доцент кафедры ЭУС, Папельнюк О.В.

Методические указания

для проведения практических занятий по дисциплине

«Экономическое моделирование производственных систем»

Оглавление

Раздел 1. «Введение в экономическое моделирование производственных систем»

Тема 1. Основы экономического моделирования производственных систем.

Примеры решения задач

Задача 1.1.

Задача использования сырья.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции приведены в таблице 1.1. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 1.1

Вид сырья	Количество ед. сырья на изготовление ед. продукции		Запас Сырья
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	8	5	40
S_3	5	6	30
Цена ед. продукции, руб.	50	40	

Решение.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 – количество единиц продукции P_2. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

Она показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющиеся запасы. Если продукция P_1 не выпускается, то $x_1 = 0$, в противном случае $x_1 > 0$. Аналогично для продукции P_2. Таким образом на неизвестные x_1 и x_2 также должно быть наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$.

Конечная цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2 . Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 дает соответственно $50x_1$ и $40x_2$ рублей прибыли. Суммарная прибыль $Z = 50x_1 + 40x_2$ (руб.)

Таким образом, необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция Z достигает максимум, т.е. найти максимальное значение линейной функции $Z = 50x_1 + 40x_2$ при ограничениях: $\bar{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases},$$

Построенная линейная функция называется функцией цели и совместно с системой ограничений образует математическую модель рассматриваемой экономической задачи.

Задача 1.2.

Задача составления рациона.

При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 единиц питательного вещества S_1, не менее 8 единиц вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг. каждого вида корма и стоимость 1 кг. корма приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Питательные Вещества	Кол-во ед. питательных веществ, 1 кг. корма

	Корм 1	Корм 2
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг корма, руб.	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Решение.

Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество кг. корма 1 и 2 в дневном рационе. Принимая во внимания значения, приведенные в табл.2 и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}.$$

Если корм 1 не используется в рационе, то $x_1 = 0$, в противном случае $x_1 > 0$. Аналогично для корма 2: $x_2 \geq 0$. Т.е. должно выполняться условие: $x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$

Цель данной задачи – добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $Z = 4x_1 + 6x_2$ (руб.). Так как в системе ограничений число переменных меньше числа неравенств, то задача является многовариантной, x_1 и x_2 могут принимать бесчисленное множество решений. Из этого множества следует выбрать такие x_1 и x_2, при которых функция Z принимает минимальное значение.

Таким образом, необходимо найти минимальное значение линейной функции $Z = 4x_1 + 6x_2$ при ограничениях $\bar{x} \geq 0$ и

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Задача 1.3.

Задача о банке.

Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн. долл. Часть этих средств, но не менее 35 млн. долл. Должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, т.к. в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль, или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. В нашем примере ликвидное ограничение таково: ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Решение.

Пусть x_1 – средства (млн.долл.) , размещенные в кредитах, x_2 – средства, вложенные в ценные бумаги. Имеем следующую систему ограничений:

1) $x_1 + x_2 \le 100$ - балансовое ограничение;

2) $x_1 \ge 35$ - кредитное ограничение,

3) $x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2)$ - ликвидное ограничение

4) $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Пусть c_1 - доходность кредитов, c_2 - доходность ценных бумаг. Тогда целевая функция имеет вид $Z = c_1x_1 + c_2x_2$. Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$.

Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг. Таким образом, мы пришли к задаче линейного программирования: найти максимум функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

$$\text{при ограничениях } \bar{x} \geq 0 \text{ и } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 \geq 35 \\ x_2 \geq 0{,}3(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Задача 1.4.

Изготовление парников из металлических стержней.

При изготовлении парников используется материал в виде металлических стержней длиной 220 см. Этот материал разрезается на стержни длиной 120, 100 и 70 см. Для выполнения заказа требуется изготовить не менее 80 стержней длиной 120 см, не менее 120 стержней длиной 100 см и не менее 102 стержня длиной 70 см. Сколько стрежней и каким способом следует разрезать, чтобы получить указанное количество заготовок при минимальных отходах? Составить математическую модель задачи.

