуска продукции от затрат различных производственных ресурсов. В общем виде функция может быть записана в виде:

$$P = f(F_1, F_2, F_3 \dots F_n),$$

где P - выпуск продукции;

F_i - факторы, определяющие величину выпуска продукции (затраты труда, материалов и т.д.). Зависимость между затратами различных видов ресурсов и объемом выпуска продукции должна быть выражена уравнением множественной регрессии.

При осуществлении экономического моделирования нередко исходят из предположения о линейной зависимости между затратами ресурсов и выпуском продукции. Однако предположение о линейном характере зависимости затрат и выпуска продукции является значительно упрощенным. Если по отношению к затратам материалов и сырья это предположение может быть принято, то по отношении машин - не всегда.

Построение моделей оптимального планирования, приближающихся к реальной экономической действительности требуют углубления и уточнения связей между затратами ресурсов и выпуском продукции.

Наиболее часто в качестве нелинейной функции используется уравнение:

$$P = a_0 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}.$$

Этому уравнению соответствует линейно-логарифмическая функция:

$$\ln P = \ln a_0 + a_1 \times \ln F_1 + \dots + a_n \times \ln F_n.$$

Для каждого фактора можно определить абсолютную скорость, с которой в пределе возрастает выпуск продукции с ростом затрат данного фактора. Эта скорость определяется как частная производная выпуска продукции по затратам данного вида ресурсов:

$$\frac{\delta P}{\delta F_1} = a_o \times a_1 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}$$

Абсолютная скорость зависит от величины всех компонентов уравнения. Отношения частных производных для двух каких-либо факторов служат своеобразными нормами заменяемости этих ресурсов с точки зрения производства данной продукции.

Наряду с абсолютной скоростью большой интерес представляет выпуск продукции при увеличении затрат ресурсов данного вида на 1 %.

Для получения относительной скорости нужно величину абсолютной скорости умножить на отношение затрат ресурсов к выпуску продукции.

Так, для первого фактора относительная скорость составляет:

$$\frac{\delta P}{\delta F_1} \times \frac{F_1}{P} = \frac{(a_o \times a_1 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}) \times F_1}{P} = \frac{a_o \times a_1 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}}{a_o \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}} = a_1.$$

Относительная скорость изменения объема выпуска продукции от изменения затрат на 1 % называется эластичностью выпуска по затратам и обозначается символом E . Для любого i фактора выполняется условие:

$$E_i = \frac{\delta P}{\delta F_1} \times \frac{F_1}{P} = a_i.$$

Таким образом, для уравнения типа (3.2) эластичность выпуска продукции для научного фактора является величиной постоянной и равна соответствующему коэффициенту уравнения регрессии. При любом объеме затрат и выпуска увеличение затрат i -го вида ресурсов на 1 % ведет к увеличению выпуска продукции на a_i %.

Одной из первых практических работ в области изучения производственных функций было исследование Ч.Кобба и П.Дугласа по данным обрабатывающих отраслей промышленности США за 1899-1922 г.

В этих исследованиях была принята функция вида:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2},$$

где Y - объем выпуска продукции;

X_1 - затраты труда;

X_2 - объем производственных фондов.

В результате исследователи пришли к выводу, что $a_1 + a_2 = 1$ т.е. имеет место неизменный эффект масштаба.

Функция валового внутреннего продукта (ВВП) в зависимости от стоимости основных фондов и числа, занятых в народном хозяйстве за 1960-1994 годы имеет вид:

$$Y = 0.931 K^{0.54} L^{0.59}$$

где Y – ВВП, млрд. руб.

K - стоимость основных производственных фондов, млрд. руб.

L - число занятых в народном хозяйстве, млн. чел.

По данным экономики США за 1980-1995 годы производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = 2.251 K^{0.4} L^{0.8}$$

Производственная функция $Y = F(K, L)$ - называется неоклассической, если она является гладкой и удовлетворяет следующим условиям, поддающимся естественной экономической интерпретации:

$$1) F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

- при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно;

$$2) \frac{\partial F}{\partial L} > 0 \quad \frac{\partial F}{\partial K} > 0$$

с ростом ресурсов выпуск растет;

$$3) \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

- с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется;

$$4) f(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty$$

$Y = AK^{a_1}L^{a_2}$ - при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

Мультипликативная ПФ задается выражением

$$a_1 > 0 \quad a_2 > 0$$

где A — коэффициент нейтрального технического прогресса; a_1, a_2 - коэффициенты эластичности по труду и фондам.

Если $a_1 > a_2$ имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост, в противном случае - фондосберегающий (экстенсивный) рост.

Линией уровня на плоскости K, L , или изоквантой, называется множество тех точек плоскости, для которых $F(K, L) = X_0 = \text{const}$. Для мультипликативной ПФ изокванта имеет вид:

$$AK^{a_1}L^{a_2} = X_0 = \text{const}$$

или

$$K^{a_1} = \frac{X_0}{A} L^{-a_2}$$

т.е. является степенной гиперболой, асимптотами которой служат оси координат.

Для разных K, L , лежащих на конкретной изокванте, выпуск равен одному и тому же значению X_0 , что эквивалентно утверждению о взаимозаменяемости ресурсов.

Поскольку на изокванте $F(K, L) = X_0 = \text{const}$, то

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0$$

В этом соотношении $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ поэтому dK и dL имеют разные знаки: если $dL < 0$ что означает сокращение объема труда, то $dK > 0$, т.е. выбывший в объеме $|dL|$ труд замещается фондами в объеме dK .

Наряду с количественным увеличением объема ресурсов важнейшим фактором роста производства служит научно-технический прогресс, проявляющийся в совершенствовании техники и технологии, повышении

квалификации работающих, улучшении организации производства. Технический прогресс обычно отражают в производственных функциях следующего вида:

$$Y = a_o \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2} \times e^{\lambda t},$$

где λ - константа, отражающая темп технического прогресса;

t - временной фактор.

e^t представляет собой выражение временной тенденции развития производства, связанной с техническим прогрессом, прежде всего совершенствование планирования, управления и организации производства.

С учетом ограниченности и резкого повышения стоимости природных ресурсов целесообразно строить производственную функцию следующего вида:

$$Y = a_o \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2} \times X_3^{a_3},$$

где X_3 - стоимость используемых природных ресурсов.

При анализе производственных функций возникает вопрос о целесообразности расширения масштабов производства. В этом случае анализируется величина

$$A = \sum_{i=1}^m a_m.$$

Возможны три случая:

1) Если $A = 1$, то увеличение ресурсов в k раз приводит к увеличению объема производства также в k раз;

2) Если $A > 1$, то можно говорить о положительном эффекте расширения масштабов производства, т.к. увеличение ресурсов в k раз приводит к росту объемов производства более чем в k раз;

3) Если $A < 1$, то имеем отрицательный эффект расширения масштабов производства.

На основе производственных могут быть построены модели зависимости спроса от доходов:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1},$$

где Y - спрос;

X_1 - величина доходов населения.

Коэффициент эластичности a_1 показывает, насколько увеличится спрос при росте доходов на 1%. Коэффициент эластичности может быть и отрицательным (когда с ростом доходов населения может снизиться потребление хлеба, картофеля и т.д.).

Модель Солоу - модель экзогенного экономического роста, основанная на экзогенной норме сбережений и неоклассической производственной функции. Модель считают отправной точкой для всех современных моделей экономического роста, которым она дала необходимую математическую базу для анализа темпов изменения. Одним из недостатков модели является экзогенный характер нормы сбережений, то есть модель не учитывает оптимизационного поведения потребителей (модель, учитывающая указанное поведение, называется неоклассической моделью экономического роста). Также модель приводит к нереалистичной оценке ставки процента в развивающихся странах. До появления модели Солоу наиболее распространенным инструментом изучения экономического роста была модель Харрода - Домара. Она базировалась на кейнсианских предпосылках, оперировала исключительно данным макроуровня (совокупный спрос, совокупное предложение и т. д.), игнорируя микроуровень отдельного потребителя или отдельной фирмы, и концентрировалась на возможных негативных последствиях экономического роста, в частности, на безработице. Также слабыми местами модели были отсутствие взаимозаменяемости ресурсов, поскольку в ней использовалась производственная функция Леонтьева, и нестабильность динамического равновесия. Неоклассическая теория нуждалась в собственной модели, опирающейся на неоклассические предпосылки на микроуровне и демонстрирующей механизм экономического роста, и первым шагом в этом направлении стала модель Солоу. Модель,

объединяющая неоклассическую форму производственной функции с постоянным эффектом от масштаба, убывающей отдачей факторов и положительной эластичностью замены факторов и постоянной нормой сбережения была сформулирована одновременно и независимо друг от друга будущим лауреатом. Важной особенностью модели роста Solow-Swan является априорное предположение, что капитал подвержен убыванию доходности в закрытой экономике - при фиксированном количестве труда, влияние на выпуск последнего задействованного единичного объёма капитала всегда будет меньше, чем предыдущие единичные объёмы. Предполагая для простоты, что нет технологического прогресса или роста объёма рабочей силы, убывающая доход подразумевает, что в какой-то момент объёма нового произведённого капитала будет достаточно лишь для компенсации потерянного в виде амортизации. В результате получается, что при неизменном уровне технологий и без роста рабочей силы экономика в модели обязательно перестает расти. При ненулевом росте труда усложняются рассуждения, но по-прежнему сохраняется основная логика — в краткосрочной перспективе скорость роста замедляется как уменьшающаяся доходность, и экономика сходится к постоянному «устойчивому состоянию» (то есть без дальнейшего роста доходов на душу населения). Рост технологии очень похож на предположение о ненулевом росте рабочей силы с точки зрения «эффективного труда»: новое устойчивое состояние достигается выходом на стабильный ежедневный выпуск, но в этом случае доход на душу населения растёт пропорционально росту технологического прогресса в «устойчивом состоянии».

В модели рассматривается закрытая экономика. Фирмы максимизируют свою прибыль и функционируют в условиях совершенной конкуренции.

Производится только один продукт (Y) используемый, как для потребления (C), так и для инвестиций (I).

Темпы технологического прогресса (q), роста населения (n) и норма выбытия капитала (g) постоянны и задаются. Норма сбережений также задаётся экзогенно. Фискальная политика (государственные расходы и налоги) в модели отсутствует. Время изменяется непрерывно.

Предпосылка о закрытой экономике означает, что произведенный продукт тратится на инвестиции и потребление, экспорт/импорт отсутствуют, сбережения равны инвестициям: $S = I$, $Y = C + I$.

Производственная функция $Y(K, L, E)$ и удовлетворяет неоклассическим предпосылкам:

- технологический прогресс увеличивает производительность труда:

$$Y = Y_t(K_t L_t E_t),$$

где K_t – капитал,

L_t – труд,

E_t – параметр технологического прогресса в момент времени t ;

- производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба:

$$Y(aK, aLE) = aY(K, LE),$$

где a - эластичность выпуска по капиталу;

Предельная производительность факторов может быть положительная и убывающая.

Производственная функция удовлетворяет условиям: если запас одного из факторов бесконечно мал, то его предельная производительность бесконечно велика, если же запас одного из факторов бесконечно велик, то его предельная производительность бесконечно мала, для производства необходим каждый фактор.

В модели Солоу в стационарном состоянии темп роста производительности труда равен темпу технического прогресса, а темп экономического роста - сумме темпа технического прогресса и темпа роста населения.

Поведение потребителей в явном виде в модели не рассматривается. Функция полезности отсутствует. Вместо этого имеется экзогенно задаваемая

норма сбережений (s) означающая $0 < s < 1$, что домохозяйства сберегают долю своего дохода s , а оставшуюся долю $1-s$ тратят на потребление, и это соотношение не зависит от происходящих в экономике событий.

Графически достижение равновесия в модели Солоу показано на рис.7.1.

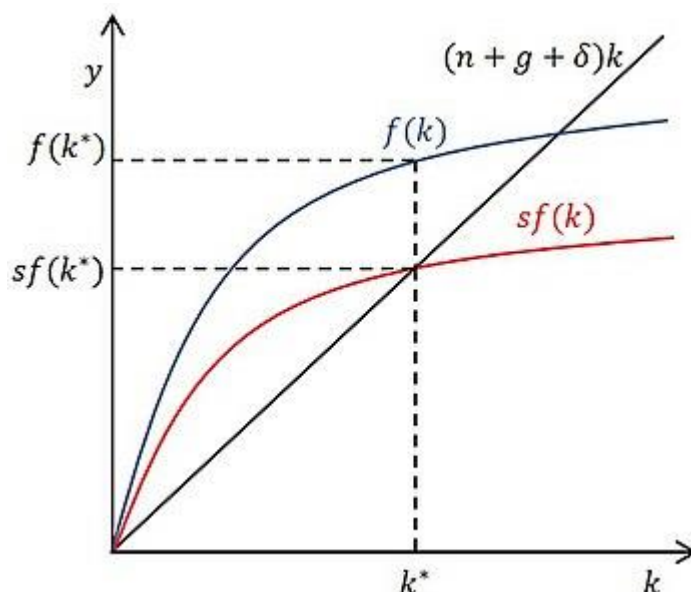


Рис. 7.1. Модель Солоу, фазовая плоскость, равновесие.

Исходя из предпосылок модели, в момент времени капитал увеличивается на величину инвестиций и изнашивается. Если инвестиции на единицу эффективного труда превышают выбытие капитала на единицу эффективного труда то капиталовооружённость труда с постоянной эффективностью растёт, в противном случае - падает.

При росте нормы сбережений инвестиции превышают выбытие капитала, растёт до достижения равновесия при более высоком уровне. В процессе перехода к новому стационарному состоянию темп роста производительности труда будет опережать темп технического прогресса и при достижении нового равновесия они сравниваются. Валовые показатели

растут с темпом, равным сумме темпов прироста технологического прогресса и населения .

Графически «Золотое правило» нормы сбережения в модели Солоу показано на рис.7.2.

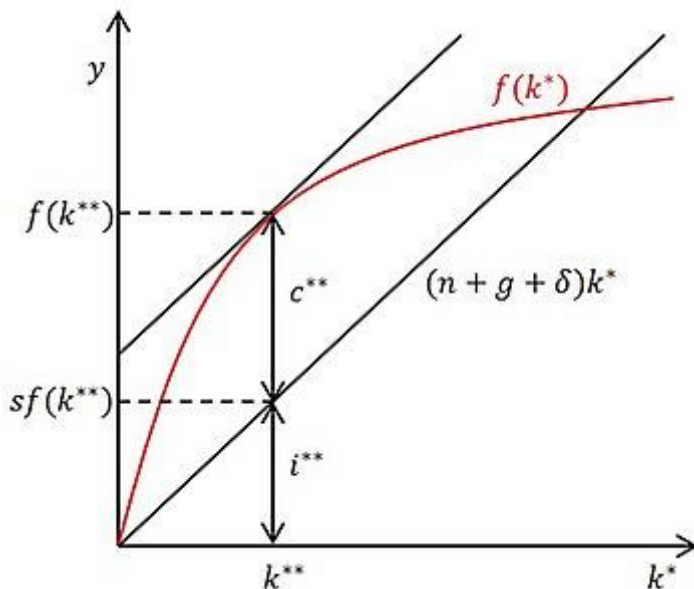


Рис.7.2. Модель Солоу, фазовая плоскость, «Золотое правило».

Выбирается такая норма сбережений, обеспечивающая максимальный устойчивый уровень потребления, равная эластичности выпуска по капиталу в устойчивом состоянии, соответствующему этой норме сбережений. Если норма сбережений выше «Золотого правила», то при её снижении до уровня «Золотого правила» потребление сначала резко растёт, затем снижается, но в итоге стабилизируется на уровне выше исходного. Если норма сбережений ниже «Золотого правила», то при её росте до уровня «Золотого правила» потребление сначала снижается, но затем растёт и превышает исходный уровень.

Модель Солоу дала необходимую математическую базу (построение фазовой плоскости) для анализа темпов изменения капитала и экономического эффекта экономического прогресса, на которой в дальнейшем исследователи создали множество более сложных моделей, потому её считают отправной

точкой для всех современных исследований экономического роста. Модель оказала влияние на всю макроэкономическую теорию.

Но вместе с тем модель не могла дать объяснение многим проблемам, связанным с экономическим ростом. С теоретической точки зрения, модель не показывает, каким образом решения домохозяйств влияют на норму сбережения и, вместе с решениями фирм, на темпы экономического роста. Параметры нормы сбережений и темпов научно-технического прогресса в модели просто задаются экзогенно, решения экономических агентов на них никак не влияют, что не устраивало исследователей. Более того, даже сильная сторона модели - процесс накопления капитала - по сути представляет собой «чёрный ящик», механизм влияния на который экономических агентов в модели не раскрыт.

Модель Солоу была подвергнута всестороннему критическому анализу в ходе теоретической дискуссии двух Кембриджей о капитале. Было показано, что в рамках модели обязательно должны выполняться допущения, малореальные для практических условий, и лишь при их выполнении выводы из моделей могут что-то действительно сказать о реальном мире. Примером таких допущений может служить то, что модель Солоу предполагает непрерывно достигаемое равновесие с «полной занятостью» всех ресурсов. Модель также противоречит кейнсианскому подходу, в котором сбережения определяют размер инвестиций, а не наоборот.

Эмпирическая проверка ряда положений модели показала, что они не находят подтверждения на практике. Модель предполагает наличие условной конвергенции, что означает, что бедные страны должны расти быстрее богатых при условии схожести структурных параметров, но в реальности этого не происходит. Есть лишь единичные примеры (японское экономическое чудо, корейское экономическое чудо), когда бедные страны смогли догнать богатые по уровню ВВП на душу населения, в большинстве своём сближения уровня развития не происходит. Модель не объясняет,

почему бедные страны в большинстве случаев остаются бедными и не могут догнать богатые.

Но все же подробные исследования по конвергенции появились существенно позже публикации работ Роберта Солоу и Тревора Свона, когда после Второй Мировой войны прошло несколько десятков лет, данные за которые и анализировались исследователями. После появления модели исследователи пытались с её помощью сравнивать ставки процента в разных странах, и это сравнение сразу показало несоответствие модели реальным данным. Сомнения в том, что модель Солоу адекватно описывает экономические показатели, появились позже, когда исследователи пытались объяснить японское экономическое чудо.

Столь сильное отклонение реальных значений ставки процента от теоретических стало причиной развития более сложных моделей, предположения которых относительно процентной ставки были бы более реалистичными. Одни исследователи пошли путём расширения понятия капитал за счет включения в него человеческого капитала. При таком подходе значение повышалось с примерно $\frac{1}{3}$ до примерно $\frac{2}{3}$ (если считать сумму человеческого и физического), и в результате разница в процентной ставке у развитой и догоняющей страны становится намного меньше, чем предсказанная по модели Солоу. Результатом такого подхода стала модель Менкью — Ромера — Вейла. Другие исследователи стали разрабатывать модели, в которых сначала норма сбережений, а потом и темпы экономического роста не задавались бы экзогенно, а являлись бы следствием решений экономических агентов. Первым шагом в этом направлении стала модель Рамсея -Касса -Купманса, затем дополненная АК-моделями. В 1987 году Шведская королевская академия наук наградила Роберта Солоу Нобелевской премией по экономике за «вклад в теорию экономического роста», который связан с разработкой данной модели.

Производственные функции и прогнозирование

Одним из важнейших направлений практического применения производственных функций является прогнозирование.

Прогнозирование – это научно обоснованные суждения о возможном состоянии и будущем развитии того или иного объекта или отдельных его элементов, а также об альтернативных путях, методах, сроках достижения определённого состояния этого объекта. Принципами прогнозирования являются:

1. системный подход;
2. научная обоснованность;
3. альтернативность и вариантность;
4. выделение генеральной цели, ведущего звена;
5. отражение объективных закономерностей;
6. достоверность.

По степени формализации методы экономического прогнозирования можно подразделить на интуитивные и формализованные. Среди интуитивных методов широкое распространение получили методы экспертных оценок. Применяются также методы исторических аналогий и прогнозирования по образцу.

К формализованным методам относятся методы экстраполяции и методы моделирования.

Методы моделирования предполагают использование в процессе прогнозирования и планирования различного рода экономико-математических моделей, представляющих собой формализованное описание исследуемого экономического процесса (объекта) в виде математических зависимостей и отношений.

Применение производственных функций в прогнозировании связано, как правило, с предположением о том, что тенденции, сложившиеся в прошлом, в основном сохраняются и в будущем. Поскольку такой гарантии нет,

к таким моделям следует относиться с большой осторожностью. Однако любые исследования, обращенные в будущее, исходят из информации о прошлом и настоящем.

В простейшем случае прогнозирование какого-либо экономического показателя осуществляется с применением функции, в которой в качестве независимой переменной выступает время:

$$Y_t = f_t.$$

Динамика показателя может моделироваться различными математическими функциями, например: степенной:

$$Y_t = a_0 \times t^a;$$

параболической:

$$Y_t = a_0 + a_1 \times t + a_2 \times t^2 + \dots + a_n \times t^n.$$

Простейшие временные функции применяют для получения ориентировочных прогнозных оценок.

В прогнозировании экономических показателей применяют также однофакторные или многофакторные функции вида:

$$Y = f_{x_1, x_2 \dots x_n},$$

здесь Y - прогноз объема производства;

X_i - объем i -го вида ресурса.

Например, прогноз национального дохода можно осуществить с помощью функции вида:

$$Y = a_0 \times L^{a_1} \times K^{a_2} \times S^{a_3},$$

где Y - объем национального дохода;

L - величина трудовых ресурсов;

K - стоимость производственных фондов;

S - стоимость используемых природных ресурсов.

Отдельными расчетами (или взаимосвязанными с помощью системы уравнений) на прогнозируемый период определяются значения L , K и S .

Тогда производственная функция позволяет дать на тот же период прогноз величины национального дохода.

Могут быть построены также факторно-временные производственные функции вида:

$$Y = f_{x_1, x_2 \dots x_n, t},$$

здесь факторы X_i отражают воздействие на результативную величину конкретных экономических показателей, а t выражает тенденции, связанные с действием неучтенных факторов: научно-технического прогресса, совершенствование управления, технологии и т.д.

Прогнозирование и планирование экономики представляет собой сложный многоступенчатый и итеративный процесс, в ходе которого должен решаться обширный круг различных социально-экономических и научно-технических проблем, для чего необходимо использовать в сочетании самые разнообразные методы.

Тема 8. ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Регрессионный и корреляционный анализ.