Решение.

Определяем все рациональные способы раскроя материала на заготовки. Таких способов оказывается пять – таблица 1.3.

Таблица 1.3.

Способ раскроя	Количество заготовок длиной			Величина отходов, см.
	120 см	100 см	70 см	
1	1	1	0	0
2	1	0	1	30
3	0	2	0	20
4	0	1	1	50
5	0	0	3	10

Обозначим через x_i - количество единиц материала, раскраиваемых по $i-$му способу. Набор натуральных чисел $x_1, x_2, ..., x_5$ составляет план разреза. Из условия задачи вытекают следующие ограничения на неизвестные $x_1, x_2, ..., x_5$:

$$\begin{cases} x_2 + x_2 \geq 80 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 120 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 102 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \; i = \overline{1,5}$$

Суммарное количество отходов описывается целевой функцией

$$Z(x) = 30x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 10x_5 \to \min$$

Задачи для самостоятельного решения.

Составить экономико-математические модели следующих задач.

Задача 1.5.

Завод выпускает изделия двух типов: А и В. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы следующей таблицей 1.4.

Таблица 1.4.

Изделия	Сырье			
	1	2	3	4
А	2	1	0	2
В	3	0	1	1
Запасы сырья	21	4	6	10

Выпуск одного изделия типа А приносит 3 ден. ед прибыли, одного изделия типа В – 2 ден. ед. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Задача 1.6.

Для кормления коров используются концентрированные и грубые корма. 1 кг концентрата содержит 1 кормовую единицу и 0,08 протеина, 1 кг грубых кормов содержит 0,25 кормовых единиц и 0,04 протеина. Суточный рацион одной коровы должен содержать не менее 10 кормовых единиц и не менее 1,2 единиц протеина. Определить оптимальный вариант суточного рациона кормления при условии, чтобы стоимость рациона была минимальной, если 1 кг концентрата стоит 5 руб., а 1 кг грубых кормов – 2 руб.

Задача 1.7.

Для производства двух видов продукции (А и В) предприятие должно использовать оборудование трех видов (1, 2, 3) имеющееся в количествах соответственно 8, 6, 9 ед. По техническим условиям для производства 1 шт продукции А требуется 2 ед. оборудования 1-го вида, 1 ед. оборудования 2-го вида и 3 ед. оборудования 3-го вида, а для производства 1 шт. продукции В – 2, 2 и 0 ед. соответствующих видов оборудования. Известно, что от реализации 1 шт. продукции А предприятие получит 1 ден. ед. прибыли, 1 шт. продукции В – 3 ден. ед. Сколько единиц продукции каждого вида должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль?

Задача 1.8.

Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, на которые планируется использовать такое количество ресурсов трех типов, приходящихся на единицу продукции: 6, 4, 4 ед. и 6, 2, 8 ед. На изготовление продукции используются ресурсы S_1, S_2, S_3, запасы которых ограничены и равны соответственно 36, 20 и 40 ед. Прибыль от реализации единицы продукции вида А равняется 12 д.е., а от единицы продукции В– 15 д.е. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы от ее реализации получить наибольшую прибыль.

Задача 1.9.

Фабрика изготовляет три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики составляют 700 ед. производственного оборудования, 800 ед. сырья и 600 ед. электроэнергии, расходы которых на единицу ткани такие: для оборудования по видам ткани: 1, 3 и 4 ед.; для сырья – 1, 4 и 5 ед.; для электроэнергии – 3, 4 и 2 ед. Цена одного метра ткани первого вида составляет 8 д.е., второго вида – 7 д.е., третьего вида – 6 д.е. Сколько нужно изготовить ткани каждого вида, чтобы прибыль от реализации была наибольшей?