Регрессионный и корреляционный анализ позволяет установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин X , и делать прогнозы значений Y . Параметр Y , значение которого нужно предсказывать, является **зависимой** переменной. Параметр X , значения которого нам известны заранее и который влияет на значения Y , называется **независимой** переменной. Например, X – количество внесенных удобрений, Y – снимаемый урожай; X – величина затрат компании на рекламу своего товара, Y – объем продаж этого товара и т.д.

Корреляционная зависимость Y от X – это функциональная зависимость

$$\bar{y}_x = f(x)$$

где $\bar{y}_x$ – среднее арифметическое (**условное среднее**) всех возможных значений параметра Y , которые соответствуют значению $X=x$.

Уравнение выше называется **уравнением регрессии** Y на X , функция $f(x)$ – **регрессией** Y на X , а ее график – **линией регрессии** Y на X .

Проведение корреляционного исследования предполагает:

1. Качественный анализ сущности и природы моделируемого социально – экономического явления, опирающийся на методы экономической теории. При этом устанавливается результативный признак (y) и формируется набор факторов ($x_1; x_2; \dots; x_m$). Если факторный признак один, то рассматривается парная корреляция, если факторов несколько – то множественная корреляция.
2. Сбор первичной информации и ее предварительный анализ, заключающийся в оценке однородности совокупности.

Для оценки однородности данных используется коэффициент вариации. Кроме того, осуществляется проверка соответствия данных нормальному распределению.

3. Исключение из совокупности первичных данных аномальных (выделяющихся) единиц по факторным признакам. При этом исключаются те единицы, значения факторных признаков которых не попадает в интервал:

$$\bar{x} - 3\sigma \leq x_i \leq \bar{x} + 3\sigma .$$

Таким образом формируется новая совокупность для анализа.

4. Выявление наличия связи и ее направления (прямая или обратная).

Для этого используются следующие методы: параллельное сопоставление рядов факторного и результативного признаков, графическое изображение с помощью поля корреляции и эмпирической линии связи.

5. Измерение степени тесноты связи и оценка ее существенности.

Для количественного определения степени тесноты связи используются следующие показатели:

- линейный коэффициент корреляции (r) в случае парной линейной зависимости;
- эмпирическое корреляционное отношение (η) для линейных и криволинейных связей;
- коэффициент корреляции знаков Фехнера при небольшом объеме исходных данных;
- коэффициент корреляции рангов Спирмена, который используется для оценки связи между количественными признаками с неоднородными данными или между качественными признаками;
- коэффициенты ассоциации Д. Юла и контингенции К. Пирсона для измерения связи между качественными альтернативными признаками;
- коэффициенты взаимной сопряженности К. Пирсона и А. Чупрова для оценки связи в тех случаях, когда имеется два качественных признака, каждый из которых состоит из более чем двух групп.

6. Определение тенденции связи и построение уравнения регрессии.

Регрессия – это функция $f(x_1; x_2; \dots; x_m)$, которая отражает зависимость средней величины результативного признака от заданных фиксированных значений факторных признаков.

Для выбора вида уравнения можно ориентироваться на график эмпирической линии связи. Наибольшее распространение получили следующие виды функций:

- Линейная $\hat{y}_x = a_0 + a_1 x$;
- Парабола второго порядка $\hat{y}_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$;
- Гипербола $\hat{y}_x = a_0 + \frac{a_1}{x}$;
- Показательная $\hat{y}_x = a_0 \cdot a_1^x$.

7. Оценку адекватности модели и ее практическое использование.

Для установления достоверности уравнения регрессии рассчитывается ошибка аппроксимации. Если величина ошибки не превышает 10-15%, то данное уравнение может быть использовано для практических целей.

На основе уравнения регрессии рассчитываются коэффициенты эластичности, стандартизированные β -коэффициенты, Δ -коэффициенты. Значения этих коэффициентов позволяют проводить сравнительную оценку влияния различных факторов с целью установления приоритетных факторов, оказывающих наибольшее влияние на результативный признак.

Если условия формирования уровней признаков не претерпели существенных изменений, уравнение может быть использовано для прогнозирования.

Рассмотрим проведение корреляционного анализа на следующем примере.

Пример 1.

Исходные данные по американским университетам (данные проранжированы в порядке возрастания по стоимости обучения представлены в таблице 8.1.

Таблица 8.1.

№ п/п	Название университета (Ун)	Стоимость обучения (тыс. долл.) <i>x</i>	Стартовый годовой заработок выпускника (тыс. долл.) <i>y</i>
<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	Техасский Ун-Остин	14,912	65,000
2	Ун Северной Каролины-Чэпел Хилл/Кеннан Флаглер	17,017	68,000
3	Калифорнийский Ун-Беркли/Хаас	19,378	75,000
4	Калифорнийский Ун-Лос-Анджелес(Андерсон)	20,093	75,000
5	Вирджинский Ун/Дарден	20,429	71,000
6	Ун Эмори/Гойсуэйта	22,800	65,000
7	Ун Карнеги-Меллон	23,100	70,000
8	Стэнфордский Ун	24,000	80,000
9	Мичиганский Ун-Анн-Арбор	24,185	70,000
10	Корнеллский Ун-Джонсон	24,260	68,000
11	Йельский Ун	24,305	70,000
12	Пенсильванский Ун/Уортон	24,570	75,000
13	Дартмутский колледж/Так	24,900	75,000
14	Гарвардский Ун	25,000	82,000
15	Рочестерский Ун/Саймон	25,092	66,000
16	Чикагский Ун	25,255	75,000
17	Ун Дьюк/Фьюква	25,365	72,000
18	Нью-Йоркский Ун/Стерн	25,500	75,000
19	Массачусетский технологический Ун(Слоун)	25,800	75,000
20	Колумбийский Ун	26,180	88,000

Выборка небольшая по объему, так как цель примера проиллюстрировать методологию анализа корреляционных связей.

Из данных, представленных в таблице 8.1, видно, что в большинстве университетов с увеличением стоимости обучения возрастает и стартовый годовой заработок выпускника. Следовательно, можно предположить наличие прямой связи между признаками.

При достаточно большом числе рекомендуется построить корреляционную таблицу 8.2. Для этого по формуле Стерджесса определяют величину интервала по факторному и результативному признакам:

$$h_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,322 \lg n} = \frac{26,180 - 14,912}{1 + 3,322 \lg 20} = \frac{11,628}{5} = 2,254 \text{ (тыс. долл.)}$$

$$h_y = \frac{y_{max} - y_{min}}{1 + 3,322 \lg n} = \frac{88,000 - 65,000}{1 + 3,322 \lg 20} = \frac{23,000}{5} = 4,6 \approx 5 \text{ (тыс. долл.)}$$

По строкам таблицы расположены интервалы факторного признака (x), по столбцам – результативного признака (y). в клетках указана частота повторения данного сочетания x и y .

Таблица 8.2.

Середина интервала (y)	67,500	72,500	77,5000	82,5000	87,5000	f_x	$\bar{y}_j$
Группы по y	65,000- 70,000	70,000- 75,000	75,000- 80,000	80,000- 85,000	85,0000- 90,000		
Группы по x							
1	2	3	4	5	6	7	8
14,912 – 17,166						2	67,500
17,166 – 19,420						1	77,500
19,420 – 21,674						2	75,000
21,674 – 23,928						2	70,000
23,928 – 26,182						13	76,346
f_y	5	5	7	2	1	20	

Среднее значение результативного признака для каждой группы факторного признака ($\bar{y}_j$) рассчитывается следующим образом (на примере интервала 23,928 – 26,182):

$$\bar{y}_5 = \frac{67,500 \cdot 2 + 72,500 \cdot 3 + 77,500 \cdot 5 + 82,500 \cdot 2 + 87,500 \cdot 1}{13} = 76,346 \text{ (тыс.долл.)}$$

По расположению основной части частот в корреляционной таблице 8.2 можно предположить очень незначительное наличие прямой связи (основная масса частот сосредоточена в пятой группе по x).

Построим график в виде поля корреляции и эмпирической линии связи (рис.8.1).



Рис.8.1. График поля корреляции и эмпирической линии связи

По данным о величинах факторного и результативного признаков для каждого университета в виде точек построено поле корреляции. По расположению этих точек можно сделать предположение и о наличии связи между признаками (основное количество точек сосредоточено вдоль оси абсцисс). Для построения эмпирической линии связи по оси абсцисс откладываются середины интервалов факторного признака (x'_i), а по оси ординат – средние значения результативного признака для каждой группы факторного признака (y'_j), имеющиеся точки соединяются отрезками. Таким

образом, получаем эмпирическую линию связи, которая подтверждает выдвинутые ранее предположения.

Кроме того, по эмпирической линии связи можно установить и форму связи (прямолинейная или криволинейная). Так как число единиц невелико и тесную связь выявить не удастся, то прежде чем количественно оценивать тесноту связи, проверим на однородность данные по факторному и результативному признакам. Для этого рассчитываем коэффициент вариации (V):

$$V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100\%; V_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100\%$$

Где $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 3,0355^1$ (тыс. долл.)

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n}; \bar{x}^2 = \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$$

$$\bar{x} = 23,107 \text{ тыс. долл.}$$

Где $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = 5,6699^1$ (тыс. долл.)

$$\overline{y^2} \text{ и } \bar{y}^2 - \text{аналогично } \overline{x^2} \text{ и } \bar{x}^2$$

$$\bar{y} = 72,98 \text{ тыс. долл.}$$

$$V_x = \frac{3,0355}{23,107} \times 100\% = 13,14\%; V_y = \frac{5,6699}{72,98} \times 100\% = 7,77\%$$

Так как по факторному и по результативному признакам коэффициент вариации значительно меньше 33%, то данные однородны.

Следовательно, можно оценить степень тесноты связи и построить уравнение регрессии. Все вспомогательные расчеты приведены в таблице 8.3.

Для оценки степени тесноты рассчитаем линейный коэффициент корреляции (r) по следующей формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

где n – число университетов.

Коэффициент корреляции r принимает значения от -1 до 1. Чем ближе r к 1, тем теснее связь. Знак показывает направление связи: (+) – связь прямая (с увеличением факторного признака растет и результативный признак); (-) – связь обратная (с увеличением факторного признака результативный признак уменьшается).

На основании данных таблицы 8.3 получим:

$$r = \frac{151,071}{\sqrt{184,236 \times 642,944}} = 0,4389$$

Величина коэффициента позволяет предположить прямую не тесную связь между признаками.

Коэффициент детерминации ($r^2=0,1926$) показывает, что на 19,26% вариация стартового годового заработка выпускника зависит от стоимости обучения и на 0,74% - от прочих факторов. Такой вывод основан на том, что значение r получено по данным выборки. Следовательно, нужно проверить наличие подобной связи в генеральной совокупности.

Для малого объема выборочной совокупности при оценке значимости r используется t - статистика Стьюдента. Расчетное значение t – критерия Стьюдента определяется по следующей формуле:

$$t_{\text{расч.}} = \frac{|r| \times \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Полученное значение t – критерия сравнивается с критическим (устанавливаемым по таблице), величина которого зависит от уровня значимости α и числа степеней свободы ($n-2$).

Если $t_{\text{расч.}} > t_{\text{крит.}}$, то полученное значение r является значимым и в генеральной совокупности существует аналогичная связь. Если $t_{\text{расч.}} < t_{\text{крит.}}$, то r не значим, и в генеральной совокупности связь между признаками отсутствует.

$$t_{\text{расч.}} = \frac{0,4389 \times \sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0,1926}} = 2,107$$

$$t_{\text{крит.}} (\alpha=0,05; n-2=18)=2,101 \text{ (см. Приложение 4).}$$

Так как $t_{\text{расч.}} > t_{\text{крит.}}$, то в генеральной совокупности наблюдается аналогичная связь между признаками.

Линейный коэффициент корреляции дает достаточно точные оценки для линейной связи. В случае криволинейной связи используется эмпирическое корреляционное отношение (η), которое рассчитывается по следующей формуле:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma_{\text{общ.}}^2}}$$

где δ^2 - межгрупповая дисперсия заработка выпускника (y), величина которой зависит от вариации стоимости обучения (x).

$\sigma_{\text{общ.}}^2$ - общая дисперсия заработка выпускника под влиянием всех факторов.

Формула для расчета δ^2 имеет следующий вид:

$$\delta^2 = \frac{\sum (\bar{y}_j - \bar{y}_{\text{общ.}})^2 \times n_j}{\sum n_j}$$

где $\bar{y}_j$ - средние значения результативного признака в соответствующих группах по факторному признаку;

$\bar{y}_{\text{общ.}}$ - общая средняя для всей совокупности;

n_j - число единиц наблюдения в j -той группе;

k - число групп.

Таблица 8.3.

№ п/п	Стоимость обучения (тыс. долл.) x_i	Стартовый годовой зарплаток (тыс. долл.) y_i	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})$ $(y_i - \bar{Y})$	y_i^2	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	$\hat{y}_x$	$y_i - \hat{y}_x$	$(y_i - \hat{y}_x)^2$
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	14,912	65,000	-8,195	67,158	-7,98	63,680	65,396	4225	222,368	969,28	66,261	-1,261	1,5901
2	17,017	68,000	-6,09	37,088	-4,98	24,800	30,328	4624	289,578	1157,156	67,987	0,013	0,0002
3	19,378	75,000	-3,729	13,905	2,02	4,080	-7,533	5625	375,507	1453,35	69,923	5,077	25,7759
4	20,093	75,000	-3,014	9,084	2,02	4,080	-6,088	5625	403,729	1506,975	70,509	4,491	20,1691
5	20,429	71,000	-2,678	7,172	-1,98	3,920	5,302	5041	417,344	1450,459	70,785	0,215	0,0462
6	22,800	65,000	-0,307	0,094	-7,98	63,680	2,450	4225	519,84	1482	72,729	-7,729	59,7374
7	23,100	70,000	-0,007	0,000049	-2,98	8,880	0,021	4900	533,61	1617	72,975	-2,975	8,8506
8	24,000	80,000	0,893	0,797	-7,02	49,280	6,269	6400	576	1920	73,713	6,287	39,5264
9	24,185	70,000	1,078	1,162	-2,98	8,880	-3,212	4900	584,914	1692,95	73,865	-3,865	14,9382
10	24,260	68,000	1,153	1,329	-4,98	4,080	-5,742	4624	588,548	1649,68	73,926	-5,926	35,1175
11	24,305	70,000	1,198	1,435	-2,98	8,880	-3,570	4900	590,733	1701,35	73,963	-3,963	15,7054
12	24,570	75,000	1,463	2,140	2,02	4,080	2,955	5625	603,685	1842,75	74,180	0,820	0,6724
13	24,900	75,000	1,793	3,215	2,02	4,080	3,622	5625	620,01	1867,5	74,451	0,549	0,3014

14	25,000	82,000	1,893	3,583	9,02	81,360	17,075	6724	625	2050	74,533	7,467	55,7565
15	25,092	66,000	1,985	3,940	-6,98	48,720	-13,855	4356	629,608	1656,072	74,608	-8,608	74,0977
16	25,255	75,000	2,148	4,614	2,02	4,080	4,339	5625	637,815	1894,125	74,742	0,258	0,0666
17	25,365	72,000	2,258	5,099	-1,38	1,904	-3,116	5126,56	643,383	1816,134	74,832	-3,232	10,4458
18	25,500	75,000	2,393	5,726	2,02	4,080	4,834	6525	650,25	1912,5	74,943	0,057	0,0032
19	25,800	75,000	2,693	7,252	2,02	4,080	5,440	6525	665,64	1935	75,189	-0,189	0,0357
20	26,180	88,000	3,073	9,443	15,02	225,600	46,156	7744	685,392	2303,84	75,501	12,499	156,2250
Итого	462,141	1459,600	x	184,236	x	642,944	151,071	107164,56	10862,954	33878,121	1459,6	0,0	519,0609

$$\sigma^2_{y(\text{общ.})} = 32,148 (5,6699)^2 .$$

Расчет δ^2 представим в таблице 8.4, для чего воспользуемся группировкой по факторному признаку из таблицы 8.2.

Таблица 8.4.

Группы по стоимости обучения (тыс. долл.)	Число Университетов, n_j	Средний заработок выпускника (тыс. долл.), $\bar{y}_j$	$(\bar{y}_j - \bar{y}_{\text{общ.}})^2$
А	1	2	3
14,912- 17,166	2	66,5	83,981
17,166-19,420 19,420-21,674	1	75,0	4,080
21,674-23,928	2	73,0	0,001
23,928- 26,182	2	67,5	60,061
	13	74,66	36,691
Итого	20	72,98	184,814

На основании итога гр. 3 таблицы 8.4 рассчитаем δ^2 :

$$\delta^2 = \frac{184,814}{20} = 9,2407.$$

$$\text{Тогда: } \eta = \sqrt{\frac{9,2407}{32,148}} = 0,5361$$

Сравнивая линейный коэффициент корреляции и эмпирическое корреляционное отношение, можно заметить, что η незначительно превышает r . Такое сопоставление имеет смысл, если r вычислен по исходным несгруппированным данным, а η - по данным групповой таблицы. В этом случае для оценки возможности использования линейной функции в качестве уравнения регрессии можно воспользоваться следующим критерием: $\eta^2 - r^2 \leq 0,1$

В данном примере: $0,5361^2 - 0,4389^2 = 0,0948 < 0,1$.

Следовательно, для **моделирования взаимосвязи** воспользуемся линейной функцией для анализа тенденции связи. Кроме того, для выбора вида функции можно использовать эмпирическую линию связи, приведенную на рис. 8.1.

В общем виде линейное уравнение регрессии выглядит следующим образом:

$$y = a_0 + a_1x + e ,$$

где e - характеризует случайную вариацию, равную $y_i - \hat{y}_x$;

a_0 и a_1 - параметры уравнения, для определения которых используется метод наименьших квадратов.

Смысл метода заключается в том, что сумма квадратов отклонений эмпирических значений от теоретических, полученных по уравнению, является минимальной величиной, т.е.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_x)^2 = \min$$

На основании этого получаем систему нормальных уравнений, которая позволяет рассчитать параметры уравнения по наблюдаемым значениям:

$$\begin{cases} n \times a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \times x_i \end{cases}$$

Используя итоги граф 1, 9, 10 таблицы 8.3, получаем:

$$\begin{cases} 20 \times a_0 + 462,141 \times a_1 = 1459,600 \\ 462,141 \times a_0 + 10862,954 \times a_1 = 33878,121 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем: $a_1 = 0,82$; $a_0 = 54,033$.

Следовательно, уравнение будет иметь вид: $\hat{y}_x = 54,033 + 0,82 \times x$

Параметр при независимой переменной (x), т.е. a_1 , называется *коэффициентом регрессии*. Он показывает, на сколько единиц в среднем изменится результативный признак при изменении факторного признака на единицу.

Как видно из данного примера, при увеличении стоимости обучения на 1 тыс. долл. стартовый годовой заработок выпускника увеличивается в среднем на 820 долл.

На основании коэффициента регрессии рассчитывается *коэффициент эластичности*, который характеризует изменение в процентах и, следовательно, может быть использован для сравнительной оценки степени влияния различных факторов. Он показывает, на сколько процентов изменится результативный признак при изменении факторного на 1%.

Коэффициент эластичности (ε) рассчитывается по следующей формуле:

$$\varepsilon = a_1 \times \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \quad \varepsilon = 0,82 \times \frac{23,107}{72,98} = 0,2596$$

Следовательно, при увеличении стоимости обучения на 1%, стартовый годовой заработок выпускника увеличивается в среднем на 0,26%.

Можно также рассчитать коэффициент регрессии в стандартизованном масштабе, который называется β - коэффициент. Он показывает, на какую часть среднего квадратического отклонения (σ_y) изменится результативный признак при изменении факторного признака на величину его среднего квадратического отклонения (σ_x).

Отсюда формула для расчета β - коэффициента:

$$\beta = a_1 \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$
$$\beta = 0,82 \times \frac{3,0355}{5,6699} = 0,439$$

Следовательно, при увеличении стоимости обучения на величину $\sigma_x = 3,0355$ тыс. долл. вариация стартового годового заработка выпускника увеличится в среднем на 439 долл.

Для определения возможности использования уравнения регрессии в прогнозировании прежде всего рассчитаем индекс корреляции, величина которого покажет, насколько удачно построенное уравнение регрессии отражает существующую связь между признаками:

$$i_{\text{корр.}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_x)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

где $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_x)^2$ - сумма квадратов отклонений, которая характеризует остаточную вариацию, связанную с расположением наблюдаемых индивидуальных значений вокруг линии регрессии;

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ - сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признака от средней.

Следовательно, $(y_i - \hat{y}_x) < (y_i - \bar{y})$ - Для расчета используем итоги гр. 6 и 13 таблицы 8.3:

$$i_{\text{корр.}} = \sqrt{1 - \frac{519,0609}{642,944}} = 0,439$$

Так как величина $i_{\text{корр.}}$ значительно отличается от единицы, то возникает необходимость расчета средней квадратической ошибки уравнения (S), которая покажет, насколько удачно данное уравнение аппроксимирует тенденцию связи:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_x)^2}{n - m}}$$

где $(n - m)$ - число степеней свободы; при этом m соответствует числу параметров в уравнении регрессии, так как эти параметры рассчитаны по выборочным данным и, следовательно, содержат ошибку.

$$S = \sqrt{\frac{519,0609}{20 - 2}} = 5,37 (\text{тыс. долл.})$$

($m = 2$ - для линейного уравнения, так как есть два параметра: a_0 и a_1).

Для вывода о существенности уравнения рассчитывается относительная ошибка:

Так как величина $S_{отн}$ не превышает 10 - 15%, то можно сделать вывод о возможности использования уравнения в практических целях.

Сделаем прогноз стартового заработка выпускника на основе уравнения регрессии. Для этого:

- зададим значение факторного признака $x_0 = 24,5$ тыс. долл.;
- по уравнению регрессии рассчитаем среднее значение результативного признака для $x_0 = 24,5$.

$$\hat{y}_x = 54,033 + 0,82 \times 24,5 = 74,123;$$

- определим доверительный интервал прогноза для теоретического значения результативного признака, величина которого будет зависеть от ошибок параметров уравнения регрессии (от ошибки по выборке средней величины) и от отклонения индивидуальных значений от теоретического. В связи с этим доверительный интервал будет иметь вид:

$$\cdot \quad \hat{y}_{(x)} - t_{\alpha} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \times \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}} \leq y_{\text{прог.}} \leq \hat{y}_{(x_0)} + t_{\alpha} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \times \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}$$

где t_{α} - табличное значение t - критерия Стьюдента (см. Приложение 4), зависящее от уровня значимости α и числа степени свободы $n - m$, т.е. $t_{(\alpha=0.05; 20-2)}=2,101$.

$$\text{Множитель } \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}} = \sqrt{1 + \frac{(24,5 - 23,107)^2}{9,2143}} = 1,100$$

$$74,123 - \frac{5,37}{\sqrt{20}} \times 1,1 \leq y_{\text{прог.}} \leq 74,123 + \frac{5,37}{\sqrt{20}} \times 1,1$$

$$72,80 \leq y_{\text{прог.}} \leq 75,44$$

Доверительные интервалы прогноза представлены на рис. 8.1. Итак, с вероятностью 95% можно ожидать, что стартовый годовой заработок

выпускника при стоимости обучения в 24,5 тыс. долл. будет не менее 72,80 тыс. долл. и не более 75,44 тыс. долл.

Пример 2.

На основании следующих данных по иностранным банкам, функционирующим в Российской Федерации, оценим степень тесноты связи между признаками, используя коэффициент корреляции рангов Спирмена (таблица 8.5).

Таблица 8.5.

№ банка	Банк	Депозиты частных лиц (млн. руб.), x	Кредиты частным лицам (млн. руб.), y
1	АБН АмроБанк АО	1454,5	35,4
2	Вестдойче Ландесбанк Восток	9,7	3,9
3	Дрезднер Банк	889,4	20,0
4	Дельтабанк	237,0	187,5
5	Евроаксис Банк	20,1	4,1
6	ИНГ-Банк (Евразия)	983,4	20,4
7	КМБ - Банк	403,3	2847,0
8	Креди Лионэ Русбанк	66,7	4,0
9	Кредитсоюзкомбанк	26,1	46,7
10	Международный Московский	7655,9	1195,8
11	Мичиноку Банк (Москва)	97,5	3,4
12	Первый-чешско-российский	105,4	30,9
13	Промэксимбанк	21,5	6,6
14	«Райффайзенбанк Австрия»	10933,2	2526,9
15	Ситибанк	1829,0	273,2
16	Славинвеетбанк	314,6	148,1
17	«Сосьете Женераль Восток»	266,9	53,6
18	Финансбанк (Москва)	577,8	40,3
19	ХКФ Банк	24,6	410,1
20	Япы Креди Банк Москва	115,8	40,2

Коэффициент корреляции рангов Спирмена (ρ) рассчитывается по следующей формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

где d_i - разность рангов факторного (R_x) и результирующего (R_y) признаков
 n - число банков.

Проранжируем банки по каждому признаку в порядке возрастания и сравним ранги (таблица 8.6).

Таблица 8.6

№ банка	Ранжирование				Сравнение рангов		$d_i = R_x - R_y$	d_i^2
	x	R_x	y	R_y	R_x	R_y		
1	9,7	1	3,4	1	17	9	8	64
2	20,1	2	3,9	2	1	2	-1	1
3	21,5	3	4,0	3	15	6	9	81
4	24,6	4	4,1	4	10	15	-5	25
5	26,1	5	6,6	5	2	4	-2	4
6	66,7	6	20,0	6	16	7	9	81
7	97,5	7	20,4	7	13	20	-7	49
8	105,4	8	30,9	8	6	3	3	9
9	115,8	9	35,4	9	5	12	-7	49
10	237,0	10	40,2	10	19	18	1	1
11	266,9	11	40,3	11	7	1	6	36
12	314,6	12	46,7	12	8	8	0	0
13	403,3	13	53,6	13	3	5	-2	4
14	577,8	14	148,1	14	20	19	1	1
15	889,4	15	187,5	15	18	16	2	4
16	983,4	16	273,2	16	12	14	-2	4
17 '	1454,5	17	410,1	17	11	13	-2	4
18	1829,0	18	1195,8	18	14	11	3	9
19	7655,9	19	2526,9	19	4	17	-13	169
20	10933,2	20	2847,0	20	9	10	-1	1
Сумма								596

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 596}{20(20^2 - 1)} = 0,5519$$

Для оценки значимости рассчитанного коэффициента по таблице (см. Приложение 5) определяется критическое (минимально допустимое для существенности связи) значение коэффициента для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа наблюдений $n=20$.

$$\rho_{\text{табл.}}(\alpha=0.05; n=20) = 0,4451.$$

Так как $\rho > \rho_{\text{табл.}}$, то можно сделать вывод о существенности связи между признаками.

Для оценки степени тесноты связи между качественными альтернативными признаками применяются коэффициенты ассоциации Д. Юла и контингенции К. Пирсона. Расчет коэффициентов осуществляется по следующей таблице (см. таблицу 8.7).

Таблица 8.7.

Признаки	у (да)	у'(нет)	Итого
х (да)	а	б	а+б
х'(нет)	с	д	с+д
Итого	а+с	б+д	а+б+с+д

В расчетной таблице: a ; b ; c ; d - частоты взаимной комбинации двух альтернативных признаков (x и x' ; y и y').

Коэффициенты рассчитываются по следующим формулам:

- Коэффициент ассоциации

$$K_a = \frac{ad - bc}{ad + bc}$$

- Коэффициент контингенции

$$K_k = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a + b) \times (b + d) \times (a + c) \times (c + d)}}$$

Коэффициенты ассоциации и контингенции изменяются в пределах от -1 до 1. Причем коэффициент контингенции для одних и тех же данных меньше коэффициента ассоциации.

Рассмотрим расчет коэффициентов ассоциации и контингенции на примере 3 (условном).

Пример 3.

По результатам рыночных исследований получены следующие данные:

Таблица 8.8.

Качество обслуживания покупателей Ведение оптовой торговли	Уровень качества не изменился	Уровень качества повысился	Итого
Фирмы, ведущие оптовую торговлю самостоятельно	45	20	65
Фирмы, осуществляющие оптовую торговлю через коммерческие оптовые организации	15	50	65
Итого	60	70	130

Рассчитаем коэффициенты ассоциации и контингенции.

$$K_a = \frac{45 \times 50 - 15 \times 20}{45 \times 50 + 15 \times 20} = 0,765$$

$$K_k = \frac{45 \times 50 - 15 \times 20}{\sqrt{(45 + 20) \times (20 + 50) \times (45 + 15) \times (15 + 50)}} = 0,463$$

Полученные значения коэффициентов свидетельствуют о наличии существенной связи между исследуемыми признаками.

В тех случаях, когда качественный признак состоит более чем из двух групп, для определения тесноты связи между признаками используются коэффициенты взаимной сопряженности К. Пирсона и А. Чупрова.

Исходная информация для расчета этих коэффициентов представлена в таблице 8.9:

Таблица 8.9

	I	II	III	Итого
I	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{x1}
II	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{x2}
III	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{x3}
Итого	n_{y1}	n_{y2}	n_{y3}	N

Формулы для расчета коэффициентов выглядят следующим образом,

$$K_{\Pi} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}}; \quad K_{\chi} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(k_1 - 1) \times (k_2 - 1)}}}$$

где φ - сумма отношений квадратов частот каждой клетки таблицы к произведению итоговых частот соответствующего столбца и строки:

$$-1 \text{ или } \varphi^2 = \sum \frac{\frac{n_{xy}^2}{n_x}}{n_y} - 1; \quad \varphi^2 = \sum \frac{\frac{n_{xy}^2}{n_y}}{n_x} - 1$$

k_1 - число значений (групп) первого признака;

k_2 - число значений (групп) второго признака.

Коэффициент взаимной сопряженности А. Чупрова отличается от коэффициента К. Пирсона тем, что учитывает число групп по каждому признаку (k_1 и k_2), что дает более точный результат.

Коэффициенты взаимной сопряженности принимают значения от 0 до 1. Чем ближе K_{Π} и K_{χ} к 1, тем теснее связь между признаками.

Рассмотрим использование коэффициентов К. Пирсона и А. Чупрова на следующем условном примере.

Пример 4.

Зависимость между доходами потребителей и отношением к цене нового товара представлена в таблице 8.10.

Таблица 8.10.

Доходы потребителей	Цена товара			Итого
	низкая	средняя	высокая	
Низкий	135	85	20	240
Средний	40	105	25	170
Высокий	5	15	70	90
Итого	180	205	115	500

Рассчитаем величину φ^2 по следующей формуле:

$$\varphi^2 = \sum \frac{n_{xy}^2}{n_y} - 1;$$

$$\varphi^2 = \frac{135^2}{180} + \frac{85^2}{205} + \frac{20^2}{115} + \frac{40^2}{180} + \frac{105^2}{205} + \frac{25^2}{115} + \frac{5^2}{180} + \frac{15^2}{205} + \frac{70^2}{115} - 1 = 0,471;$$

Тогда

$$K_n = \sqrt{\frac{0,471}{1 + 0,471}} = 0,566$$

$$K_n = \sqrt{\frac{0,471}{\sqrt{(3-1) \times (3-1)}}} = 0,485$$

Рассчитанные значения коэффициентов свидетельствуют о достаточно существенной связи между доходами потребителей и ценой на новый товар.

Для расчета коэффициентов взаимной сопряженности К. Пирсона и А. Чупрова можно использовать и другие формулы. Так:

$$K_n = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}; K_{\varphi} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(k_1 - 1) \times (k_2 - 1)}}}, \text{ поскольку } \varphi^2 = \frac{\chi^2}{n},$$

где $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$, а n_{ij} и n'_{ij} - эмпирические и теоретические частоты i-ой строки и j-го столбца.

Если признаки не связаны друг с другом, то распределение частот в группе должно быть пропорционально итоговому распределению частот, т.е., например, распределение частот по цене товара в группе с низкими доходами

пропорционально распределению частот по цене товара по всем видам доходов. Или распределение частот по доходам в группе с низкой ценой товара пропорционально распределению частот по доходам по всем видам товаров. Такое распределение можно рассматривать как теоретическое, так как его частоты характеризуют отсутствие связи между признаками.

Рассчитаем теоретические частоты:

$$\begin{aligned}n'_{11} &= \frac{240 \times 180}{500} = 86,4; \quad n'_{21} = \frac{170 \times 180}{500} = 61,2; \\n'_{12} &= \frac{240 \times 205}{500} = 98,4; \quad n'_{22} = \frac{170 \times 205}{500} = 69,7; \\n'_{13} &= \frac{240 \times 115}{500} = 55,2; \quad n'_{23} = \frac{170 \times 115}{500} = 39,1; \\n'_{31} &= \frac{90 \times 180}{500} = 32,4; \quad n'_{32} = \frac{90 \times 205}{500} = 36,9; \\n'_{33} &= \frac{90 \times 115}{500} = 20,7;\end{aligned}$$

Представим эмпирические и теоретические частоты в таблице 8.11.

Таблица 8.11

Доходы потребителей	Цена товара					
	низкая		средняя		Высокая	
	n_{ij}	n'_{ij}	n_{ij}	n'_{ij}	n_{ij}	n'_{ij}
Низкий	135	86,4	85	98,4	20	55,2
Средний	40	61,2	105	69,7	25	39,1
Высокий	5	32,4	15	36,9	70	20,7

Рассчитаем χ^2 :

$$\begin{aligned}\chi^2_{расч} &= \left[\frac{(135 - 86,4)^2}{86,4} + \frac{(85 - 98,4)^2}{98,4} + \frac{(20 - 55,2)^2}{55,2} + \frac{(40 - 61,2)^2}{61,2} + \frac{(105 - 69,7)^2}{69,7} + \frac{(25 - 39,1)^2}{39,1} + \right. \\&\quad \left. \frac{(5 - 32,4)^2}{32,4} + \frac{(15 - 36,9)^2}{36,9} + \frac{(70 - 20,7)^2}{20,7} \right] = 235,499\end{aligned}$$

По таблице (см. Приложение 3) определяется либо вероятность появления $\chi^2_{расч}$, соответствующего данному числу степеней свободы, либо устанавливается $\chi^2_{табл}(\alpha=0,05 \text{ или } 0,01)$ и числа степеней свободы $(k_1-1)(k_2-1)$.

По таблице (см. Приложение 3) $\chi^2_{табл}(\alpha=0,05; (3-1)(3-1)=9.488)$, т.е. $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$. Следовательно, гипотеза об отсутствии связи принимается с $\alpha=0,05$ или отвергается с $P=95\%$.

Рассчитаем коэффициенты К. Пирсона и А. Чупрова:

$$K_n = \sqrt{\frac{235,499}{500 + 235,499}} = 0,566$$

$$K_q = \sqrt{\frac{235,499}{\sqrt{500 \times (3-1) \times (3-1)}}} = 0,485$$

Использование для расчетов разных формул дало практически одинаковый результат.

Итак, представленные методы определения тесноты связи показаны были на различных примерах.

Основной задачей корреляционного анализа является – оценка тесноты (силы) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния значений параметра Y вокруг условного среднего $\bar{Y}_x$. Большое рассеяние говорит о слабой зависимости Y от X , либо об ее отсутствии и, наоборот, малое рассеяние указывает на наличие достаточно $\bar{Y}_x$ сильной зависимости.

Когда связь установлена и определена количественно, переходят к построению уравнения регрессии и проводят регрессионный анализ.

Основная задача регрессионного анализа – установление формы корреляционной связи, т.е. вида функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т.д.).

Пример 5.

Проведем корреляционно-регрессионный анализ зависимости величины чистой прибыли строительных компаний от выручки (таблица 8.12).

Таблица 8.12

Рейтинг 30-ти компаний, занимающихся строительством по величине выручки и чистой прибыли за 2021 г., (в млн. руб.)

№ /п	Название компании	Выручка ,млн. руб., X_i	Чистая прибыль, млн. руб., Y_i	$X_i * Y_i$	X^2	Y^2
1	АО "РЖДстрой"	126 774	112 324,0	-1 562 362 776	16 071 647 076	151 880 976
2	АО "ТРЕСТ КОКСОХИММОНТАЖ"	51 668	230,0	11 883 640	2 669 582 224	52 900
3	ООО "БРЯНСКАГРОСТРОЙ"	46 776	-240,0	-11 226 240	2 187 994 176	57 600
4	ООО "Стройпарк"	39 266	-101,0	-3 965 866	1 541 818 756	10 201
5	ООО "СТРОЙКРАФТ"	38 639	88,8	3 431 143	1 492 972 321	7 885
6	ООО "Газпромнефть-Развитие"	38 600	174,0	6 716 400	1 489 960 000	30 276
7	ООО "СПЕЦИАЛИЗИРОВАНН АЯ СТРОИТЕЛЬНАЯ КОМПАНИЯ "ГАЗРЕГИОН"	38 476	-1 050,0	-40 399 800	1 480 402 576	1 102 500
8	ООО "СОВРЕМЕННЫЕ ГОРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"	28 350	1 289,0	36 543 150	803 722 500	1 661 521
9	ООО "ГРУППА КОМПАНИЙ "АВТОНЕРУД"	27 166	2 176,0	59 113 216	737 991 556	4 734 976
10	ООО "ЭСТА КОНСТРАКШЕН"	25 331	399,0	10 107 069	641 659 561	159 201

11	ООО "РСУ-2 ВОРОНЕЖГРАЖДАНСТР ОЙ"	25 195	8 895,0	224 109 525	634 788 025	79 121 025
12	ООО "ТРЕСТ РОССПЕЦЭНЕРГОМОНТ АЖ"	17 504	-1 372,0	-24 015 488	306 390 016	1 882 384
13	АО "НЭПТ"	17 500	7 820,0	136 850 000	306 250 000	61 152 400
14	ООО "ЛСР.Строительство- Северо-Запад"	17 482	267,0	4 667 694	305 620 324	71 289
15	ООО "Корпорация Акционерной компании "Электросевкавмонтаж"	16 319	1 185,0	19 338 015	266 309 761	1 404 225
16	ООО "Евростройхолдинг+"	15 309	98,5	1 507 937	234 365 481	9 702
17	АО "ПРОМФИНСТРОЙ"	14 928	66,5	992 712	222 845 184	4 422
18	ООО "Энергетическое Строительство"	14 103	904,0	12 749 112	198 894 609	817 216
19	ООО "АЗОТ МАЙНИНГ СЕРВИС"	13 039	200,0	2 607 800	170 015 521	40 000
20	ООО ГСИ ВОЛГОГРАДСКАЯ ФИРМА "НЕФТЕЗАВОДМОНТАЖ "	12 278	189,0	2 320 542	150 749 284	35 721
21	ООО "РЕСТРО"	10 918	622,0	6 790 996	119 202 724	386 884
22	ООО "ПРОМСТРОЙМОНТАЖ"	10 706	884,0	9 464 104	114 618 436	781 456

23	ООО "ОРЕНБУРГ- РЕАЛСТРОЙ"	10 106	556,0	5 618 936	102 131 236	309 136
24	ООО "ИНЖИНИРИНГОВАЯ КОМПАНИЯ ЭНЕРГИЯ"	9 088	365,0	3 317 120	82 591 744	133 225
25	ООО "Интерстрой"	8 832	-171,0	-1 510 272	78 004 224	29 241
26	ООО "МОНТАЖТЕХСТРОЙ"	8 377	10,7	89 634	70 174 129	114
27	ООО "Заполярная строительная компания"	8 366	-5 530,0	-46 263 980	69 989 956	30 580 900
28	АО "СОСНОВОБОРЭЛЕКТРО МОНТАЖ"	8 352	174,0	1 453 248	69 755 904	30 276
29	ООО "МОНОЛИТСТРОЙ"	8 284	52,1	431 596	68 624 656	2 714
30	ООО "ПРОМСПЕЦСТРОЙ"	8 223	16,0	131 568	67 617 729	256
	ИТОГО	715955,0	5 873,6	-1 129 509 265,0	32 756 689 689,0	336 490 623,8
	СРЕДНЯЯ	23 865,2	195,8	-37 650 308,8	1 091 889 656,3	11 216 354,1

Линейный (парный) коэффициент корреляции определяет степень тесноты связи для выборочной совокупности 30-ти компаний между показателями величины выручки и чистой прибыли.

Найдем среднее квадратическое отклонение по выборочным данным для величины выручки:

$$S_x = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \sqrt{1091889656,3 - (23865,2)^2} = 22854,83 \text{ млн.руб.}$$

Затем найдем среднее квадратическое отклонение по выборочным данным для чистой прибыли:

$$S_y = \sqrt{\bar{Y}^2 - (\bar{Y})^2} = \sqrt{11216354,1 - (195,8)^2} = 3343,35 \text{ млн. руб.}$$

Парный коэффициент корреляции определим по формуле:

$$r = \frac{\bar{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-37\,650\,308,8 - 23\,865,2 \cdot 195,8}{22854,83 \cdot 3343,35} = -0,554$$

Рассчитанное значение парного коэффициента корреляции показывает умеренную обратную связь между чистой прибылью и выручкой строительных компаний.

В регрессионном анализе предполагается, что математическое ожидание случайной величины ε равно нулю и ее дисперсия одинакова для всех наблюдаемых значений Y . Отсюда следует, что рассеяние данных возле линии регрессии должно быть одинаково при всех значениях параметра X .

Линейная регрессия. Коэффициенты линейной регрессии $y = a_0 + a_1x$ вычисляются по следующим формулам (все суммы берутся по n парам исходных данных):

$$a_1 = \frac{n(\sum y_i x_i) - \sum y_i \sum x_i}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}; \quad a_0 = \frac{1}{n}(\sum y_i - a_1 \sum x_i)$$

Метод наименьших квадратов позволяет определить коэффициенты уравнения регрессии таким образом, чтобы точки, построенные по исходным данным (x_i, y_i) , , лежали как можно ближе к точкам линии регрессии.

Формально это записывается как минимизация суммы квадратов отклонений (ошибок) функции регрессии и исходных точек

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^D - y_i)^2 \rightarrow \min$$

где y_i^D – значение, вычисленное по уравнению регрессии; $(y_i^D - y_i)$ отклонение ε (ошибка, остаток); n – количество пар исходных данных.

Парная регрессия.

Парная регрессия – это уравнение, описывающее корреляционную связь между парой переменных: зависимой (эндогенной) переменной y (результатом) и независимой (экзогенной) переменной x (фактором).
 $y = f(x)$

Функция может быть как линейной $y = ax + b$, так и нелинейной, например, степенной $y = a \cdot x^b$, показательной $y = a \cdot b^x$ и т.д, где a, b - параметры.

Рассмотрим парную регрессию, описывающую линейную связь между двумя переменными, которая представлена в следующей форме:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Где y_i – i -е значение зависимой переменной y ;

x_i – i -е значение переменной x ;

α, β - генеральные параметры парной линейной регрессии;

N - объем генеральной совокупности.

Это уравнение можно использовать для изучения зависимости потребления (y) от уровня доходов (x); инвестиций (y) от процентной ставки (x) и других задач. Уравнение парной регрессии относится к генеральной совокупности. Практически регрессия строится по данным выборки и записывается в виде: $y_i = a + bx_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$, где n – объем выборки; a, b – выборочные оценки параметров парной линейной регрессии.

Данные выборки могут быть получены по объектам: строительных компаний, домохозяйствам, агропромышленным комплексам, банкам, регионам и пр. – на какой-то один период (месяц, квартал, год). Это так называемые *пространственные* выборки. А могут быть получены данные по времени, образующие временные ряды.

Итак, задача состоит в том, чтобы по данным выборки оценить неизвестные параметры линейной парной регрессии α и β . Параметр α соответствует отрезку прямой, отсекаемому линией регрессии при пересечении ею оси ординат. Параметр β определяет наклон линии регрессии к оси абсцисс.

Вначале по фактическим данным таблицы устанавливаем принадлежность переменных к группам независимых и зависимых переменных. Пусть x_i - годовая выручка i -той строительной компании, а y_i - чистая прибыль строительной компании за год..

Наша задача состоит в том, чтобы построить линейную парную регрессию:

$$y = a + bx.$$

Параметр a называют свободным членом регрессии; параметр b - коэффициент регрессии, который измеряет, на сколько единиц в среднем изменится y при изменении x на одну единицу. Параметр $a > 0$, если вариация зависимой переменной (V_y) превосходит вариацию независимой переменной (V_x); иными словами, вариация результата меньше вариации фактора – *коэффициент вариации* по фактору x выше коэффициента вариации для результата y : $V_x > V_y$. В противном случае $a < 0$. Иногда, если данные выборки включают значения x_i , равные нулю, то свободный член интерпретируется как значение y при $x_i = 0$. Однако чаще свободный член не имеет экономического смысла. Параметр $b > 0$ в случае прямой связи между x и y , $b < 0$ в случае обратной связи между x и y .