Задача 1.10.

На птицефабрике используются два вида кормов I и II. В единице массы корма I содержится 1 ед. витамина A, 1 ед. витамина B и 1 ед. витамина C. В единице массы корма II содержится 4 ед. витамина A, 2 ед. витамина B и отсутствует витамин C. В дневной рацион каждой птицы необходимо включить не менее 1 ед. витамина A, не менее 4 ед. витамина B и не менее 1 ед. витамина C. Цена единицы массы корма I составляет 3 д.е., корма II – 2 д.е. Составить каждодневный рацион откорма птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион кормления.

Задача 1.11.

Торговая фирма для продажи товаров трех видов использует ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида даны в таблице 1.5.

Таблица 1.5.

Ресурс	Вид товара			Объем ресурсов
	1	2	3	
Время, чел.-ч.	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, м^2	0,1	0,3	0,4	90

Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров 1-го вида – 5 ден.ед., 2-го вида – 8 ден.ед., 3-го вида – 6 ден. ед. Определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую фирме максимальную прибыль.

Задача 1.12.

На четырех станках (1, 2, 3 и 4) обрабатываются два вида деталей (A и B), причем каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известны время обработки деталей на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль, получаемая от выпуска одной детали каждого вида. Эти данные приведены в таблице 1.6. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль при условии, что количество деталей вида B не должно быть меньше количества деталей вида A.

Таблица 1.6.

Станки	Время обработки детали, час.	Время работы

	A	B	станка, час.
1	1	2	16
2	2	3	26
3	1	1	10
4	3	1	24
Прибыль на одну деталь, руб.	4	1	–

Задача 1.13.

Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг сырья. На изготовление одного изделия первого вида расходуется 2 кг сырья, а изделия второго вида – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия первого вида составляет 3000 руб., а изделия второго вида – 2000 руб., причем изделий первого вида требуется изготовить не более 40, а изделий второго вида – не более 20

Задача 1.14.

Можно закупить корм двух видов (1 и 2). В каждой единице корма 1-го вида содержатся 1 ед. витамина А, 2 ед. витамина В и нет витамина С; в каждой единице корма 2-го вида – 2 ед. витамина А, 1 ед. витамина В и 1 ед. витамина С. Животному необходимо дать в сутки не менее 10 ед. витамина А, 10 ед. витамина В и 4 ед. витамина С. Составить наиболее дешевый рацион питания животного, если стоимость единицы корма 1-го вида равна 2 ден.ед., а стоимость единицы корма 2-го вида – 4 ден. ед.

Тема 2. Развитие экономико-математических моделей и методов.

Задания на усвоение понятий и терминов

Задание 2.1.

Автором метода «затраты-выпуск» является:

(?) Л. Канторович

(?) Г. Марковиц

(!) В. Леонтьев

(?) Дж. Стиглиц

(?) Дж. Фон Нейман

Задание 2.2.

Впервые показал спрос как падающую функцию цены:

(?) А. де Монкретьен

(!) О. Курно

(?) Л. Вальрас

(?) А. Маршалл

(?) Дж. Фон Нейман

Задание 2.3.

Основателем эконометрического общества является:

(?)Л. Вальрас

(!) Р. Фриш

(!) Я. Тинберген

(?) А. Маршалл

(?) О. Курно

Задание 2.4.

Основателем линейного программирования является:

(!) Л. Канторович

(?) Г. Марковиц

(?) В. Леонтьев

(?) Дж. Стиглиц

(?) Дж. Фон Нейман

Задание 2.5.

Разработка «теории эффективного портфеля» принадлежит

(!) Г. Марковицу

(?) Р. Лукасу

(?) Р. Фришу

(?) Я, Тинбергену

Задание 2.6.