Если бы параметры уравнения регрессии были бы известны, то зависимость выражалась графически в виде прямой линии $y_i = a + bx_i$ на графике, где $a = \bar{y} - b\bar{x}$. Очевидно, что не все наблюдаемые точки будут лежать непосредственно на прямой $y_i = a + bx_i$. Отклонения обусловлены случайной ошибкой e_i . Эта ошибка может быть вызвана случайным искажением значений переменных, ошибками в измерении переменных, наконец, неправильным выбором линейной формы регрессии, тогда как на самом деле связь между x и y не линейна. Указанные причины по-разному влияют на распределение ошибки e_i .

Параметры a и b должны быть оценены так, чтобы линия $(a + bx_i)$ наилучшим образом подходила к данным. Поскольку по одним и тем же данным можно провести несколько линий, возникает необходимость понять, чем одна линия лучше другой. Пусть наилучшая линия имеет вид: $\hat{y}_i = a + bx_i$, где $\hat{y}$, a , b - выборочные оценки.

Уравнение вида $\hat{y}_i = a + bx_i$ (или в более общем виде $\hat{y}_x = a + b \cdot x$) позволяет по заданным значениям фактора x иметь теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора x . Качество подобранной линии, т.е. то, насколько хорошо она соответствует

фактическим данным, можно измерить как
$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$
.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т.е. путем сравнения величины остаточной дисперсии $D_{ост}$ рассчитанной при разных моделях. В практических исследованиях, как правило, имеют место отклонения фактических данных от теоретических $(y_i - \hat{y}_i)$. Они обусловлены влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов. Величина этих отклонений и лежит в основе расчета остаточной дисперсии:

$$D_{ост} = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y}_x)^2$$

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем в меньшей мере наблюдается влияние прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов, лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным. При обработке статистических данных на компьютере перебираются разные математические функции в автоматическом режиме, и из них выбирается та, для которой остаточная дисперсия является наименьшей.

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на **методе наименьших квадратов (МНК)**.

МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b , при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака (y) от расчетных (теоретических) $\hat{y}_x$ минимальна: $\sum_i (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 \rightarrow \min$

Исходные данные и промежуточные расчеты для проведения регрессионного анализа по 30 строительным компаниям представлены в таблице 8.13.

Таблица 8.13.

№ п/п	Название компании	Выручка, млн. руб., X_i	Чистая прибыль, млн. руб., Y_i	X_i^2	$X_i * Y_i$	$\hat{Y}$
1	АО "РЖДстрой"	126 774	-12 324,0	16 071 647 076	-1 562 362 776	-8 142,38
2	АО "ТРЕСТ КОКСОХИММОНТАЖ"	51 668	230,0	2 669 582 224	11 883 640	-2 056,93
3	ООО "БРЯНСКАГРОСТРОЙ"	46 776	-240,0	2 187 994 176	-11 226 240	-1 660,56
4	ООО "Стройпарк"	39 266	-101,0	1 541 818 756	-3 965 866	-1 052,06
5	ООО "СТРОЙКРАФТ"	38 639	88,8	1 492 972 321	3 431 143	-1 001,26
6	ООО "Газпромнефть-Развитие"	38 600	174,0	1 489 960 000	6 716 400	-998,10
7	ООО "СПЕЦИАЛИЗИРОВАННА Я СТРОИТЕЛЬНАЯ КОМПАНИЯ "ГАЗРЕГИОН"	38 476	-1 050,0	1 480 402 576	-40 399 800	-988,05
8	ООО "СОВРЕМЕННЫЕ ГОРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"	28 350	1 289,0	803 722 500	36 543 150	-167,60
9	ООО "ГРУППА КОМПАНИЙ "АВТОНЕРУД"	27 166	2 176,0	737 991 556	59 113 216	-71,66

10	ООО "ЭСТА КОНСТРАКШЕН"	25 331	399,0	641 659 561	10 107 069	77,02
11	ООО "РСУ-2 ВОРОНЕЖГРАЖДАНСТРО Й"	25 195	8 895,0	634 788 025	224 109 525	88,04
12	ООО "ТРЕСТ РОССПЕЦЭНЕРГОМОНТА Ж"	17 504	-1 372,0	306 390 016	-24 015 488	711,20
13	АО "НЭПТ"	17 500	7 820,0	306 250 000	136 850 000	711,52
14	ООО "ЛСР.Строительство- Северо-Запад"	17 482	267,0	305 620 324	4 667 694	712,98
15	ООО "Корпорация Акционерной компании "Электросевкавмонтаж"	16 319	1 185,0	266 309 761	19 338 015	807,21
16	ООО "Евростройхолдинг+"	15 309	98,5	234 365 481	1 507 937	889,05
17	АО "ПРОМФИНСТРОЙ"	14 928	66,5	222 845 184	992 712	919,92
18	ООО "Энергетическое Строительство"	14 103	904,0	198 894 609	12 749 112	986,76
19	ООО "АЗОТ МАЙНИНГ СЕРВИС"	13 039	200,0	170 015 521	2 607 800	1 072,97
20	ООО ГСИ ВОЛГОГРАДСКАЯ ФИРМА "НЕФТЕЗАВОДМОНТАЖ"	12 278	189,0	150 749 284	2 320 542	1 134,63
21	ООО "РЕСТРО"	10 918	622,0	119 202 724	6 790 996	1 244,83
22	ООО "ПРОМСТРОЙМОНТАЖ"	10 706	884,0	114 618 436	9 464 104	1 262,01
23	ООО "ОРЕНБУРГ- РЕАЛСТРОЙ"	10 106	556,0	102 131 236	5 618 936	1 310,62
24	ООО "ИНЖИНИРИНГОВАЯ КОМПАНИЯ ЭНЕРГИЯ"	9 088	365,0	82 591 744	3 317 120	1 393,10
25	ООО "Интерстрой"	8 832	-171,0	78 004 224	-1 510 272	1 413,85

26	ООО "МОНТАЖТЕХСТРОЙ"	8 377	10,7	70 174 129	89 634	1 450,71
27	ООО "Заполяная строительная компания"	8 366	-5 530,0	69 989 956	-46 263 980	1 451,60
28	АО "СОСНОВОБОРЭЛЕКТРО МОНТАЖ"	8 352	174,0	69 755 904	1 453 248	1 452,74
29	ООО "МОНОЛИТСТРОЙ"	8 284	52,1	68 624 656	431 596	1 458,25
30	ООО "ПРОМСПЕЦСТРОЙ"	8 223	16,0	67 617 729	131 568	1 463,19
	Итого:	715 955,0	5 873,6	32 756 689 689,0	-1 129 509 265,0	5 873,6
	Средняя:	23 865,2	195,8	1 091 889 656,3	-37 650 308,8	195,8

Так как зависимость линейная, следовательно, уравнение регрессии примет вид:

$$\hat{y} = a + b * X$$

Оценим параметры уравнения b_1 и b_0 по формулам:

$$b = n * \frac{\sum_{i=1}^n X_i * Y_i - \sum_{i=1}^n X_i * \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} = -0,081$$

$$a = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n y_i - (b * \sum_{i=1}^n x_i) = 2129,458$$

Следовательно, модель с помощью уравнения регрессии чистой прибыли строительных компаний имеет вид:

$$\hat{y} = 2129,458 - 0,081 * X$$

Она количественно описывает связь годовой выручки и годовой чистой прибыли строительных компаний. Сделаем экономические выводы.

Подставив в уравнение значения x , найдем теоретические значения y ($\hat{y}$) (см. последнюю графу таблицы 8.13).

Параметр $a=2129,458$, экономического смысла не имеет. Параметр $b=-0,081$ характеризует граничный размер выручки. То есть, когда выручка возрастет на единицу, то объем чистой прибыли снижается на 0,82 единицы.

Определим также коэффициент эластичности (относительный эффект влияния фактора x на результат y). Для *линейной регрессии* $\hat{y}_x = a + bx$ функция и эластичность следующие: $f'(x) = b$, $\Theta = b \cdot \frac{x}{a + bx}$

Так как коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x , то обычно рассчитывается **средний показатель эластичности** по формуле

$$\bar{\Theta} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Определим коэффициент эластичности относительного эффекта влияния фактора x , на результат y . Для линейной регрессии эластичность будет определяться по формуле:

$$\Theta = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -0,081 \cdot \frac{23865,2}{195,3} = -9,876$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменится значение y при изменении x на 1%. На основании полученного коэффициента эластичности можно сделать вывод, что с увеличением выручки строительных компаний на 1%, чистая прибыль снижается на 9,876%.

Фактические значения результативного признака отличаются от теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии, т.е. y и $\hat{y}$. Чем меньше это отличие, тем ближе теоретические значения подходят к эмпирическим данным, тем лучше качество модели. Величина отклонений фактических и расчетных значений результативного признака $(y - \hat{y}_x)$ по каждому наблюдению представляет собой ошибку аппроксимации. Их число равно объему совокупности. В отдельных случаях ошибка аппроксимации может оказаться равной нулю. Отклонения $(y - \hat{y}_x)$ несравнимы между собой, исключая величину, равную нулю.

Поскольку $(y - \hat{y}_x)$ может быть величиной как положительной, так и отрицательной, то ошибка аппроксимации для каждого наблюдения принято определять в процентах по модулю.

Отклонения $(y - \hat{y}_x)$ можно рассматривать как абсолютную ошибку аппроксимации, а $\left| \frac{y - \hat{y}_x}{y} \right| \cdot 100$ - как относительную ошибку аппроксимации. Чтобы иметь общее суждение о качестве модели из относительных отклонений по каждому наблюдению, определяют среднюю ошибку аппроксимации, которая также оценивает качество построенной модели.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений от фактических. Она вычисляется по формуле:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\% \quad \text{или} \quad \bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i, \quad \text{где} \quad A_i = \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\%$$

Допустимый предел значений $\bar{A}$ - не более 8 – 10%.

Показатели для расчета коэффициентов средней ошибки аппроксимации по выборочным данным строительных компаний представлены в таблице 8.14.

Таблица 8.14.

№ п/п	Название компании	Выручка, млн .руб., X_i	Чистая прибыль, млн. руб., Y_i	Ошибка аппроксимации , A
1	АО "РЖДстрой"	126 774	-12 324,0	0,339
2	АО "ТРЕСТ КОКСОХИММОНТАЖ"	51 668	230,0	9,943
3	ООО "БРЯНСКАГРОСТРОЙ"	46 776	-240,0	5,919
4	ООО "Стройпарк"	39 266	-101,0	9,416
5	ООО "СТРОЙКРАФТ"	38 639	88,8	12,275
6	ООО "Газпромнефть-Развитие"	38 600	174,0	6,736
7	ООО "СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ	38 476	- 1 050,0	0,059

	<u>СТРОИТЕЛЬНАЯ КОМПАНИЯ "ГАЗРЕГИОН"</u>			
8	<u>ООО "СОВРЕМЕННЫЕ ГОРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"</u>	28 350	1 289,0	1,130
9	<u>ООО "ГРУППА КОМПАНИЙ "АВТОНЕРУД"</u>	27 166	2 176,0	1,033
10	<u>ООО "ЭСТА КОНСТРАКШЕН"</u>	25 331	399,0	0,807
11	<u>ООО "РСУ-2 ВОРОНЕЖГРАЖДАНСТРОЙ"</u>	25 195	8 895,0	0,990
12	<u>ООО "ТРЕСТ РОССПЕЦЭНЕРГОМОНТАЖ"</u>	17 504	- -1 372,0	1,518
13	<u>АО "НЭПТ"</u>	17 500	7 820,0	0,909
14	<u>ООО "ЛСР.Строительство- Северо-Запад"</u>	17 482	267,0	1,670
15	<u>ООО "Корпорация Акционерной компании "Электросевкавмонтаж"</u>	16 319	1 185,0	0,319
16	<u>ООО "Евростройхолдинг+"</u>	15 309	98,5	8,026
17	<u>АО "ПРОМФИНСТРОЙ"</u>	14 928	66,5	12,833
18	<u>ООО "Энергетическое Строительство"</u>	14 103	904,0	0,092
19	<u>ООО "АЗОТ МАЙНИНГ СЕРВИС"</u>	13 039	200,0	4,365
20	<u>ООО ГСИ ВОЛГОГРАДСКАЯ ФИРМА "НЕФТЕЗАВОДМОНТАЖ"</u>	12 278	189,0	5,003
21	<u>ООО "РЕСТРО"</u>	10 918	622,0	1,001
22	<u>ООО "ПРОМСТРОЙМОНТАЖ"</u>	10 706	884,0	0,428
23	<u>ООО "ОРЕНБУРГ- РЕАЛСТРОЙ"</u>	10 106	556,0	1,357
24	<u>ООО "ИНЖИНИРИНГОВАЯ КОМПАНИЯ ЭНЕРГИЯ"</u>	9 088	365,0	2,817
25	<u>ООО "Интерстрой"</u>	8 832	-171,0	9,268

26	ООО "МОНТАЖТЕХСТРОЙ"	8 377	10,7	134,581
27	ООО "Заполярная строительная компания"	8 366	-5 530,0	1,262
28	АО "СОСНОВОБОРЭЛЕКТРОМОНТАЖ"	8 352	174,0	7,349
29	ООО "МОНОЛИТСТРОЙ"	8 284	52,1	26,989
30	ООО "ПРОМСПЕЦСТРОЙ"	8 223	16,0	90,449
	Итого:	715 955,0	5 873,6	358,9
	Средняя:	23 865,2	195,8	12,0

Рассчитаем ошибку аппроксимации по каждой строительной компании по формуле:

$$A = \left| \frac{y_i - \hat{y}}{y_i} \right| * 100\%$$

Рассчитаем среднюю ошибку аппроксимации для всех строительных компаний по формуле:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \left| \frac{y_i - \hat{y}}{y_i} \right| * 100\% = 12.0\%$$

Допустимый предел средней ошибки аппроксимации 8-10%, однако ее значение в отдельных случаях может достигать 12%.

Критерий Фишера.

После установления связи между переменными модели характеризуют значимость связи, которая в корреляционном анализе в целом для модели чаще всего осуществляется с помощью F - критерия Фишера

В корреляционном анализе существует уравнение, которое связывает общую сумму квадратов с остаточной суммой квадратов и суммой квадратов, которая объясняет регрессию:

$$S_{общ} = S_{факт} + S_{ост},$$

где $S_{общ}$ - общая сумма квадратов отклонений:

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 ;$$

$S_{факт}$ - регрессионная (или факторная) сумма квадратов отклонений:

$$S_{факт} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 ;$$

$S_{ост}$ - остаточная сумма квадратов отклонений:

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 .$$

Каждая из отмеченных сумм связана со степенями свободы.

Под термином «степень свободы» в эконометрии понимают число, которое показывает, сколько независимых элементов информации из переменных y_i ($i = 1...n$) нужно для расчета рассматриваемой суммы квадратов, или «степень свободы» - это значение разности между количеством испытаний и количеством констант, установленных в этих испытаниях.

Для общей суммы квадратов $S_{общ}$ нужно $(n-1)$ независимых чисел, т.е. степеней свободы; для остаточной суммы квадратов $S_{ост}$ - $(n-m)$ степеней свободы; для регрессионной суммы квадратов $S_{факт}$ - $(m-1)$ степеней свободы (m - количество параметров в уравнении регрессии).

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим **средний квадрат отклонений**, или, что то же самое, **дисперсию на одну степень свободы D**.

$$D_{общ} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} ; \quad D_{факт} = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} ; \quad D_{ост} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} .$$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя регрессионную (факторную) и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы, получим величину F -

$$F = \frac{D_{факт}}{D_{ост}}$$

отношения (F - критерий Фишера):

где F - критерий для проверки нулевой гипотезы H_0 : $D_{факт} = D_{ост}$.

Другими словами, F – *тест* - оценивание качества уравнения регрессии – состоит в проверке гипотезы H_0 о *статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи*.

Если нулевая гипотеза справедлива, то факторная и остаточная дисперсии не отличаются друг от друга. Для H_0 необходимо опровержение, чтобы факторная дисперсия превышала остаточную в несколько раз. Английским статистиком Снедекором разработаны таблицы критических значений F – отношений, при разных уровнях существенности нулевой гипотезы и различном числе степеней свободы. Табличное значение F – критерия - это максимальная величина отношения дисперсий, которая может иметь место при случайном расхождении для данного уровня вероятности наличия нулевой гипотезы. Иначе, $F_{\text{табл}}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α . Уровень значимости α – вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается равной 0,05 или 0,01.

Вычисленное значение F –отношения признается достоверным (отличным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза об отсутствии связи признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи, т.е. признается их статистическая значимость и надежность: $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, H_0 отклоняется.

Если же величина окажется меньше табличной $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}$, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например, 0,05) и она не может быть отклонена без серьезного риска сделать неправильный вывод о наличии связи. В этом случае H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

Этот критерий рассчитывается по формуле:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2 / m}{\sum (y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)}$$

где n – число единиц совокупности, m – число параметров при переменных.

В случае **парной регрессии** рассчитывается по формулам:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2 / 1}{\sum (y - \hat{y})^2 / (n - 2)}$$

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n - 2)$$

По статистическим таблицам F – распределения Фишера со степенями свободы 1, $(n-2)$ и уровнем доверия $(1-\alpha)$ Выбирается $F_{\text{табл}}$. Возможная ошибка (уровень значимости) α может приниматься равной 0,05 или 0,01. Это означает, что в 5% или 1% случаев мы можем ошибиться, а в 95% или 99% случаев (уровень доверия) наши выводы будут правильными. При условии $F > F_{\text{табл}}$ построенная регрессионная модель отвечает фактическим данным.

Представим в таблице 8.15 данные промежуточных расчетов для определения критерия Фишера по выручке и чистой прибыли 30 строительных компаний.

Таблица 8.15.

№ п/п	Наименование компании	X Выручка, млн. руб.	Y Прибыль, млн. руб.	$(y-\bar{y})^2$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$	$(y-\hat{y})^2$	$(x-\bar{x})^2$
1	АО "РЖДстрой"	126 774	-12 324,0	1567450 58,18	69 525 087,44	17 485 913,69	16 071 435 973,094
2	АО "ТРЕСТ КОКСОХИММОНТА Ж"	51 668	230,0	1170,55	5 074 746,43	5 230 063,09	2 669 496 187,329
3	ООО "БРЯНСКАГРОСТРО Й"	46 776	-240,0	189910,0 2	3 446 021,69	2 017 989,75	2 187 916 285,470
4	ООО "Стройпарк"	39 266	-101,0	88082,33	1 557 129,30	904 521,22	1 541 753 371,094
5	ООО "СТРОЙКРАФТ"	38 639	88,8	11446,15	1 432 922,25	1 188 232,19	1 492 907 980,172
6	ООО "Газпромнефть- Развитие"	38 600	174,0	474,66	1 425 366,97	1 373 819,98	1 489 895 724,115
7	ООО "СПЕЦИАЛИЗИРОВ АННАЯ СТРОИТЕЛЬНАЯ"	38 476	-1 050,0	1551984, 42	1 401 477,75	3 837,36	1 480 338 506,599

	<u>КОМПАНИЯ "ГАЗРЕГИОН"</u>						
8	<u>ООО "СОВРЕМЕННЫЕ ГОРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"</u>	28 350	1 289,0	1195115, 39	132 047,09	2 121 672,44	803 675 292,377
9	<u>ООО "ГРУППА КОМПАНИЙ "АВТОНЕРУД"</u>	27 166	2 176,0	3921244, 85	71 529,21	5 051 988,00	737 946 319,970
10	<u>ООО "ЭСТА КОНСТРАКШЕН"</u>	25 331	399,0	41295,66	14 106,05	103 672,55	641 617 380,605
11	<u>ООО "РСУ-2 ВОРОНЕЖГРАЖД АСТРОЙ"</u>	25 195	8 895,0	7567631 2,62	11 609,96	77 562 594,65	634 746 071,072
12	<u>ООО "ТРЕСТ РОССПЕЦЭНЕРГОМ ОНТАЖ"</u>	17 504	-1 372,0	2457955, 03	265 649,98	4 339 718,49	306 360 869,097
13	<u>АО "НЭПТ"</u>	17 500	7 820,0	5812862 8,95	265 984,17	50 530 442,41	306 220 859,757
14	<u>ООО "ЛСР.Строительство- Северо-Запад"</u>	17 482	267,0	5071,34	267 490,65	198 899,63	305 591 213,731
15	<u>ООО "Корпорация Акционерной компания "Электросевкавмонта ж"</u>	16 319	1 185,0	978543,0 2	373 842,80	142 722,62	266 282 587,354
16	<u>ООО "Евростройхолдинг+"</u>	15 309	98,5	9464,70	480 612,11	624 967,09	234 339 989,203
17	<u>АО "ПРОМФИНСТРОЙ"</u>	14 928	66,5	16715,04	524 367,72	728 324,09	222 820 326,642
18	<u>ООО "Энергетическое Строительство"</u>	14 103	904,0	501566,1 3	625 646,00	6 849,97	198 871 125,429
19	<u>ООО "АЗОТ МАЙНИНГ СЕРВИС"</u>	13 039	200,0	17,75	769 459,30	762 085,28	169 993 809,198
20	<u>ООО ГСИ ВОЛГОГРАДСКАЯ ФИРМА "НЕФТЕЗАВОДМОН ТАЖ"</u>	12 278	189,0	46,06	881 435,91	894 225,27	150 728 839,413
21	<u>ООО "РЕСТРО"</u>	10 918	622,0	181657,8 1	1 100 489,01	387 915,49	119 184 544,080
22	<u>ООО "ПРОМСТРОЙМОНТ АЖ"</u>	10 706	884,0	473637,5 9	1 136 823,41	142 888,45	114 600 609,101
23	<u>ООО "ОРЕНБУРГ- РЕАЛСТРОЙ"</u>	10 106	556,0	129753,6 5	1 242 855,10	569 452,52	102 114 408,219
24	<u>ООО "ИНЖИНИРИНГОВ АЯ КОМПАНИЯ ЭНЕРГИЯ"</u>	9 088	365,0	28633,15	1 433 568,92	1 056 997,94	82 576 611,389
25	<u>ООО "Интерстрой"</u>	8 832	-171,0	134532,4 6	1 483 669,53	2 511 738,14	77 989 517,679
26	<u>ООО "МОНТАЖТЕХСТРО Й"</u>	8 377	10,7	34257,07	1 574 839,36	2 073 636,59	70 160 180,344
27	<u>ООО "Заполярная строительная компания"</u>	8 366	-5 530,0	3278463 2,95	1 577 077,12	48 742 794,11	69 976 025,661

28	<u>АО</u> <u>"СОСНОВОБОРЭЛЕ</u> <u>КТРОМОНТАЖ"</u>	8 352	174,0	474,66	1 579 927,47	1 635 171,71	69 741 996,973
29	<u>ООО</u> <u>"МОНОЛИТСТРОЙ"</u>	8 284	52,1	20645,86	1 593 808,65	1 977 252,24	68 610 862,207
30	<u>ООО</u> <u>"ПРОМСПЕЦСТРОЙ</u> <u>"</u>	8 223	16,0	32323,25	1 606 312,55	2 094 360,43	67 604 036,784
Сумма		715 955,0	5 873,6	3353406 51,27	102 875 903,91	232 464 747,36	32 755 497 504,16
Среднее значение		23 865,2	195,8	1117802 1,71	3429196,797	7748824,912	1091849917

После установления связи между переменными модели характеризуют значимость связи, которая в корреляционном анализе в целом для модели чаще всего осуществляется с помощью F – критерия Фишера.

Найдем дисперсию на одну степень свободы D.

$$D_{\text{общ}} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = 11563470,73$$

$$D_{\text{факт}} = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} = 102875903,9$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{n-2} = 8302312,406$$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя регрессионную (факторную) и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы, получим величину F – отношения (F – критерий Фишера):

$$F = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}} = \frac{102875903,9}{8302312,406} = 12,39$$

Вычисленное теоретическое значение критерия Фишера F сравнивается с табличным. При степенях свободы числителя и знаменателя $(n-2)=(30-2)=28$ при прямом уровне значимости $\alpha = 0,05$ к уровню доверия $(1-\alpha)=(1-0,05)=0,95$ $F_{\text{табл}}$ для рассматриваемой модели равняется $F_{\text{табл}} = 5,32$. Так как $F > F_{\text{табл}}$ ($12,39 > 5,32$), то это свидетельствует о значимости связи между переменными в эконометрической модели.

Оценим значимость связи между переменными модели в нашем примере по формуле:

$$F = \frac{108,28}{1,224} \cdot (10 - 2) = 707,8$$

Вычисленное теоретическое значение критерия Фишера F сравнивается с табличным. При степенях свободы числителя и знаменателя $(n - 2) = (10 - 2) = 8$ при прямом уровне значимости $\alpha = 0,05$ к уровню доверия $(1 - \alpha) = (1 - 0,05) = 0,95$ $F_{\text{табл}}$ для рассматриваемой модели равняется $F_{\text{табл}} = 5,32$. Так как $F > F_{\text{табл}}$ ($707,8 > 5,32$), то это свидетельствует о значимости связи между переменными в эконометрической модели.

В линейной регрессии обычно оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров.

Дадим оценку погрешности определения параметров модели. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка: m_b и m_a

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_x)^2 / (n - 2)}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{D_{\text{оцм}}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{D_{\text{оцм}}}{\sum x^2 - n \cdot (\bar{x})^2}}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{8302312,41}{32756689689,0 - 30 \cdot 23865,2^2}} = 0,023$$

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n - 2} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{D_{\text{оцм}} \cdot \frac{\sum x^2}{n^2 \cdot \sigma_x^2}}$$

$$m_a = \sqrt{8302312,41 \cdot \frac{32756689689}{30^2 \cdot 522341885,26}} = 760,59$$

Сравним стандартные погрешности оценок параметров модели с их значениями: $a = 2129,46$ и $b = -0,081$.

Стандартная погрешность оценки параметра a составляет:

$$\frac{m_a}{a} * 100\% = \frac{760,59}{2129,46} * 100\% = 35,7\%$$

к абсолютному значению этой оценки (2129,46) и поэтому этот параметр имеет смещенность, которая предопределена небольшой совокупностью наблюдений ($n=30$).

Стандартность погрешности оценки параметра b составляет:

$$\frac{m_b}{b} * 100\% = \frac{0,023}{-0,081} * 100\% = -28,4\%$$

по отношению к абсолютному значению оценки (-0,081), что свидетельствует о смещаемости такой оценки параметра модели.

t – критерий Стьюдента.

Величина стандартной ошибки совместно с t – распределением Стьюдента при $n - 2$ степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительных интервалов.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т.е. определяется фактическое

значение t – критерия Стьюдента: $t_b = \frac{b}{m_b}$, которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α и числе степеней свободы ($n - 2$).

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии; вычисляется

t – критерий: $t_a = \frac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $df = n - 2$ степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r :

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}}$$

Фактическое значение t – критерия Стьюдента определяется как

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2} \quad \text{или} \quad t_r = \frac{r}{m_r}$$

Если $t_{табл} < t_{факт}$, то гипотеза H_0 о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля, отклоняется, т.е. a , b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора x . Если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается случайная природа формирования a, b или r_{xy} .

В рассматриваемом примере фактическое значение t – критерия Стьюдента для коэффициента регрессии составило:

$$t_b = \frac{-0,081}{0,023} = -3,52.$$

При $\sum \alpha = 0,05$ (для двустороннего критерия) и числе степеней свободы 5 табличное значение $t_b = 2,306$. Так как фактическое значение t – критерия меньше табличного ($-3,52 < 2,306$), то гипотеза о несущественности коэффициента регрессии по t – критерию Стьюдента подтверждается.

$$\text{Аналогично, } t_a = \frac{2129,46}{760,59} = 2,80.$$

Найдем ошибку коэффициента корреляции по формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - (-0,554)^2}{30 - 2}} = 0,16$$

Тогда фактическое значение t – критерия Стьюдента для коэффициента a составит:

$$t_a = \frac{(-0,554)^2}{0,16} = 1,92.$$

Так как фактическое значение t – критерия меньше табличного ($1,92 < 2,306$), то гипотеза о несущественности коэффициента регрессии по t – критерию Стьюдента подтверждается.

Для оценки качества подбора линейной функции рассчитывается квадрат линейного коэффициента корреляции r^2 , называемый коэффициентом детерминации, который находится по формуле:

$$r_{xy}^2 = b^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

Коэффициент детерминации показывает, в какой мере вариация зависимой переменной y определяется вариацией независимой переменной x . Соответственно величина $1 - r^2$ характеризует долю дисперсии y , вызванную влиянием остальных не учтенных в модели факторов.

Величина коэффициента детерминации служит одним из критериев оценки качества линейной модели. Чем больше доля объясненной вариации, тем соответственно меньше роль прочих факторов, и, следовательно, линейная модель хорошо аппроксимирует исходные данные и ею можно воспользоваться для прогноза значений результативного признака.

Для определения *коэффициента детерминации* также используется формула

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

где $\hat{y}$ – теоретические значения зависимой переменной на основании построенной регрессионной модели; $\bar{y}$ – общая средняя фактических данных результирующего показателя; y_i – фактические индивидуальные значения результативного показателя. Эта формула используется как при линейной, так и при нелинейной связи между переменными.

Коэффициент детерминации принимает значение от 0 до 1; чем ближе R^2 к 1, тем теснее связь между переменными.

Коэффициент корреляции, или индекс корреляции, в этом случае рассчитывается так:

$$R = \sqrt{R^2}$$

Он показывает, насколько значительным является влияние переменной x на y .

Иногда тесноту корреляционной связи характеризуют коэффициентом корреляции, который рассчитывается по приближенной формуле:

$$R_1 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

По данным таблицы 8.15 определим коэффициент детерминации:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 102\,875\,903,91 : 232\,464\,747,36 = 0,443$$

Коэффициент корреляции, или индекс корреляции определим по формуле:

$$R = \sqrt{R^2} = 0,666$$

В ходе исследования коэффициент (индекс) детерминации оказался равным 0,443, что говорит об умеренной связи между выручкой и чистой прибылью строительных компаний.

Прогноз по линейному уравнению регрессии.

На основании полученных значений параметров имеем уравнение парной регрессии $\hat{y} = f(x)$ того или иного вида. С его использованием можно получить прогнозные значения зависимой переменной при задании перспективного значения независимой переменной x_{np} .

Прогноз на перспективу бывает двух видов: точечный и интервальный.

Точечный прогноз y_{np}^T получим, если в уравнении парной регрессии используем значение $x = x_{np}$: $y_{np}^T = f(x_{np})$.

Например, для линейного вида уравнения парной регрессии точечное прогнозное значение зависимой переменной рассчитывается по формуле:

$$\hat{y}_{np}^T = a + b \cdot x_{np}$$

Но точечный прогноз не дает диапазон колеблемости значений зависимой переменной вследствие вероятности ошибок ее определения. Это учитывается определением интервального прогноза $y_{np}^{ин}$, который может быть представлен

в виде

$$y_{np}^T - \mu \leq y_{np}^{ин} \leq y_{np}^T + \mu,$$

где μ - средняя ошибка прогноза, которая рассчитывается по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{общ}}^2}{n-1}},$$

где $\sigma_{\text{общ}}^2$ - общая дисперсия;

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1},$$

где $(n-1)$ - количество интервалов между уровнями y_i .

Динамические регрессионные модели.

Количественную регрессионную модель, можно построить с целью выявления основной тенденции изменения уровней динамического ряда во времени. Исследовать изменения с течением времени можно любого производственного и экономического показателя с помощью аналитического выравнивания ряда динамики.

Общая тенденция развития рассчитывается как функция времени: $Y = f(t)$. Определение теоретических (расчетных) уровней производится на основе, так называемой адекватной математической модели, которая наилучшим образом отображает (аппроксимирует) основную тенденцию ряда динамики исследуемых показателей.

Простейшими моделями, выражающими тенденцию развития, является: линейная функция – прямая – $Y = a_0 + a_1 t$
где, a_0 и a_1 – параметры уравнения.
 t - время.

Расчет параметров функции обычно производится методом наименьших квадратов, в котором в качестве решения принимается точка минимума суммы квадратов отклонений между теоретическими (выровненными или расчетными) и эмпирическими (фактическими) уровнями:

$$\sum (Y_{\text{расч.}} - Y_{\text{факт}})^2 \rightarrow \min$$

Параметры уравнения a_0 и a_1 , могут быть найдены решением системы нормальных уравнений.

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum Y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum Yt \end{cases}$$

$Y_{\text{фактич.}}$ - (эмпирические) уровни ряда;

t – время (порядковый номер периода или момента времени).

На основе найденного уравнения тренда вычисляются выровненные уровни.

Таким образом, выравнивание ряда динамики заключается в замене фактических уровней Y плавно изменяющимися уровнями y , наилучшим образом аппроксимирующими эмпирические данные показателей.

Расчет параметров значительно упрощается, если за начало отсчета времени $t = 0$ принять центральный интервал (момент).

При нечетном числе уровней (таблица 8.16) значения равны:

Таблица 8.16.

2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

При четном числе уровней (таблица 8.17), значения t - условного обозначения времени равны:

Таблица 8.17.

2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
-9	-7	-5	-3	-1	+1	+3	+5	+7	+9

В обоих случаях $\sum t = 0$, а система нормальных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \sum Y = na_0 \\ \sum Yt = a_1 \sum t^2 \end{cases} \text{отсюда следует} \begin{cases} a_0 = \sum Y / n \\ a_1 = \sum Yt / \sum t^2 \end{cases}$$

Пример.

Построить динамическую регрессионную модель урожайности зерновых. Выравнивание по прямой $Y = a_0 + a_1 t$ ряда динамики урожайности зерновых культур представлено в таблице 8.18.

Таблица 8.18.

Годы	y_f	t	t^2	$y \cdot t$	$y_{расч.}$	$y_f - y_p$	$(y_f - y_p)^2$
2012	15,4	-9	81	-138,6	15,15	0,25	0,0625
2013	14,0	-7	49	-98,0	15,19	-1,19	1,4161
2014	17,6	-5	25	-88,0	15,23	2,37	5,6169
2015	15,4	-3	9	-46,2	15,28	0,12	0,0144
2016	10,9	-1	1	-10,9	15,32	-4,42	19,5364
2017	17,5	+1	1	17,5	15,36	2,14	4,5796
2018	15,0	+3	9	45,0	15,40	-0,40	0,016
2019	18,5	+5	25	92,5	15,45	3,05	9,3025
2020	14,2	+7	49	99,4	15,49	-1,29	1,6641
2021	14,9	+9	81	134,1	15,53	-0,63	0,3969
Итого	$\sum y = 153,4$	$\sum t = 0$	$\sum t^2 = 330$	$\sum yt = 6,8$	$\sum y_p = 153,4$	$\sum = 0$	$\sum = 42,6054$

Получены следующие параметры уравнения:

$$a_0 = 153,4 : 10 = 15,34; \quad a_1 = 6,8 : 330 = 0,021 \text{ Место для уравнения.}$$

Уравнение прямой, представляющее собой трендовую регрессионную модель искомой функции имеет вид: $Y = 15,34 + 0,021t$.

Подставим в данное уравнение последовательно значения t – равные: -9, -7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7, +9 и получим выровненные уровни $Y_{расч.}$. Если расчеты выполнены правильно, $\sum Y_{факт} = \sum Y_{расч.} = 153,4$.

Полученное уравнение регрессии показывает, что наблюдается тенденция увеличения урожайности: с 2012 по 2021 гг. урожайность зерновых культур в среднем возрастала на $a_1 = 0,021$ ц/га в год.

Экстраполяция и интерполяция в регрессионных моделях.

Экстраполяция – это построение прогнозов или определение уровней в рядах динамики анализируемых показателей будущих периодов. Данные, получаемые путем экстраполяции ряда, следует рассматривать как вероятностные.

Интерполяция – определение недостающих уровней внутри ряда динамики анализируемых показателей.

Экстраполируют ряды динамики выравниванием по аналитическим формулам. Для вышеприведенного примера (таблица 8.18)

$$\text{при } t = 11 \quad Y = 15,571.$$

На практике результат экстраполяции обычно получают интервальными оценками. Для определения границ интервалов используют формулу:

$$Y_{\text{рас.}} \pm t S$$

t – коэффициент доверия по распределению Стьюдента;

S – статочное среднее квадратическое отклонение от тренда, скорректированное по числу степеней свободы.

Число степеней свободы – число элементов статистической совокупности, вариация которых свободна (не ограничена) $(n - m)$;

n – число уровней ряда динамики;

m – число параметров адекватной модели тренда (для уравнения прямой $m = 2$) определяют по формуле:

$$S = \sqrt{\sum (Y_{\phi} - Y_p)^2 / (n - m)}$$

Вероятностные границы интервала прогнозируемого явления определяются по формуле:

$$(Y_{\text{рас.}} - t S) \leq Y_{\text{пр}} \leq (Y_{\text{рас.}} + t S)$$

Рассчитанные прогнозируемые доверительные интервалы урожайности зерновых культур на 2022 г. составят: при $n = 10$ и $m = 2$, число степеней свободы равно 8. При доверительной вероятности равной 0,95 (т.е. при уровне значимости случайностей $\alpha = 0,05$), коэффициент доверия $t_{\alpha} = 2,306$ (по табл. Стьюдента t - распределения, не являющегося нормальным):

$$\sum (Y_{\phi} - Y_p)^2 = 42,6054; \quad S = \sqrt{42,6054 / 8} = \pm 2,308$$

Зная точечную оценку прогнозируемого значения урожайности $Y = 15,571$ ц/га, определим вероятностные границы интервала:

$$2,306*2,308 -15,571 \leq Y_{\text{пр}} \leq 15,571 +2,306*2,308$$

$$10,25 \leq Y_{\text{пр}} \leq 20,89$$

Следовательно, с вероятностью, равной 0,95, можно утверждать, что урожайность зерновых культур в 2022 г. будет не менее чем 10,25, но и не более чем 20,89 ц/га.

Необходимо учитывать, что прогноз уровня, характеризующего объект, полученного методом аналитического выравнивания, основан на предположении, что те же самые условия, в которых формировались уровни ряда в прошлом, будут существовать и в будущем. При этом следует отметить особенности регрессионных динамических моделей, основанных на аналитическом выравнивании уровней динамического ряда исследуемых показателей, обуславливающие ограничение их использования:

- динамические ряды исследуемых показателей, к которым применяется аппроксимация, должны быть достаточно длинными, а уровень медленно и плавно меняющийся;
- при появлении новых данных построение модели должно быть проведено заново.

Экстраполяция в рядах динамики носит не только приближенный, но и условный характер. Поэтому ее следует рассматривать как предварительный этап в разработке прогнозов.

Методы скользящего среднего **и экспоненциального сглаживания**

Методы скользящего среднего и экспоненциального сглаживания используются для прогнозирования временных рядов. Формально **временной ряд** – это множество пар данных (X,Y), в которых X – это моменты или периоды времени (независимая переменная), а Y – параметр (зависимая переменная), характеризующий величину исследуемого явления. Цель исследования временных рядов состоит в **выявлении тенденции** изменения

фактических значений параметра Y во времени и **прогнозировании** будущих значений Y . Модель, построенную по ретроспективным данным можно использовать при наличии **устоявшейся тенденции** в динамике значений прогнозируемого параметра. К возможным ситуациям нарушения такой тенденции относятся: коренное изменение плана деятельности фирмы, которая стала терпеть убытки; резкое изменение параметров внутренней или внешней ситуации (цен на сырье; уровня инфляции); стихийные бедствия, военные действия, общественные беспорядки.

Суть методов **скользящего среднего** и **экспоненциального сглаживания** состоит в том, что фактические уровни исследуемого временного ряда заменяются их средними значениями, погашающими случайные колебания. Это позволяет более четко выделить основную тенденцию изменения исследуемого параметра. Эти относительно простые методы прогнозирования временных рядов, основанные на представлении прогноза. **Метод скользящих средних.** Сущность его заключается в том, что исчисляется средний уровень из определенного числа, обычно нечетного (3,5,7), первых по счету уровней ряда, затем – из такого же числа уровней, но начиная со второго по счету, далее – начиная с третьего и т.д. Таким образом, средняя, как бы «скользит» по ряду динамики, передвигаясь на один срок. Пример приведен в таблице 8.19.

Таблица 8.19.

Исходные данные и результаты расчета скользящей средней для урожайности зерновых, ц/га

Годы	Фактический уровень урожайности	Скользящая средняя	
		трехлетняя	пятилетняя
2012	15,4	-	-
2013	14,0	$(15,4+14,0+17,6):3=15,7$	-

2014	17,6	(14,0+17,7+15,4):3=15,7	14,7
2015	15,4	(17,6+15,4+10,9):3=14,6	15,1
2016	10,9	14,6	15,2
2017	17,5	14,5	17,1
2018	15,0	17,0	16,8
2019	18,5	15,9	17,6
2020	14,2	15,9	-
2021	14,9	-	-
Итого	$\Sigma y=153,4$		

Сглаженный ряд урожайности по трехлетиям короче фактического на один член ряда в начале и в конце, по пятилетиям – на два члена в начале и в конце ряда. Он меньше, чем фактический подвержен колебаниям из-за случайных величин.

Приемы сглаживания динамических рядов методом скользящей средней дают возможность определить лишь общую тенденцию развития явления.

Получить обобщенную статистическую модель тренда посредством этих методов нельзя.

Раздел 3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тема 9 Имитационное моделирование производственных систем

При экономическом моделировании производственных систем широко применяются как аналитические, так и статистические модели. Каждый из этих типов имеет свои преимущества и недостатки. Аналитические модели более грубы, учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений. Зато результаты расчета по ним легче обозримы, отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. А, главное, аналитические модели больше приспособлены для поиска оптимальных решений.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое (в теории – неограниченно большое) число факторов. Но и у них – свои недостатки: громоздкость, плохая обозримость, большой расход машинного времени, а главное, крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать путем догадок и проб.

Наилучшие работы в области экономического моделирования производственных систем основаны на совместном применении аналитических и статистических моделей. Аналитическая модель дает возможность в общих чертах разобраться в явлении, наметить как бы контур основных закономерностей. Любые уточнения могут быть получены с помощью статистических моделей.

Имитационное моделирование применяется к процессам, в ход которых может время от времени вмешиваться человеческая воля. Человек, руководящий операцией, может в зависимости от сложившейся обстановки, принимать те или другие решения, подобно тому, как шахматист, глядя на доску, выбирает свой очередной ход. Затем приводится в действие математическая модель, которая показывает, какое ожидается изменение обстановки в ответ на это решение и к каким последствиям оно приведет спустя некоторое время. Следующее «текущее решение» принимается уже с учетом

реальной новой обстановки и т.д. В результате многократного повторения такой процедуры руководитель как бы «набирает опыт», учится на своих и чужих ошибках и постепенно выучивается принимать правильные решения – если не оптимальные, то почти оптимальные.

В современной литературе не существует единой точки зрения по вопросу о том, что понимать под имитационным моделированием. Так существуют различные трактовки:

- в первой – под имитационной моделью понимается математическая модель в классическом смысле;

- во второй – этот термин сохраняется лишь за теми моделями, в которых тем или иным способом разыгрываются (имитируются) случайные воздействия;

- в третьей – предполагают, что имитационная модель отличается от обычной математической более детальным описанием, но критерий, по которому можно сказать, когда кончается математическая модель и начинается имитационная, не вводится.

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г., когда появилась статья под названием «The Monte Carlo method». Создателями этого метода считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама. В СССР первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955—1956 гг.

Идея метода чрезвычайно проста и состоит она в следующем. Вместо того, чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат.

В действительности конкретное осуществление случайного процесса складывается каждый раз по-иному; так же и в результате статистического моделирования мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса. Что она может нам дать? Сама по себе ничего, так же как, скажем, один случай излечения больного с помощью

какого-либо лекарства. Другое дело, если таких реализаций получено много. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены любые интересующие нас характеристики: вероятности событий, математические ожидания и дисперсии случайных величин и т. д. При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования, заставляем ее «работать на нас».

Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построить аналитическую модель. Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, людей, организаций, подсобных средств), в которых случайные факторы сложно переплетены, где процесс — явно немарковский, метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического (а нередко бывает и единственно возможным).