Нобелевская премия за «вклад в теорию оптимального распределения ресурсов» была вручена:

(!) Л. Канторовичу

(?)В. Леонтьев

(!) К. Тьяллингу

(?) Р. Фришу

(?) Дж. Фон Нейман

Раздел 2. «Экономико-математические модели и методы»

Тема 3. Предельный анализ и оптимизация

Примеры решения задач

Задача 3.1.

Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, на которые планируется использовать три вида ресурсов S_1, S_2, S_3, количество которых ограничено. Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции каждого вида, запас сырья, а также прибыль от реализации 1 ед. продукции, представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Вид ресурсов	Кол-во ресурсов на изготовление единицы продукции		Запас ресурсов
	А	В	
S_1	3	9	30

S_2	5	7	34
S_3	11	6	66
Цена ед. продукции, руб.	6	12	

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы от ее реализации получить наибольшую прибыль.

Решение.

Обозначим через x_1 количество продукции вида А, а через x_2 - количество продукции вида В.

Прибыль от реализации продукции А и В должна быть максимальной, тогда целевая функция задачи имеет вид: $Z = 6x_1 + 12x_2 \to \max$. Затраты каждого вида ресурсов не должны превышать соответствующего запаса, поэтому на основании данных таблицы, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 30 & (1) \\ 5x_1 + 7x_2 \le 34 & (2) \\ 11x_1 + 6x_2 \le 66 & (3) \end{cases}$$

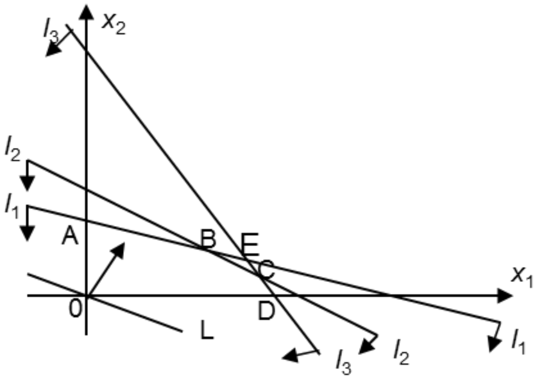
Количество продукции, выпускаемое предприятием, не может быть величиной отрицательной, поэтому на переменные накладываем ограничения неотрицательности: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Таким образом, экономико-математическая модель данной задачи имеет вид:

$Z = 6x_1 + 12x_2 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 30 \\ 5x_1 + 7x_2 \le 34 \\ 11x_1 + 6x_2 \le 66 \end{cases}$$

Построим область допустимых решений.



Построим в системе x_1Ox_2 граничную прямую: $3x_1+9x_2=30$ (l_1). Она проходит через точки $(10;\ 0)$ и $(4;\ 2)$. Для нахождения области решений, которое дает первое неравенство, возьмем контрольную точку, например, $(0;\ 0)$. Подстановка ее в неравенство $3x_1+9x_2\le 30$ дает $3\cdot 0+9\cdot 0<30$ т.е. $0<30$ — строгое неравенство. Значит, из двух полуплоскостей, на которые разделяется плоскость прямой (l_1), множеством решений неравенства является та полуплоскость, которой принадлежит точка $(0;\ 0)$. На чертеже эта полуплоскость указывается направлением стрелок на прямой (l_1). Аналогично, строим две другие граничные прямые $5x_1+7x_2=35\,(l_2)$ и $11x_1+6x_2=66\,(l_3)$ и определяем те полуплоскости, которые соответствуют второму и третьему неравенствам в системе ограничений. На чертеже они указываются направлением стрелок. Неравенству $x_1\ge 0$ отвечает полуплоскость правее оси x_2, а неравенству $x_2\ge 0$ - полуплоскость выше оси x_1.

Таким образом, множеству решений системы отвечает выпуклый многоугольник OABCD. Строим вектор $\vec{n}=(8,\ 12)$. Линия уровня L определяется уравнением $8x_1+12x_2=const$

Перемещаем линию уровня по направлению вектора $\vec{n}$.