В сущности, методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

Метод Монте-Карло - это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Особенности метода Монте-Карло.

Первая особенность метода - простая структура вычислительного алгоритма.

Вторая особенность метода - погрешность вычислений, как правило, пропорциональна D/N^2 , где D - некоторая постоянная, N - число испытаний. Отсюда видно, что для того, чтобы уменьшить погрешность в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N (т. е. объем работы) в 100 раз.

Ясно, что добиться высокой точности таким путем невозможно. Поэтому обычно говорят, что метод Монте-Карло особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5-10%).

Широкие возможности компьютерного имитационного моделирования приводят к разработке все более сложных конструкций моделей. Это порождает дополнительные проблемы не только для программиста, но и для пользователя. Количественное определение параметров модели (например, эластичности цены и рекламы) сталкивается со все большими трудностями. Поэтому часто приходится обращаться за недостающей информацией к экспертам, что при масштабных моделях со многими параметрами существенно усиливает спекулятивную природу практических рекомендаций.

Теория хаоса указывает на то, что при динамических с обратной связью системах уравнений даже мельчайшие изменения в конфигурации параметров модели или исходных условий могут привести к совершенно другим рекомендациям.

Определенное облегчение в этой связи могут принести "нейрональные сети". Эти стимулируемые нейробиологическими процессами компьютерные алгоритмы не нуждаются в функциональных причинно-следственных связях. Сеть сама "ищет" по определенному "правилу изучения" приближенную взаимосвязь, которая наилучшим образом отражает представленные данные. Поэтому нейрональные сети могут применяться без теоретической подоплеки для прогнозирования, например, покупок как реакции на воздействие рекламы. В этом случае для "подравнивания" и "настраивания" сети требуется обширный материал данных, отражающих прошлую динамику. С другой стороны, сеть сама гибко приспосабливается и "обнаруживает" даже неизвестные взаимосвязи, которые хотя и осуществляются "механически", но могут способствовать прояснению причинно-следственных связей.

Имитационное моделирование является численным методом экспериментирования на реализованной на ЭВМ логико-математической модели исследуемого объекта, которая описывает его поведение в течение

продолжительного периода времени. При проведении машинной имитации создается алгоритмическая модель в виде программы или пакета программ, а затем проводится серия экспериментов для получения сравнительной оценки различных вариантов функционирования производства путем проигрывания на модели вырабатываемых альтернатив решений. Следует отметить, что создание более точных, а значит и более сложных моделей требует более точного и подробного описание поведения объекта моделирования, больших затрат времени и средств. Поэтому необходим компромисс между точностью модели и ее простотой. При этом упрощение модели возможно до тех пор, пока она позволяет получать достоверные результаты с требуемой точностью.

При проведении экспериментов на имитационной модели используются теория планирования экспериментов и обработки результатов экспериментов. Эксперимент на имитационной модели является достаточно адекватным отображением производственного процесса в течение определенного продолжительного отрезка времени (год, квартал, месяц, декада, пятидневка, сутки, смена и т.д.), в вычислениях на ЭВМ, протекающих за несколько минут или секунд. Поскольку модельное время имеет значительное сжатие по сравнению с реальным временем протекания производственных процессов, то это позволяет за короткий промежуток времени “проигрывать” на модели различные варианты управленческих решений, собирая статистику, касающуюся результатов предполагаемого управленческого воздействия на производственный процесс, и сделать выводы об эффективности этих альтернатив решений.

При проведении имитационного эксперимента могут задаваться определенные моменты модельного времени $t_1, t_2, \dots, t_k$, для которых вычисляются параметры модели, характеризующие предполагаемое состояние процесса производства.

Другой подход позволяет получать статистические данные в моменты модельного времени, соответствующие событиям, связанным с изменением состояния составляющих процесса производства (момент запуска партии в

производство, начало и окончание технологических и транспортных операций и т.д.). Входная информация в имитационной модели может задаваться таблично, пользователем ЭВМ, генерироваться с помощью датчиков случайных чисел или с использованием комбинации этих способов. Выходная информация содержит данные об управленческих решениях, случайных факторах и результатах эксперимента.

Имитационные модели могут создаваться с помощью универсальных языков программирования (например, СИ, Паскаля, Бейсика, Фортрана и др.), специальных языков имитационного моделирования (например, СИМСКРИПТ, GPSS и др.) или проблемно-ориентированных систем моделирования.

Применение специальных языков позволяет значительно сократить время создания модели, а системы моделирования позволяют генерировать модели, из имеющегося набора функциональных модулей с помощью настройки системы в интерактивном режиме работы пользователя и ЭВМ. Многоплановость решаемых задач требует от модели большой гибкости к изменяющимся целям и условиям протекания производственных процессов. С помощью имитационного моделирования возможно решение задач планирования производства и внешних поставок, прогнозирование хода производственного процесса с целью определения вероятности выполнения плановых решений, проведение различных корректирующих воздействий, оценка и выбор вариантов алгоритмов и стратегий управления.

Имитационная модель, разработанная автором на основе логико-математического описания производственной системы и позволяет проводить эксперименты на модели производства в ускоренном масштабе времени. Это особенно важно в условиях дефицита времени для принятия решений по перепланированию и регулированию процесса производства в условиях возникновения сбойных ситуаций. Методология использования имитационного моделирования при принятии решений в системе оперативного управления производством позволит изменить традиционный

подход к построению систем поддержки управленческих решений на
промышленных предприятиях.

Возможность смоделировать влияние на производственную систему нескольких альтернатив решений позволит лицу, принимающему решения (ЛПР), проанализировать и оценить результаты эксперимента и выбрать наиболее рациональное решение. Многофункциональная модель производственной системы (участка производства, цеха), предназначенная для решения широкого круга задач в интересах оперативного управления производством. Параметры производственной структуры моделируемого объекта, учитывающие особенности процесса производства, вводятся в модель в качестве исходной информации.

Многофункциональная имитационная модель позволяет решать задачи по совершенствованию имеющихся и созданию новых структур производственных подразделений, количественное обоснование парка необходимого производственного оборудования, моделирование вариантов его установки на располагаемых производственных площадях и организации работ по его обслуживанию. Использование предлагаемой модели способствует обоснованию решений в области совершенствования организации управления производством, планирования работ по контролю качества продукции, решения комплекса задач по принятию решений в системе оперативного управления производством.

Решение задач оперативного управления на модели предполагает возможность построения посменного графика загрузки оборудования, графиков необходимой переналадки и подналадки оборудования под новые партии деталей, календарного плана запуска-выпуска заготовок в производство, планирования операций по транспортировке партий деталей и контролю качества продукции, расчета длительности производственного цикла, прогнозирования хода производственного процесса с целью

определения вероятности выполнения плановых решений, оценки и выбора вариантов различных корректирующих воздействий и др.

Рассматриваемая модель предназначена для исследования и совершенствования организации оперативного управления производством, накопления информации и новых знаний о поведении объекта моделирования - производственного процесса при принятии различных альтернативных вариантов оперативных управленческих решений, использования при обучении и повышении квалификации управленческого персонала. Проводя на модели ряд экспериментов с различными вариантами управленческих воздействий, учитывая влияние факторов, оказывающих возмущающее воздействие на производственную систему, и сбоев в ходе производства, ЛПР имеет возможность исследования процесса производства в условиях, приближающихся к реальным производственным ситуациям.

Имитационное моделирование целесообразно использовать при решении задач сменно-суточного, декадного, месячного планирования. Появление в арсенале управленческих работников быстродействующих персональных компьютеров, соединенных линиями связи в единую сеть предприятия, позволяет даже применять имитационное моделирование для обоснования принятия решений практически в реальном масштабе времени.

Созданию имитационной модели должно предшествовать обследование производства, в ходе которого создается база данных, включающая информацию о всех элементах производственного процесса. Эта информация, включающая данные о производственной структуре участков, наличии групп взаимозаменяемого оборудования, о материальных и информационных потоках, инструментальном и транспортном обслуживании, материальных запасах, трудовых ресурсах, может использоваться как для моделирования, так и для создания информационно-справочных и советующих систем. Сочетание имитационной модели с программами сбора и обработки статистики, работающими в реальном времени, позволяет создать экспертные, информационно-справочные и информационно-советующие системы. В

качестве информации в этом случае используются сведения о результатах выполнения сменных заданий, о нарушениях в ходе производства, отклонениях от запланированных показателей, о выходе работников на рабочие места, наличии материалов, полуфабрикатов, готовых изделий, незавершенного производства, наличии инструмента на участке и в кладовых, о состоянии оборудования, ходе выполнения выносных операций в других цехах, на других участках.

Объектом имитационного моделирования является производственная система (участок, цех) и протекающие в ней процессы производства по механической обработке, транспортировке партий деталей, осуществлению операций контроля качества выпускаемой продукции. Настройка предлагаемой модели под конкретный производственный объект из совокупности производственных подразделений происходит в интерактивном режиме в ходе ввода исходной информации в ЭВМ.

При проведении модельных экспериментов возможно варьировать состав и количество оборудования, осуществлять резервирование технических средств, для замены вышедшего из строя оборудования или появления новых срочных заказов на изготовления партий деталей. В каждой партии содержатся однотипные детали, технологический маршрут обработки которых задается с исходными данными в виде цепочки из видов оборудования, закрепленного за выполнение определенных типов операций технологического процесса. В модели предусмотрена различная приоритетность обработки деталей в случае появления узких мест в связи с нехваткой оборудования по определенной операции технологического процесса. Так, партии деталей, имеющие высший приоритет имеют преимущество первоочередного занятия освободившегося оборудования.

При поломке оборудования или отсутствии работника, партии деталей распределяются между оставшимися единицами оборудования внутри данной группы или, при отсутствии резервного оборудования могут быть переданы для выполнения выносных операций на оборудовании за пределами данного

участка производства. При проведении экспериментов на представленной имитационной модели использовались следующие виды входной и выходной информация.

Организационная информация включает: время моделирования, периодичность вывода статистики, наличие незавершенного производства, приоритетность выполнения заданий, порядок запуска партий деталей, наличие транспортных операций.

Информация по оборудованию: количество видов оборудования, численность оборудования по видам, наличие резервного оборудования.

Информация по объему и номенклатуре: количество видов деталей, количество партий деталей, количество деталей по партиям.

Информация по технологическому процессу: номер технологического процесса, количество операций по видам технологии, последовательность операций в технологии, нормы времени по операциям.

Информация по незавершенному производству: вид партии в обработке, количество деталей в партии, занимаемое оборудование, время до конца обработки партии, количество незавершенных операций технологического процесса.

Располагая данной информацией проводится моделирование при обосновании выбора решения из возможных альтернатив в ходе имитационного эксперимента.

Результирующая информация при проведении эксперимента на модели следующая.

Информация по производству деталей включает: календарный план запуска-выпуска партий деталей, закрепление деталей за оборудованием, маршрут продвижения партий по группам оборудования, данные по незавершенному производству, график по операциям контроля, длительность производственного цикла.

Информация по оборудованию включает: время работы оборудования общее и по видам партий деталей, коэффициент загрузки оборудования,

закрепление оборудования за партиями деталей по операциям, данные по резервному оборудованию, наличие очередей к оборудованию.

Вся совокупность перечисленных данных готовится в производственно-диспетчерском бюро (ПДБ) цеха и вводится в модель в процессе ее решения в диалоговом режиме. В системе поддержки управленческих решений значительно сокращается трудоемкость ввода исходных данных, т.к. предполагается, что действующая система автоматически накапливает эти данные, обновляет их и корректирует.

В результате проводимых на модели экспериментов оценивались значения организационно-технических характеристик производственной системы, динамика загрузки оборудования и работников, длительность производственного цикла, величина незавершенного производства, время проведения и количество персонала, необходимого для осуществления контрольных операций в зависимости от вариации производственной программы выпуска изделий, структурных изменений производственной системы, порядка запуска изделий в производства, величины партии деталей.

Применение имитационного моделирования в системах поддержки управленческих решений позволит обнаружить диспропорции в производственном процессе, наличие “узких мест”, возникновение очередей предметов труда на обработку, дефицита рабочей силы на каких-либо участках производства, простои оборудования и работников. С помощью предложенной имитационной модели можно не только оценивать варианты парирования возникших отклонений и сбоев в ходе производства путем перераспределения ресурсов, изменения порядка запуска-выпуска предметов труда, но и прогнозировать напряженные и аварийные ситуации.

Компьютерное моделирование позволяет сделать процесс более наглядным и понятным для рядового исследователя.

Метод имитационного моделирования сегодня является одним из наиболее востребованных. Он сочетает в себе особенности

экспериментального подхода и специфические условия использования вычислительной техники.

«Имитация» означает воспроизведение определенным образом явлений, событий, действий, объектов и т. п. Этот термин является синонимом понятия «модель» - абстрактное описание системы (объекта, процесса, проблемы, понятия) в некоторой форме, отличной от формы ее реального существования.

Моделирование в общем виде представляет собой один из основных методов познания, является формой отражения действительности и заключается в выяснении или воспроизведении тех или иных свойств реальных объектов, процессов, явлений с помощью абстрактного описания в виде изображения, плана, карты, совокупности уравнений, алгоритмов и программ.

Имитационное моделирование (ИМ) - экспериментальный метод исследования реальной системы по ее имитационной модели, который сочетает особенности экспериментального подхода и специфические условия использования вычислительной техники.

Преимущества имитационного моделирования:

1. Отражение динамических процессов и поведенческих аспектов внешней среды.
2. Возможность выявления закономерностей, динамических тенденций развития и функционирования сложной системы в условиях неполной и неточной информации.
3. Описание взаимодействия и поведения множества активных агентов в социальных системах.
4. Реализацию принципов объектно-ориентированного проектирования и применение высокотехнологичных решений при построении компьютерных моделей и др.

Главной проблемой при построении любой имитационной модели является необходимость построения комплексных математических моделей и разработки программного кода имитационной модели. В современных

системах ИМ предпринимаются попытки решить эту проблему при помощи автоматизации построения кода имитационной модели на основании различных графических схем (визуальных моделей) и с использованием методов объектно-ориентированного проектирования. Такой подход значительно облегчает задачу создания имитационной модели и делает саму модель более понятной для пользователей.

В ИМ выделяют следующие основные подходы: системная динамика, дискретно-событийное моделирование, агентное моделирование. В работах различных авторов среди подходов ИМ отмечаются также динамическое моделирование, объединенный подход, сетевые парадигмы, сети кусочно-линейных агрегатов и др.

Как методология **системная динамика** была предложена в 1961 году Дж. Форрестером в качестве инструмента исследования информационных обратных связей в производственно-хозяйственной деятельности. Процессы, происходящие в реальном мире, в системной динамике представляются в терминах накопителей и потоков между ними. Системно-динамическая модель описывает поведение системы и ее структуру как множество взаимодействующих обратных связей и задержек. Математически такая модель выглядит как система дифференциальных уравнений. Результатом моделирования в системной динамике является выявление глобальных зависимостей и причинно-следственных связей в исследуемой системе. К этому типу относятся системы VenSim, PowerSim, iThink и др.

Дискретно-событийное моделирование появилось в начале 1960-х годов, когда Дж. Гордон спроектировал и реализовал систему GPSS. Основной объект в этой системе - пассивный транзакт, который может определенным образом представлять собой работников, детали, сырье, документы, сигналы и т. п. Перемещаясь по модели, транзакты становятся в очереди к одноканальным и многоканальным устройствам, захватывают и освобождают их, расщепляются, уничтожаются и т. д.. Отличительной особенностью данного подхода является время продвижения по модели: либо от события к событию,

либо через дискретные промежутки времени. Дискретно-событийное моделирование применяется, если возможно предположить, что переменные в системе меняются мгновенно в определенные промежутки времени. Данный подход ИМ является одним из самых распространенных и применяется для исследования социально-экономических, технических, логистических и других процессов. Кроме системы GPSS, к этому подходу относятся системы Arena, Extend, SimProcess и др. Следует отметить, что на основе дискретно-событийного подхода реализовано наибольшее число систем ИМ.

Агентное моделирование появилось в 90-х годах и используется для исследования децентрализованных систем, динамика функционирования которых определяется не глобальными правилами и законами (как в других парадигмах моделирования), а когда эти глобальные правила и законы являются результатом индивидуальной активности членов группы. Цель агентных моделей - получить представление об этих глобальных правилах, общем поведении системы, исходя из предположений об индивидуальном, частном поведении ее отдельных активных объектов и взаимодействии этих объектов в системе.

В случае моделирования экономических систем, содержащих большие количества активных объектов (людей, машин, предприятий или даже проектов, активов, товаров и т. п.), которые объединяет наличие элементов индивидуального поведения, агентное моделирование является подходом более универсальным и мощным, так как позволяет учесть любые сложные структуры и их поведение.

Наиболее мощным из инструментов, поддерживающих агентное моделирование, является отечественный инструментарий AnyLogic компании XJ Technologies, доказавший в последнее время свою мощь и удобство за счет применения объектно-ориентированного подхода, визуального проектирования, дружественного пользовательского графического интерфейса, платформонезависимого языка Java. Кроме того, он реализует

объединенный подход за счет предоставления возможности создания гибридных моделей на основе различных подходов ИМ.

Разработка имитационной модели включает следующие этапы:

1. Формулировка цели исследования.
2. Сбор информации и данных.
3. Разработка концептуальной модели.
4. Проверка концептуальной модели на адекватность поставленной задаче и выполнение структурного критического анализа.
5. Перевод концептуальной модели в машинное представление с помощью программных средств.
6. Верификация полученной модели.
7. Возврат к пунктам 1 - 3 (в зависимости от выявленной ошибки) в случае неадекватности полученной модели.
8. Разработка, выполнение и анализ экспериментов.
9. Документирование и предоставление полученных результатов.

Для обеспечения наибольшей адекватности модели следует привлекать к ее разработке экспертов предметной области. При этом используются два основных подхода выполнения верификации и валидации: привлечение полностью вовлеченного в группу разработчиков пользователя и независимая верификация и валидация (выполняется сторонней группой).

В процессе валидации применяются различные методы: анимация, сравнение с другими моделями, тесты на экстремальные условия и др.

Практически все существующие программные средства ИМ разработаны для поддержки какого-то определенного подхода. Среди наиболее распространенных систем ИМ, обладающих развитыми графическими средствами, можно назвать ARIS, Arena, Anylogic, iThink (наиболее популярные программные продукты среди различных подходов ИМ). Рассмотрим их более подробно.

Система ИМ ARIS представляет собой комплекс средств анализа и моделирования деятельности предприятия. Ее методическую основу

составляет совокупность различных методов моделирования, отражающих разные взгляды на исследуемую систему. Одна и та же модель может разрабатываться с использованием нескольких методов, что позволяет использовать ARIS специалистам с различными теоретическими знаниями и настраивать его на работу с системами, имеющими свою специфику.

Методика моделирования ARIS основывается на теории построения интегрированных ИС (Август Шер), определяющей принципы визуального отображения всех аспектов функционирования анализируемых компаний. ARIS поддерживает четыре типа моделей, отражающих различные аспекты исследуемой системы: организационные, функциональные, информационные, а также модели управления. Для их построения используются как собственные методы моделирования ARIS, так и различные известные методы и языки моделирования, в частности, UML.

В процессе моделирования каждый аспект деятельности предприятия сначала рассматривается отдельно, а после детальной проработки всех аспектов строится интегрированная модель, отражающая все связи между различными аспектами.

ARIS не накладывает ограничений на последовательность построения моделей. Модели в ARIS представляют собой диаграммы, элементами которых являются разнообразные объекты - «функции», «события», «документы» и т. п. Между объектами устанавливаются различные по типам связи.

Каждому объекту соответствует определенный набор атрибутов, которые позволяют ввести дополнительную информацию о конкретном объекте. Значения атрибутов могут использоваться при ИМ или для проведения стоимостного анализа. В результате возникает набор взаимосвязанных моделей, представляющих собой исходный материал для дальнейшего анализа.

Модели состоят из уровней и иерархий. Пользователь строит описание модели на высоком уровне с помощью сред моделирования процессов, каждая

из которых позволяет создать модель одной подсистемы. Завершив описание, разработчик переходит на следующую ступень детализации и вводит в каждую подмодель необходимые конструкции. Между подмоделями устанавливаются связи, указывающие на взаимодействие подсистем. Построив модель, снабженную необходимым числом иерархических уровней, разработчик переходит в режим моделирования, чтобы определить математические связи между станциями, потоками и другими конструкциями.

Пакет IШтк предлагает разработчику список допустимых переменных для определения математических связей, обеспечивает проведение анализа чувствительности модели путем ее многократного запуска с различными входными параметрами. Исходными данными являются основные виды распределений, применяемые для статистического анализа или диаграммы. При запуске модели используются средства анимации, перемещающие расположенные на различных уровнях станции в соответствии с логикой модели.

Результаты моделирования выводятся в виде временных диаграмм или диаграмм разброса. Таблицы и диаграммы можно просматривать в специальных окнах пакета или в окне модели.

Пакет AnyLogic - предназначен для разработки и исследования имитационных моделей. Построен на базе новых идей в области информационных технологий, теории параллельных взаимодействующих процессов и теории гибридных систем. Благодаря этим идеям чрезвычайно упрощается построение сложных имитационных моделей, имеется возможность использования одного инструмента при изучении различных стилей моделирования.

Графическая среда моделирования поддерживает проектирование, разработку, документирование модели, выполнение компьютерных экспериментов, оптимизацию параметров относительно некоторого критерия. При разработке модели можно использовать элементы визуальной графики

(диаграммы состояний, сигналы, события, порты и т. д.), синхронное и асинхронное планирование событий, библиотеки активных объектов.

При разработке модели в AnyLogic можно использовать концепции и средства из классических областей ИМ: динамических систем, дискретно-событийного моделирования, системной динамики, агентного моделирования. Кроме того, AnyLogic позволяет интегрировать раз-

личные подходы с целью получить более полную картину взаимодействия сложных процессов различной природы.

Пакет ИМ Arena позволяет создавать подвижные компьютерные модели, используя которые можно адекватно представить очень многие реальные системы. Arena снабжена удобным объектно-ориентированным интерфейсом и обладает возможностями по адаптации к всевозможным предметным областям.

Основа технологий Arena - язык моделирования SIMAN и система Cinema Animation. Процесс моделирования организован следующим образом. Сначала пользователь шаг за шагом строит в визуальном редакторе системы Arena модель. Затем система генерирует по ней соответствующий код на SIMAN, после чего автоматически запускается Cinema animation.

Интерфейс Arena включает в себя всевозможные средства для работы с данными, в том числе электронные таблицы, базы данных.

ИМ позволяет проверять гипотезы о причинах возникновения тех или иных наблюдаемых феноменов. SIMAN позволяет рассматривать процессы в различных масштабах времени, выделить переменные, наиболее важные для успешного функционирования моделируемой системы, и проанализировать имеющиеся между ними связи. Язык позволяет выявлять «узкие места» в материальных, информационных и других потоках. Моделирование дает возможность изучать объекты, о поведении которых имеется недостаточно информации.

В поставку Arena входят готовые шаблоны решений. Каждый такой шаблон представляет собой набор специализированных модулей,

превращающих Arena в проблемно-ориентированную среду моделирования. Создавая такие шаблоны или изменяя существующие, можно приспособить Arena для решения конкретных задач и перейти от абстрактных понятий методологии моделирования к принятым в рассматриваемой предметной области терминам.

Для сравнительного анализа рассматриваемых систем имитационного моделирования были выбраны 13 характеристик, отражающих возможности представленных продуктов по проведению исследований, построению моделей и взаимодействию с пользователем (таблица). Лучшая из систем определялась по наличию наиболее широкого функционала (чему соответствует максимальное число реализованных в программном продукте характеристик). Следует отметить, что перечень критериев оценки не является единственно возможным, список может меняться как в сторону уменьшения, так и в сторону расширения количества используемых характеристик. Различные исследователи при проведении анализа систем ИМ используют разные критерии оценки.

Следует отметить, что в любой системе ИМ можно найти какие-то недостатки с точки зрения применимости ее в конкретной ситуации. Кроме того, сфера информационных технологий бурно развивается, появляются новые подходы и методы решения актуальных задач, меняются механизмы взаимодействия пользователей с информационными системами. Все это приводит к необходимости постоянного совершенствования систем ИМ и применяемых в них решений.

Построение проблемно-ориентированных систем ИМ остается актуальным направлением на сегодняшний день. Существуют системы моделирования производственных систем различного назначения, медицинского обслуживания, в области телекоммуникаций и др. Такие системы включают абстрактные элементы, языковые конструкции и наборы понятий, взятые непосредственно из предметной области исследований. Это влияет на доступность и привлекательность ИМ, позволяет реализовывать

различные модели исследователям, не имеющим опыта работы с программными средствами имитационного моделирования (все используемые для построения компоненты и механизмы их функционирования уже известны пользователям и соответствуют реально существующим).

Наличие в современных системах моделирования удобного, легко интерпретируемого графического интерфейса, системных потоковых диаграмм, блок-схем, реализованных на идеографическом уровне, повышают наглядность построенных с их помощью моделей. Графический подход к построению моделей является одним из наиболее популярных и удобных на сегодняшний день.

Еще одним направлением совершенствования систем ИМ в области применения графики является использование развитых средств анимации, зачастую весьма сложных, с использованием стандартов в области виртуальной реальности.

Современные методологии научного исследования в компьютерном моделировании требуют серьезной математической и информационной поддержки, особенно в части вычислительных процедур, связанных с планированием эксперимента, оптимизацией, а также организации работы с большим объемом данных в процедурах принятия решений. Перспективны применение ИМ в сочетании с другими методами принятия решений, интеллектуальными технологиями, экспертными процедурами и реализация имитационно-оптимизационных вычислительных процедур на основе компенсационных подходов.

Актуальным является вопрос интеграции систем ИМ с другими программными пакетами (позволяет осуществлять доступ к процедурным языкам, связанным с кодом имитационной модели) для реализации специальных вычислений.

Применение многопользовательского режима, интерактивного распределенного моделирования, разработки в области взаимодействия ИМ с интернет расширяют возможности и сферу применения ИМ, позволяя

отрабатывать совместные или конкурирующие стратегии различным компаниям.

Следует отметить, что для построения имитационных моделей систем в зависимости от необходимого уровня абстракции применяют различные парадигмы ИМ. Независимо от выбора подхода для построения моделей особое внимание следует уделять формулировке целей моделирования, сбору исходной информации и первоначальных данных, определению исследуемой области системы и требуемого уровня ее детализации, документированию всего процесса моделирования, определению формата предоставляемых результатов.

Моделирование структур производственных систем

При изучении методов моделирования структур производственных систем необходимо рассмотреть следующие вопросы:

- определение основных структурных характеристик;
- определение структурных параметров органов управления организации.

При этом можно использовать следующую информацию.

Моделирование формальной структуры ПС включает сбор информации, характеризующий её в статике (тип организационной структуры, распределение прав и обязанностей и т.п.), и изучение её в динамике (определение эффективности организационной структуры с позиций достижения конечных результатов деятельности).

При моделировании организационной структуры большое значение имеет фиксирование формальных каналов коммуникаций, которые представляют интерес для рационального распределения функций и обязанностей в ходе подготовки и принятия решений. Необходимо изучать также неформальную структуру ПС. Сбор информации для моделирования ведется посредством наблюдения за групповыми и межличностными отношениями и их изменениями, проведения серий интервью, что дает возможность определить морально-психологический климат на предприятии.

Информация собирается по подразделениям, отделам, у должностных лиц предприятия, об их взаимодействии между собой, способах принятия и выполнения решений, их деятельность по обеспечению работоспособности предприятия. Информация для данной работы относится к «внутреннему» типу. Ее получение возможно частично из документов предприятия, а частично - в беседе с сотрудниками.

Моделирование позволяет определять некоторые характеристики структуры ПС и давать им количественную оценку, оценивать качество структуры ПС и её элементов с позиций системного анализа, а также сравнивать различные варианты организационных структур между собой.

Рассмотрим, например, линейно-функциональную структуру управления, в которой каждый структурный элемент (отдел, служба, производственное подразделение) выполняет конкретные задачи и обладает определенными правами и обязанностями (Рис.9.1).

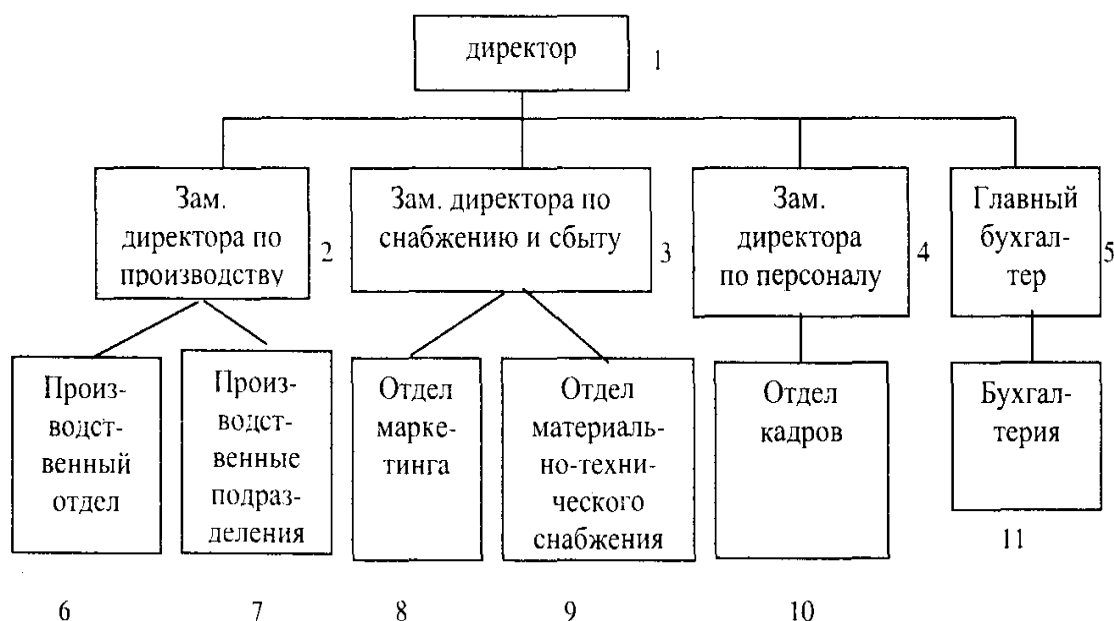


Рис. 9.1. Организационная структура предприятия

Для проведения структурного анализа организационной структуры предприятия представим ее в виде графа $G = \{X, U\}$,

где X - множество вершин ($|X| = n$), соответствующее множеству структурных элементов;

U - множество рёбер ($|U| = m$), соответствующее множеству связей между структурными элементами предприятия.

Граф G , соответствующий данному предприятию, показан на рис. 9.2, где цифры обозначают: 1 - директор предприятия; 2 - зам. директора по производству; 3 - зам. директора по снабжению и сбыту; 4 - зам. директора по персоналу; 5 - главный бухгалтер; 6 - производственный отдел; 7 - производственные подразделения; 8 - отдел маркетинга; 9 - отдел материально-технического снабжения; 10 - отдел кадров; 11 - бухгалтерия.

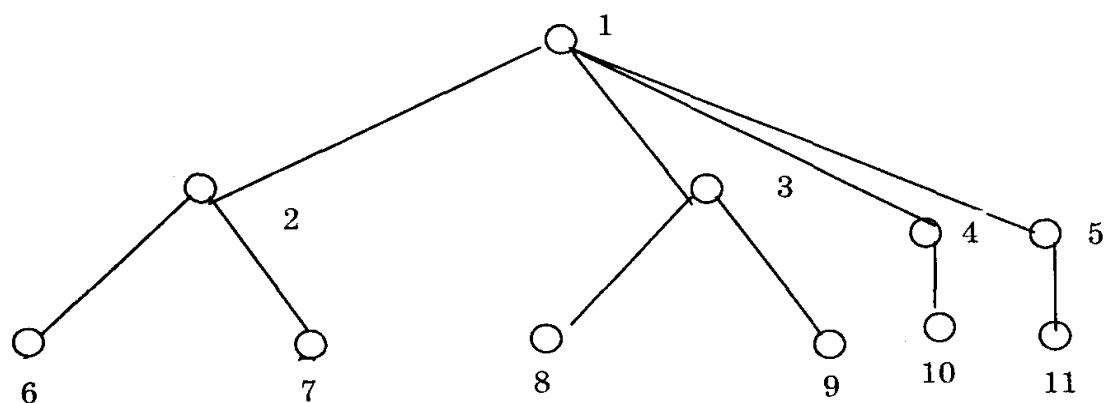


Рис. 9.2. Структурный граф предприятия

Для описания графа G построим матрицу смежности (табл. 9.1), которая для неориентированного графа имеет вид $A = \|a_{ij}\|$,

где a_{ij} - элементы матрицы смежности, определяемые следующим образом:

1 - при наличии связи между элементами i и j ,

$a_{ij}=0$ - при отсутствии связи.

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	ρ_i	ρ_i^2	r_i
1		1	1	1	1							4	16	0,2
2	1					1	1					3	9	0,15
3	1							1	1			3	9	0,15
4	1									1		2	4	0,1
5	1										1	2	4	0,1
6		1										1	1	0,05
7		1										1	1	0,05
8			1									1	1	0,05
9			1									1	1	0,05
10				1								1	1	0,05
11					1							1	1	0,05

1. По матрице смежности определим ранг каждого элемента

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}.$$

где a_{ij} – элементы матрицы смежности, n – количество вершин (элементов) структуры.

Например, $r_1 = 4/20 = 0,2$. Ранги структурных элементов приведены в последнем столбце табл. 9.1.

Чем выше ранг элемента, тем более сильно он связан с другими элементами и тем более тяжёлыми будут последствия при потере качества его функционирования. В рассматриваемом случае наиболее высокий ранг (0,2) имеет первый элемент структуры (директор).

2. Проверим *связность* структуры. Для связных структур (не имеющих обрывов и висячих элементов) должно выполняться условие

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq n-1.$$

где m – множество рёбер графа ($1/2$ от количества связей в матрице смежности).

Правая часть неравенства определяет необходимое минимальное число связей в структуре графа, содержащего n вершин.

Для нашего случая n (количество структурных элементов) равно 11 и условие $(\frac{1}{2}) \cdot 20 = 11 - 1$ выполняется, т.е. структура является связной.

3. Проведем оценку *структурной избыточности* R , отражающей превышение общего числа связей над минимально необходимым:

$$R = \frac{m}{n-1} - 1.$$

Данная характеристика является косвенной оценкой экономичности и надёжности исследуемой структуры и определяет принципиальную возможность функционирования и сохранения связей системы при отказе некоторых её элементов.

Система с большей избыточностью R потенциально более надёжна, но менее экономична. Возможны три варианта: если $R < 0$, то система несвязная; $R = 0$, система обладает минимальной избыточностью; $R > 0$, система имеет избыточность; чем выше R , тем выше избыточность.

Для рассматриваемого случая $R = [(\frac{1}{2}) \cdot 20 / (11 - 1)] - 1 = 0$, т.е. структура имеет минимальную избыточность.

4. Определим неравномерность распределения связей - E . Данный показатель характеризует недоиспользование возможностей данной структуры, имеющей m рёбер и n вершин, в достижении максимальной связности. Величина E определяется по формуле:

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \frac{4m^2}{n}},$$

где $\rho_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ - вес i -го элемента, или количество связей i -го элемента со всеми остальными.

Для рассматриваемого случая $E = \sqrt{48 - 4 \cdot 10^2 / 11} = 3,41$.

Однако для сравнения различных структур по неравномерности связей используют относительную величину:

$$E_{\text{отн}} = E / E_{\text{max}},$$

где E_{max} - максимальное значение неравномерности связей, которое достигается в системе, имеющей максимально возможное число вершин, имеющих одну связь.

Величину E определяют по эмпирической формуле

$$E_{max} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 2y - 3x)^2 - 1 + 2y(y+1) + n(n-1) - \frac{4m^2}{n}},$$

где $y = m - n$; $x = (-1 + \sqrt{8y + 9}) / 2$.

Для рассматриваемого случая

$$y = 10 - 11 = -1; \quad x = (-1 + \sqrt{8 \cdot (-1) + 9}) / 2 = 0.$$

Тогда

$$E_{max} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (2 \cdot (-1))^2 - 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1+1) + 11 \cdot (11-1) - \frac{4 \cdot (10)^2}{11}} = 8,58.$$

Определим величину E для рассматриваемого случая.

$$E_{отн} = 3,41 / 8,58 = 0,4.$$

Величина E для различных типов структур изменяется от 0 (для структур с равномерным распределением связей) до 1.

В рассматриваемом случае распределение связей в структуре довольно равномерное.

5. Определим *структурную компактность* структуры Q , которая отражает общую структурную близость элементов между собой. Для этого используется формула:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i \neq j,$$

где d_{ij} - расстояние от элемента i до элемента j , т.е. минимальное число связей, соединяющих элементы i и j .

Для определения величины общей структурной компактности построим матрицу расстояний $D = \|d_{ij}\|$ - (табл. 9.2). По таблице определяем $Q = 288$.

Матрица расстояний D

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ
1	—	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	16
2	1	—	2	2	2	1	1	3	3	3	3	21
3	1	2	—	2	2	3	3	1	1	3	3	21
4	1	2	2	—	2	3	3	3	3	1	3	23
5	1	2	2	2	—	3	3	3	3	3	1	23
6	2	1	3	3	3	—	2	4	4	4	4	30
7	2	1	3	3	3	2	—	4	4	4	4	30
8	2	3	1	3	3	4	4	—	2	4	4	30
9	2	3	1	3	3	4	4	2	—	4	4	30
10	2	3	3	1	3	4	4	4	4	—	4	32
11	2	3	3	3	1	4	4	4	4	4	—	32

Однако для количественной оценки структурной компактности и возможности объективного сравнения различных организационных структур чаще используют относительный показатель, определяемый по формуле:

$$Q_{отн} = \frac{\bar{Q}}{Q_{min}} - 1,$$

где $Q_{min} = n \cdot (n - 1)$ - минимальное значение компактности для структуры типа «полный граф» (каждый элемент соединен с каждым).

Для нашей структуры $Q_{min} = 11 \cdot (11 - 1) = 110$. Тогда

$$Q_{отн} = 288/110 - 1 = 1,62.$$

Структурную компактность можно характеризовать и другой характеристикой - *диаметром структуры*: $d = \max d_{ij}$, равным максимальному значению расстояния d_{ij} в матрице расстояний. Для рассматриваемой структуры $d = 4$.

С увеличением $Q_{отн}$ и d увеличиваются средние временные задержки при обмене информацией между подразделениями, что вызывает снижение общей надёжности. С этой точки зрения, структура исследуемого предприятия имеет надёжность среднего уровня (максимальную надёжность имеет полный граф, для которого $Q_{отн} = 0$, а $d = 1$).

6. Для характеристики *степени централизации* системы используется показатель центральности структурного элемента:

$$Z_i = \frac{Q}{2 \cdot \sum_{j=1}^n d_{ij}},$$

который характеризует степень удаленности i -го элемента от других элементов структуры.

Чем меньше удален i -й элемент от других, тем больше его центральность и тем большее количество связей осуществляется через него. В рассматриваемом случае наиболее центральным является первый элемент (директор), для которого $\sum d_{ij} = 16 = \min$, то есть он обладает максимальным коэффициентом центральности $Z_{\max} = 288 / (2 \cdot 16) = 9$.

Степень центральности в структуре в целом может быть охарактеризована индексом центральности:

$$\delta = \frac{(n-1)(2 \cdot Z_{\max} - n)}{(n-2) \cdot Z_{\max}} = \frac{(11-1)(2 \cdot 9 - 11)}{(11-2) \cdot 9} = 0,87.$$

Значение степени центральности находится в диапазоне $1 \geq \delta \geq 0$, при этом для структур с равномерным распределением связей $\delta = 0$, для структур, имеющих максимальную степень централизации, $\delta = 1$.

Для рассматриваемого случая высокое значение степени центральности структуры ($\delta = 0,87$) предъявляет высокие требования к пропускной способности центра (элемент 1), через который устанавливается большое число связей по приему и переработке информации, и надёжности его функционирования, так как отказ центрального элемента ведет к полному разрушению структуры.

Данная методика оценки может быть использована при сравнительной оценке свойств структур ПС. С точки зрения топологии внутренних связей, выделяют следующие основные виды структур: а) последовательная; б) кольцевая; в) радиальная; г) древовидная; д) типа «полный граф»; е) несвязная.

Рассмотрим применение количественных характеристик к анализу свойств этих структур.

Результаты вычислений представлены в табл. 9.3.

Результаты сравнительного анализа

вид	R	Q	d	Z	δ	E	$E_{отн}$
а	0	1,0	4	3,3	0,7	1,1	0,41
б	0,25	0,5	2	2,5	0	0	0
в	0	0,6	2	4	1,0	2,7	1
г	0	0,75	3	3,5	0,76	1,8	0,67
д	1,5	0	1	2,5	0	0	0
е	-0,25	—	—	—	—	—	—

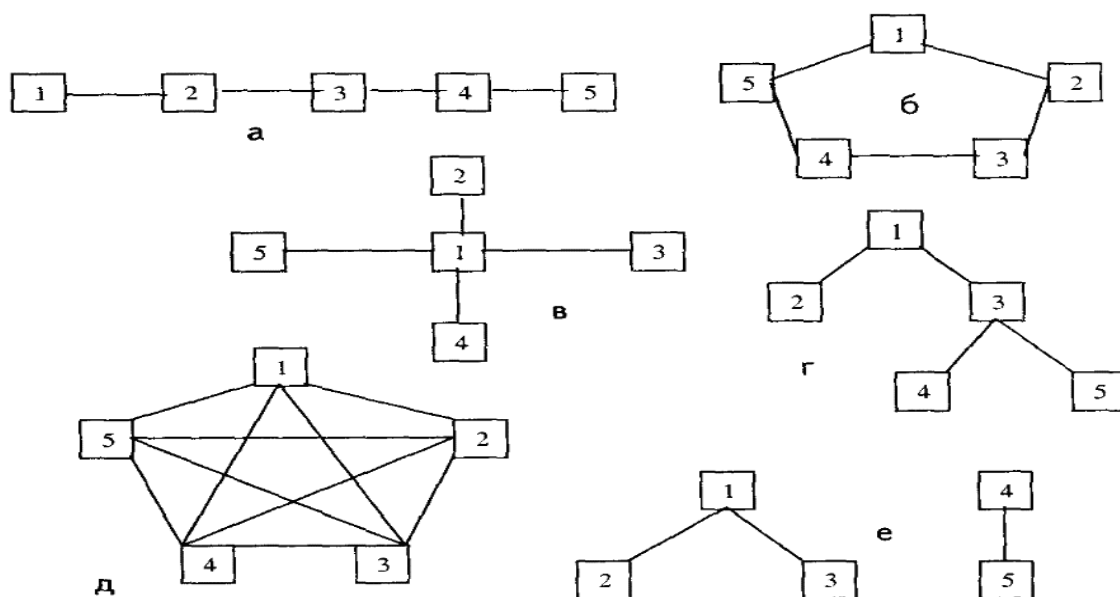


Рис. 9.3. Основные виды моделей структур

Из данных таблицы 9.3 следует:

- 1) для несвязных структур $R < 0$; для структур без избыточности (последовательное, радиальная, древовидная) $R = 0$; для структур с избыточностью по связям (кольцевая, полный граф) – $R > 0$;
- 2) наибольшую близость элементов (показатель Q) имеет структура типа «полный граф»; наименьшую – последовательная; радиальная и кольцевая структуры, неразличимые по показателю d , имеют различные значения Q ;
- 3) радиальная и древовидная структуры, имеющие одинаковые или близкие значения R , Q , d , значительно отличаются по показателю δ , что соответствует физическому смыслу, ибо отход от полной централизации, характерной для

радиальной структуры, ведет к большей равномерности распределения связей по элементам;

4) наивысшую неравномерность распределения связей ($E=1$) имеет радиальная структура, а наименьшую ($E = 0$) - кольцевая структура и полный граф.

Анализируя значения структурных параметров, полученных в результате диагностики, можно выявить основные недостатки структуры организации и внести некоторые коррективы в организационную структуру предприятия.

Тема 10. Моделирование процессов массового обслуживания в экономических системах

Понятие СМО, их классификация.

Системы массового обслуживания — это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания. Экономическая функция процесса распределения работ в организации должна соответствовать замыслу того, кто принимает решение. В общем случае в задачах массового обслуживания в качестве экономической функции рассматривают полные потери на ожидание клиентов и простой обслуживающих каналов, или, более точно, математическое ожидание издержек, вызываемых ожиданием клиентов и простоем обслуживающего персонала, каналов или устройств.