Максимальному значению целевой функции будет отвечать точка B, которая наиболее удалена от начала координат. Координаты точки B найдем из решения системы уравнений тех прямых, на пересечении которых она находится:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 30 \\ 5x_1 + 7x_2 = 34 \end{cases}$$

Решением системы являются числа: $x_1 = 4, \quad x_2 = 2$. Подставляя эти числа в целевую функцию, получаем ее максимальное значение: $Z(x) = 6 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 48$.

Из решения задачи можно сделать вывод, что для получения максимальной прибыли предприятию нужно продукцию вида А выпускать в количестве 4 ед., а продукцию вида В – в количестве 2 ед. При этом от ее реализации предприятие получит прибыль в размере 48 руб.

Экономический анализ задачи

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов сырья. Для анализа будем считать, что неравенства системы ограничений могут быть *активными* или *пассивными.* Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет активное ограничение. В противном случае, прямая относится к пассивному ограничению.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс является *дефицитным*, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то ресурс *недефицитный* и имеется в производстве в избытке.

Рассмотрим возможность изменения ресурса правой части ограничения по сырью S_1. Будем перемещать параллельно самой себе прямую l_1 вниз до пересечения с прямыми l_2 и l_3 в точке С. Точку С определим как точку пересечения прямых l_2 и l_3:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 34 \\ 11x_1 + 6x_2 = 66 \end{cases}$$

Из решения системы получим координаты точки С (5,49; 0,94). Подставляя координаты точки С в неравенство (1), имеем:

$$3x_1 + 9x_2 = 3 \cdot 5{,}49 + 9 \cdot 0{,}94 = 24{,}93$$

Т.е. правую часть ограничения (1) можно уменьшить до величины 24,93. При этом величина дохода составит $Z(x) = 6 \cdot 5{,}49 + 12 \cdot 0{,}94 = 44{,}22$ ден.ед.

Рассмотрим увеличение ограничения по сырью S_2. При перемещении параллельно самой себе прямой l_2 вправо до пересечения с прямыми l_1 и l_3 в точке E, ограничение (2) будет оставаться активным. Точку E определим как точку пересечения прямых l_1 и l_3:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 30 \\ 11x_1 + 6x_2 = 66 \end{cases}$$

отсюда $E(5{,}11;\ 1{,}63)$.

Подставляя координаты точки E в ограничение (2), получим $5 \cdot 5{,}11 + 7 \cdot 1{,}63 = 36{,}96$, т.е. предельно допустимый запас сырья S_2 можно увеличивать до значения 36,96 (усл. ед.) При этом величина дохода составит:

$$Z(x) = 6 \cdot 5{,}11 + 12 \cdot 1{,}63 = 50{,}22 \text{ ден. ед.}$$

Выполним аналогичные рассуждения для сырья S_3. Перемещаем прямую l_3 параллельно самой себе влево до пересечения с точкой B(4; 2), подстановка координат которой в неравенство (3) дает результат:

$$11x_1 + 6x_2 = 11 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 56.$$

Следовательно, правую часть ограничения (3) можно уменьшать до величины 56 усл. ед. При этом максимальный доход предприятия не изменится.

Из проведенного анализа видно, что при неизменном оптимальном решении, запас сырья S_3, находящегося в избытке , целесообразно уменьшить до 56 усл. ед. Уменьшение количества сырья S_1 до 24,93 усл.ед. приведет к уменьшению дохода предприятия, а увеличение количества сырья S_2 до 36,96 усл. ед. увеличит этот доход.

Укажем теперь возможный интервал изменения цен на продукцию предприятия, при котором не происходит изменение оптимального решения, т.е. проведем анализ возможного изменения коэффициентов целевой функции. Запишем уравнение линии уровня в общем виде: $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Наклон линии уровня зависит от коэффициентов c_1 и c_2. Из чертежа видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 линия уровня L вращается вокруг точки B по часовой стрелке.

Если по условию задачи $c_2 = 12$, то c_1 можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой l_1. Угловой коэффициент линии уровня $K = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{c_1}{12}$.

Угловой коэффициент прямой l_1 равен $K_{l_1} = -\frac{3}{9}$. Так как прямые совпадают, то $K = K_{l_1}$, т.е. $-\frac{c_1}{12} = -\frac{1}{3}$, откуда $c_1 = 4$. Коэффициент c_1 можно увеличивать до совпадения линии уровня с прямой l_2, угловой коэффициент которой равен $K_{l_2} = -\frac{5}{7}$. Поэтому $-\frac{c_1}{12} = -\frac{5}{7}$, откуда $c_1 = 8{,}6$

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если цена одного изделия A будет изменяться в интервале от 4 до 8,6 ден. ед. Доход предприятия в этом случае будет от 40 до 58,4 ден. ед.

Проводя аналогичные рассуждения для случая $c_1 = 6$, получим, что цена изделия B, при котором оптимальное решение задачи не изменится, лежит в диапазоне от 8,8 до 18 ден. ед., при этом доход предприятия будет составлять от 40,8 до 60 ден. ед.

Задачи для самостоятельного решения.

Составить экономико-математическую модель задачи и решить ее графическим методом.

Задача 3.2.

Предприятие располагает ресурсами двух видов в количестве 120 и 80 ед. соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции 1 и 2, причем расход на изготовление единицы продукции первого вида составляет 2 ед. ресурса первого вида и 2 ед. ресурса второго вида, единицы продукции второго вида – 3 ед. ресурса первого вида и 1 ед. ресурса второго вида. Прибыль от реализации продукции первого вида составляет 6 руб., второго вида – 4 руб. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, при условии, что продукции первого вида должно быть выпущено не менее продукции второго вида.

Ответ: $Z_{\max}(30;\ 20) = 260$ р.

Задача 3.3.

Предприятию необходимо изготовить два вида продукции P_1 и P_2 с использованием трех видов ресурсов R_1, R_2 и R_3, количество которых ограничено. Выходные данные представлены в таблице 3.2. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль

Таблица 3.2.

Вид ресурсов	Запас ресурсов	Кол-во ресурсов на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
R_1	36	6	6
R_2	20	4	2
R_3	40	4	8
Цена 1 ед. продукции, д.е.		12	15

Ответ: $Z_{\max}(2;\ 4) = 84$ руб.

Задача 3.4.

В суточный рацион цыплят включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ составляет 2 ден. ед., продукта $П_2$ - 4 ден.ед. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице 3.3. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Таблица 3.3.

Питательное вещество	Минимальная нома потребления,	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта

	ед./ день	$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Ответ: $Z_{\min}(200;\ 400) = 2000$

Задача 3.5.

Для выпуска изделий двух типов (А и В) на заводе используется сырье четырех видов (1, 2, 3 и 4). Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции задан в таблице 3.4.

Таблица 3.4.

Изделие	Сырье			
	1	2	3	4
A	2	1	2	1
B	3	1	1	0

Запасы сырья составляют: 1 вида – 21 ед., 2-го вида – 8 ед., 3-го вида – 12 ед., 4-го вида – 5 ед. Выпуск одного изделия типа А приносит 3 ден.ед. прибыли, одного изделия типа В – 2 ден. ед. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Ответ: $Z_{\max}(4;\ 4) = 20$

Задача 3.6.

При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли. Исходные данные представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5.

Запасы сырья	Расход сырья на ед. продукции	
	№1	№2
30	1	3
48	4	3
60	3	3
Прибыль	70	60

Ответ: $Z_{\max}(6;\ 8) = 900$

Задача 3.7.

Производство двух видов изделий А и В осуществляется на четырех станках. Время обработки (в часах) каждого изделия на каждом станке приводится в таблице 3.6.