В середине XX века выдающийся ученый в области исследования операций Арнольд Кофман сказал: «Очереди, ожидание являются бедствием нашей эпохи. Можно считать, что во многих случаях они почти неизбежны, если только мы не согласны пойти на расходы, размеры которых не идут ни в какое сравнение с выгодой, получаемой от быстрого обслуживания. Когда же соображения безопасности или другие неотложные требования заставляют обеспечить такую скорость обслуживания, при которой время ожидания остается ниже некоторого установленного значения, теория массового обслуживания позволяет предусмотреть необходимые меры и рассчитать их стоимость».

И сейчас очереди — явление, довольно часто наблюдаемое в нашей повседневной жизни, которое встречается во многих экономических, военных, социальных и других процессах. В 40-50-х годах XX века сформировалась теория массового обслуживания.

В связи с развитием и реорганизацией некоторых отраслей экономики России за последние 15 лет и связанных с ними научных направлений

(специальностей и специализаций), особенно таких, как математические и инструментальные методы экономики, связь и информатизация, логистика, сфера услуг, возникла необходимость внедрять в нашу отечественную практику эту теорию.

Процессы массового обслуживания обладают следующими общими характеристиками.

1. Поступление сообщений или распоряжений на обслуживание через неравные или равные промежутки времени в заданный пункт, называемый центром обслуживания. Примеры: прибытие грузовиков на погрузочную станцию, вход клиентов в магазин, прибытие судов в порты, поступление заказов на изготовление в ателье и пр. Эти сообщения, или распоряжения на обслуживание называются *заявками* (иногда — требованиями).

2. В центре обслуживания сосредоточены один или несколько каналов (линий) обслуживания, либо станций (средства сообщения, багажная касса, продавец и пр.). В известных случаях приходится ожидать, пока канал освободится, для удовлетворения заявки на обслуживание. Время обслуживания заявок в зависимости от случая может быть переменным (т.е. определяемым функцией), случайным (т.е. подчиненным одному из законов распределения случайных величин) или фиксированным.

3. Обезличенное, но общепризнанное понятие «заявка», используемое в середине XX века, к настоящему времени претерпело серьезные изменения. Более широким понятием, введенным создателем первой в мире системы имитационного моделирования Дж. Гордоном (Англия), с 1967 года стал «транзакт». Однако в конце 90 годов XX века М. Эриксон, А. Якобсон, Э. В. Попов, А.А. Емельянов и другие, приложившие усилия к развитию методов имитационного моделирования, теории акторов, акторных сетей и их применению в областях экономики, социологии, экологии и информатики, наряду с терминами «заявка» и «транзакт» стали применять персонализированное понятие «актор».

4. Продолжительность, или время, обслуживания может быть:

- а) постоянной;
- б) переменной, но определенной;
- в) представлять собой случайную величину, вероятность которой известна.

Если интервалы между последовательными поступлениями заявок и/или время обслуживания неопределенны и вероятность их неизвестна, решение задачи невозможно.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

- посты технического обслуживания автомобилей;
- посты ремонта автомобилей;
- персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
- станции технического обслуживания автомобилей;
- аудиторские фирмы;

- отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
- телефонные станции и т. д.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

- входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- дисциплина очереди;
- механизм обслуживания.

Входной поток требований. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди — это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- первым пришел — первый обслуживаешься;
- пришел последним — обслуживаешься первым;
- случайный отбор заявок;
- отбор заявок по критерию приоритетности;
- ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.). Прежде всего, следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Например, структура процесса массового обслуживания включает 3 источниками заявок, 3 очереди и 4 канала (станции) обслуживания.

Для возникновения очереди достаточно, чтобы заявки поступали и/или обслуживание производилось в течение неопределенного времени.

Очередь также может появиться при постоянных интервалах времени между заявками и фиксированном времени обслуживания, если

продолжительность последнего больше, чем интервалы между заявками. Очередь при этом возрастает равномерно и неограниченно.

Совокупность очередей и каналов составляет обслуживающую систему (или просто систему). Особенности процесса данной структуры при составлении соответствующей модели будут следующие.

1. Заявки. Заявки могут быть типовыми или уникальными, имеющими характерные для них свойства или параметры (например, приоритеты).

2. Источники. Заявки 1-го и 2-го источников объединяются в общий поток, который поступает в 1-ю очередь. При построении модели эти два источника могут быть объединены в один общий источник, если только нет каких-то уникальных требований со стороны заказчика модели. Заявки 3-го источника образуют изолированный поток, поступающий во 2-ю и 3-ю очереди, поэтому он может быть представлен другим узлом модели.

3. Каналы. Заявки 1-й очереди обслуживаются исключительно 1-м каналом, а 2-я и 3-я очереди обслуживаются 2-м, 3-м и 4-м каналами. Поэтому 1-й канал можно представить одним узлом обслуживания, имеющим 1 канал, а 2-й, 3-й и 4-й каналы — другим узлом, имеющим 3 канала обслуживания.

4. Очереди. В общем случае очередь становится непустой, как только все каналы обслуживания будут заняты, а из одного из источников появится новая заявка. Формирование 1-й очереди заявок осуществляется из 1-го и 2-го источников. Заявки из 3-го источника попадают во 2-ю и 3-ю очереди по той причине, что дисциплины их ожидания неодинаковы: например, заявки, направляемые во 2-ю очередь, имеют приоритет в отношении заявок, направляемых в 3-ю очередь.

Совокупность отношений порядка, или приоритетов, соблюдаемых в очередях, создает дисциплину ожидания. С точки зрения обеспечения такой дисциплины 2-я и 3-я очереди могут быть представлены единственным узлом для обслуживания акторов в соответствии с их относительными § приоритетами. Например, если заявки во 2-й очереди имеют приоритет 2, а заявки в 3-й очереди обладают приоритетом 1, то при поступлении каждой

новой заявки очередь модели динамически переупорядочивается по приоритетным группам в единой очереди по правилу относительных приоритетов.

5. Судьба заявок после обслуживания. По завершении обслуживания заявка может пойти по разным путям. Например, она может либо вернуться в источник заявок (случай замкнутых систем), либо перейти в другую часть большой системы, либо пойти на уничтожение.

Рассмотрев основные компоненты систем обслуживания, можно констатировать, что *функциональные возможности любой системы массового обслуживания определяются следующими основными факторами:*

- вероятностным распределением моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных или групповых);
- вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
- конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);
- количеством и производительностью обслуживающих каналов;
- дисциплиной очереди;
- мощностью источника требований.

В качестве основных критериев эффективности функционирования систем массового обслуживания в зависимости от характера решаемой задачи могут выступать:

- вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;
- вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;
- относительная и абсолютная пропускная способность системы;
- средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
- среднее время ожидания в очереди;
- средняя длина очереди;
- средний доход от функционирования системы в единицу времени и т.п.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс. По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы марковские и немарковские. В марковских системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими.

Прежде всего, для характеристики потока заявок недостаточно указать, что заявки поступают случайно. Необходимо иметь статистическое описание этого процесса и подобрать адекватный закон распределения вероятностей появления заявок во времени. Появление заявки — это событие. Дадим необходимые разъяснения по этому поводу.

Определим понятие «случай». Мы говорим, что событие происходит случайно, если причины его реализации независимы и настолько многочисленны, что невозможно выяснить все эти причины, чтобы сформулировать законы, управляющие появлением события. Например, мы не можем точно предвидеть такие обстоятельства, как:

- моменты поступления требований на почту;
 - количество бензина, которое пожелает купить автомобилист, остановившийся на станции обслуживания;
 - число, которое выпадет при бросании игральной кости,
- и т. д.

Итак, такие процессы, как поступление требований на почту, заявки на горячее на станции обслуживания, телефонные вызовы, необязательно подчиняются единому и универсальному закону распределения вероятностей. Существует бесконечное множество законов распределения вероятностей. Однако чаще всего если удовлетворяются некоторые условия, то проявляется один и тот же закон. Например, определенные условия, которыми как раз наиболее часто характеризуется поток заявок в процессах массового обслуживания, позволяют применять в отношении этого потока распределение вероятностей, называемым законом Пуассона.

Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему. В случае немарковских процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают два основных вида СМО:

- системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;
- системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.

Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с **ограниченным ожиданием** может ограничиваться:

- длина очереди;
- время пребывания в очереди.

В системах с **неограниченным ожиданием** заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.

Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:

- одноканальные системы;
- многоканальные системы.

Продолжительность обслуживания может быть постоянной, изменяющейся по определенному закону или случайной величиной. Если время обслуживания является случайной величиной, то закон распределения вероятностей часто представляется экспоненциальной кривой. Если через μ обозначить число заявок, которые обслуживаются в единицу времени, при условии, что обслуживание не прекращается, продолжительность обслуживания имеет закон распределения вероятностей.

В некоторых случаях один и тот же объект может представлять собой в разные моменты времени как заявку, так и устройство обслуживания. Например, на остановке такси, куда приходят пассажиры и подъезжают такси, может возникнуть очередь такси или образоваться очередь пассажиров. Для последних временем обслуживания является интервал между отъездом такси, которым пассажир не успел воспользоваться, и прибытием следующего. Однако в случае, когда очередь образуют такси, пассажиры для них будут играть аналогичную роль устройств обслуживания.

На практике полезно исследовать следующие ситуации:

1) параметры входа и выхода:

- входящий поток;
- обслуживание;

2) интервалы времени:

- постоянные интервалы;
- переменные интервалы;
- случайные интервалы;

3) источники и каналы обслуживания:

- ограниченное число заявок или каналов;
- неограниченное число заявок или каналов;

4) дисциплины обслуживания:

- без приоритетов;
- в порядке приоритета;
- обслуживание с разделением времени;
- иные дисциплины.

Можно представить себе сложные и разнообразные случаи — например, когда длина очереди оказывает влияние на параметр потока или параметр обслуживания (длительность обслуживания переменная и определяется функцией от длины очереди). Это явление подобно тем, которые возникают в автоматическом управлении с помощью следящей системы, где действие оказывает обратное воздействие на причину.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

Моделирование систем массового обслуживания **с использованием метода Монте-Карло**

Рассмотренные аналитические методы анализа СМО исходят из предположения, что входящие и исходящие потоки требований являются простейшими. Зависимости, используемые в этих методах для определения показателей качества обслуживания, справедливы лишь для установившегося режима функционирования СМО.

Однако в реальных условиях функционирования СМО имеются переходные режимы, а входящие и исходящие потоки требований являются далеко не простейшими. В этих условиях для оценки качества функционирования систем обслуживания широко используют **метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**. Основой решения задачи исследования функционирования СМО в реальных условиях является

статистическое моделирование входящего потока требований и процесса их обслуживания (исходящего потока требований).

Для решения задачи статистического моделирования функционирования СМО должны быть заданы следующие исходные данные:

- описание СМО (тип, параметры, критерии эффективности работы системы);
- параметры закона распределения периодичности поступлений требований в систему;
- параметры закона распределения времени пребывания требования в очереди (для СМО с ожиданием);
- параметры закона распределения времени обслуживания требований в системе.

Решение задачи статистического моделирования функционирования СМО складывается из следующих этапов.

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i .
2. Равномерно распределенные случайные числа преобразуют в величины с заданным законом распределения:
 - интервал времени между поступлениями требований в систему (Δt);
 - время ухода заявки из очереди (для СМО с ограниченной длиной очереди);
 - длительность времени обслуживания требования каналами (Δt_0).
3. Определяют моменты наступления событий:
 - поступление требования на обслуживание;
 - уход требования из очереди;
 - окончание обслуживания требования в каналах системы.
4. Моделируют функционирование СМО в целом и накапливают статистические данные о процессе обслуживания.
5. Устанавливают новый момент поступления требования в систему, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.

6. Определяют показатели качества функционирования СМО путем обработки результатов моделирования методами математической статистики.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Акаев А. А. Модели инновационного экономического роста AN-типа // МИР (Модернизация, Инновация, Развитие). — 2015. — Т. 6, № 2. — С. 70—79. — doi:10.18184/2079-4665.2015.6.2.70.79.
2. Асемоглу Д. Введение в теорию современного экономического роста: в 2 кн. Книга 1 = Introduction to Modern Economic Growth (2009). — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2018. — 928 с. — ISBN 978-5-7749-1262-9.
3. Барро Р. Д., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост / Пер. с англ. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. — 824 с. — ISBN 978-5-94774-790-4.
4. Бланшар О. Ж., Фишер С. Лекции по макроэкономике = Lectures on macroeconomics. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2014. — 680 с. — ISBN 978-5-7749-0829-5.
5. Джонс Ч. И., Воллрат Д. Введение в теорию экономического роста = Introduction to Economic Growth. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2018. — 296 с. — ISBN 978-5-7749-1299-5
6. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е.В. Бережная. - М.: Финансы и статистика, 2001. 368 с.
7. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок / С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвич. - М.: Статистика, 1980. 263 с.
8. Валеева С.А. Системный анализ в экономике и организации производства: учебник/ под ред С.А. Валеева М.: Политехника, 1991. 397 с.

9. Вавилова А.А. Имитационное моделирование производственных систем / под ред. А.А. Вавилова М.: Машиностроение, Берлин: Техника, 1983. 416 с
10. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели: учеб. пособие для вузов / А.А. Горчаков, И.В. Орлова . - М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995. 136 с.
11. Иозайтис В.С. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учеб. пособие для инженерно-экономич. спец. вузов / В.С. Иозайтис, Ю.А. Львов. - М.: Высш. шк., 1991. 192 с.
12. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании: пер. с англ./ Дж Клейнен. М.: Статистика, 1978. 222 с.
13. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: учеб. пособие / А.Н. Колесников. - М.: ИНФРА-М, 1997. 208 с.
14. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С. Красс. - М.: ИНФРА-М, 1998. 464 с.
15. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.
16. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. - М.: ИНФРА-М, 1997. 302 с.
17. Кубонива М. Математическая экономика на персональном компьютере: пер.с яп. / под ред. М. Кубонива. - М.: Финансы и статистика, 1991. 304 с.
18. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж.Питерсон. - М.: Мир, 1984. 264 с.
19. Советов Б.Я. Моделирование систем: учебник / Б.Я. Советов. - М.: Высш.шк. 1998. 319 с.

Таблица значений функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	38885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2326	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0203	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Удвоенная нормированная функция Лапласа

$$\Phi_{(t)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} \times dt$$

t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	T	Φ(t)
0,00	0,00000	0,30	0,23582	0,60	0,45149	0,90	0,63188
01	00798	31	24944	61	45814	91	63718
02	01596	32	25103	62	46474	92	64243
03	02393	33	25860	63	47131	93	64763
04	03191	34	26614	64	47783	94	65278
05	03988	35	27366	65	48431	95	65789
06	04784	36	28115	66	49075	96	66294
07	05581	37	28862	67	49714	97	66795
08	06376	38	29605	68	50350	98	67291
09	07171	39	30346	69	50981	99	67783
0,10	0,07966	0,40	0,31084	0,70	0,51607	1,00	0,68269
11	08759	41	31819	71	52230	01	68750
12	09552	42	32552	72	52848	02	69227
13	10348	43	33280	73	53461	03	69699
14	11134	44	34006	74	54070	04	70166
15	11924	45	34729	75	54675	05	70628
16	12712	46	35448	76	55275	06	71086
17	13499	47	36164	77	55870	07	71538
18	14285	48	36877	78	56461	08	71986
19	15069	49	37587	79	57047	09	72429
0,20	0,15852	0,50	0,38292	0,80	0,57629	1,10	0,72867
21	16633	51	38995	81	58206	11	73300
22	17413	52	39694	82	58778	12	73729
23	18191	53	40389	83	59346	13	74152
24	18967	54	41080	84	59909	14	74571
25	19741	55	41768	85	60468	15	74986
26	20514	56	42452	86	61021	16	75395
27	21284	57	43132	87	61570	17	75800
28	22052	58	43809	88	62114	18	76200
29	22818	59	44481	89	62953	19	76595

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	T	$\Phi(t)$
1,20	0,76986	55	0,87886	1,90	0,94257	25	0,97555
21	77372	56	88124	91	94387	26	97618
22	77754	57	88358	92	94514	27	97679
23	78130	58	88589	93	94639	28	97759
24	78502	59	88817	94	94792	29	97798
25	78870	1,60	0,89040	95	94882	2,30	0,97855
26	79233	61	89260	96	95000	31	97911
27	79592	62	89477	97	95116	32	97966
28	79945	63	89690	98	95230	33	98019
29	80295	64	89899	99	95341	34	98072
1,30	0,80640	65	90106	2,00	0,95450	35	98123
31	80980	66	90309	01	95557	36	98172
32	81316	67	90508	02	95662	37	98221
33	81948	68	90704	03	95764	38	98269
34	81975	69	90897	04	95865	39	98315
35	82298	1,70	0,91087	05	95964	2,40	0,98360
36	82617	71	91273	06	96060	41	98405
37	82931	72	91457	07	96155	42	98448
38	83241	73	91637	08	96247	43	98490
39	83547	74	91814	09	96338	44	98531
1,40	0,83849	75	91988	2,10	0,96427	45	98571
41	84146	76	92159	11	96517	46	98611
42	84439	77	92327	12	96599	47	98649
43	84728	78	92492	13	96683	48	98686
44	84013	79	92655	14	96765	49	98723
45	85294	1,80	0,92814	15	96844	2,50	0,98758
46	85571	81	92970	16	96923	51	98793
47	85844	82	93124	17	96999	52	98826
48	86113	83	93257	18	97074	53	98859
49	86328	84	93423	19	97148	54	98891
1,50	0,86639	85	93569	2,20	0,97219	55	98923
51	86696	86	93711	21	97289	56	98953
52	87140	87	93852	22	97358	57	98383
53	87398	88	93989	23	97425	58	99012
54	87644	89	94124	24	97491	59	99040

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	T	$\Phi(t)$
2,60	0,99068	2,95	0,99682	3,30	0,99903	3,65	0,99974
61	99095	96	99692	31	99907	66	99975
62	99121	97	99702	32	99910	67	99976
63	99146	98	99712	33	99913	68	99977
64	99171	99	99721	34	99916	69	99978
65	99195	3,00	0,99730	35	99919	3,70	0,99978
66	99219	01	99739	36	99922	71	99979
67	99241	02	99747	37	99925	72	99980
68	99283	03	99755	38	99928	73	99981
69	99285	04	99763	39	99930	74	99982
2,70	0,99307	05	99771	3,40	0,99933	75	99982
71	99327	06	99779	41	99935	76	99983
72	99347	07	99786	42	99937	77	99984
73	99367	08	99793	43	99940	78	99984
74	99386	09	99800	44	99942	79	99985
75	99404	3,10	0,99806	45	99944	3,80	0,99986
76	99422	11	99813	46	99946	81	99986
77	99439	12	99819	47	99948	82	99987
78	99456	13	99825	48	99950	83	99987
79	99473	14	99831	49	99952	84	99988
2,80	0,99489	15	99837	3,50	0,99953	85	99988
81	99505	16	99842	51	99955	86	99989
82	99520	17	99848	52	99957	87	99989
83	99535	18	99853	53	99958	88	99990
84	99549	19	99858	54	99960	89	99990
85	99563	3,20	0,99863	55	99961	3,90	0,99990
86	99576	21	99867	56	99963	91	99991
87	99590	22	99872	57	99964	92	99992
88	99502	23	99876	58	99966	93	99992
89	99615	24	99880	59	99967	94	99992
2,90	0,99627	25	99855	3,60	0,99968	95	99992
91	99639	26	99889	61	99969	96	99993
92	99650	27	99892	62	99971	97	99993
93	99661	28	99896	63	99972	98	99993
94	99672	29	99800	64	99973	99	99993

Значения верхнего предела $\chi^2 q$ в зависимости
от вероятности $P(\chi^2 > \chi^2 q)$
и числа степеней свободы χ^2 -распределения

Число степеней свободы	Вероятность $P(\chi^2 > \chi^2 q)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,3	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	13,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,9	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,9	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Значения α - процентных пределов $t_{\alpha,k}$ в зависимости от k степеней свободы и заданного уровня значимости α для распределения Стьюдента

$\alpha \backslash k$	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,1
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,696	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Значение коэффициента корреляции рангов Спирмена для двухсторонних пределов уровня значимости α

$a \backslash n$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002
4	0,8000	0,8000				
5	0,7000	0,8000	0,9000	0,9000		
6	0,6000	0,7714	0,8286	0,8857	0,9429	
7	0,5357	0,6786	0,7450	0,8571	0,8929	0,9643
8	0,5000	0,6190	0,7143	0,8095	0,8571	0,9286
9	0,4667	0,5833	0,6833	0,7667	0,8167	0,9000
10	0,4424	0,5515	0,6364	0,7333	0,7818	0,8667
И	0,4182	0,5273	0,6091	0,7000	0,7455	0,8364
12	0,3986	0,4965	0,5804	0,6713	0,7273	0,8182
13	0,3791	0,4780	0,5549	0,6429	0,6978	0,7912
14	0,3626	0,4593	0,5341	0,6220	0,6747	0,7670
15	0,3500	0,4429	0,5179	0,6000	0,6536	0,7464
16	0,3382	0,4265	0,5000	0,5824	0,6324	0,7265
17	0,3260	0,4118	0,4853	0,5637	0,6152	0,7083
18	0,3148	0,3994	0,4716	0,5480	0,5975	0,6904
19	0,3070	0,3895	0,4579	0,5333	0,5825	0,6737
20	0,2977	0,3789	0,4451	0,5203	0,5684	0,6586
21	0,2909	0,3688	0,4351	0,5078	0,5545	0,6455
22	0,2829	0,3597	0,4241	0,4963	0,5426	0,6318
23	0,2767	0,3518	0,4150	0,4852	0,5306	0,6186
24	0,2704	0,3435	0,4061	0,4748	0,5200	0,6070
25	0,2646	0,3362	0,3977	0,4654	0,5100	0,5962
26	0,2588	0,3299	0,3894	0,4564	0,5002	0,5856
27	0,2540	0,3236	0,3822	0,4481	0,4915	0,5757
28	0,2490	0,3175	0,3749	0,4401	0,4828	0,5660
29	0,2443	0,3113	0,3685	0,4320	0,4744	0,5567
30	0,2400	0,3059	0,3620	0,4251	0,4665	0,5479