Таблица 3.6.

Вид изделия	Время обработки одного изделия на станке			
	I	II	III	IV
А	2	1	3	1
В	2	2	1	4

Сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить наибольший доход, если станки можно использовать в течение 12, 10, 18, 28 ч, а доход от реализации изделия А – 2 руб., изделия В – 3 руб.?

Ответ: $Z_{\max}(2;\ 4) = 16$

Задача 3.8.

Совхоз закупает удобрения двух видов. В единице массы удобрения 1-го вида содержится 3 усл.ед. химического вещества А , 5– вещества В и 5 – вещества С. В единице массы удобрения 2-го вида – 4 усл.ед. вещества А, 2 – вещества В и 4 – вещества С. На 1 га почвы необходимо внести не менее 33 усл.ед. вещества А , 27 – вещества В и 39 – вещества С. Составить наиболее экономичный план закупки удобрений (в расчете на 1 га), если цены удобрений (на 1 ед. массы) таковы: 1-го вида – 3 ден.ед., 2-го вида – 2 ден. ед.

Ответ: $Z_{\min}(3;\ 6) = 21$

Задача 3. 9.

Производственный цех деревообрабатывающей промышленности ежемесячно имеет в своем распоряжении 48 м пиломатериалов и 45 м стекла. В цехах изготавливают два вида шкафов: конторские и библиотечные. Расход материалов на один шкаф каждого вида приведен в таблице 3.7. Продажная цена конторского шкафа равна 2000 усл.ед., а библиотечного – 4000 усл.ед. Определить такой ассортимент производства, при котором месячный доход будет максимальным.

Таблица 3.7.

Вид шкафа	Сырье	
	Пиломатериал	Стекло
Конторский	0,3	0
Библиотечный	0,3	1,5
Запасы	48	45

Ответ: $Z_{\max}(0;\,160)=640000$

Задача 3.10.

Для производства стали определенной марки, в которую в качестве легирующих веществ должны входить химические элементы K, L, P можно закупать шихту двух видов (I и II). В табл. указано, сколько требуется каждого из этих элементов для производства 100 т стали (по технологии можно немного больше, но меньше – нельзя). Содержание этих элементов в каждой тонне шихты, а также стоимость 1 т шихты каждого вида приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8.

Вид шихты	Стоимость 1 т шихты	Легирующие вещества		
		K	L	P
I	3	3	2	1
II	2	1	1	1
Необходимое количество легирующих веществ		9	8	6

Ответ: $Z_{\min}(2;\,4)=14$

Тема 4. Симплексный метод.

Примеры решения задач.

Задача 4.1.

Решить симплексным методом задачу линейного программирования:

$$Z(x) = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -x_4 \\ \\ +x_5 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$$

Решение.

Приводим задачу к каноническому виду.

$$Z(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5$$

Находим начальное опорное решение. Для этого заполняем симплексную таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

			1	−1	1	0	0			
Б	Сб	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Θ_1	Θ_2	Θ_3
нахождение начального опорного решения		6 1 24	4 -1 1	2 1 -1	1 **1** 4	-1 0 0	0 0 1	3/2 — 24	3 1 —	6 1 6
		5 1 20	**5** -1 5	1 1 -5	0 1 0	-1 0 0	0 0 1	1 — 4	5 1 —	— 1 —
A_1 A_3 A_5	1 1 0	1 2 15	1 0 0	1/5 6/5 -6	0 1 0	-1/5 -1/5 **1**	0 0 1			
Δ к		3	0	12/5	0	-2/5	0			

Получаем начальное опорное решение $X_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 15)$ с единичным базисом $Б_1 = (A_1,\ A_3,\ A_5)$.

Найдем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения по формуле (2*) и (2).

$$\Delta_0 = (1,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ 2,\ 15) = 1 + 2 + 0 = 3$$

$$\Delta_1 = (1,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ 0,\ 0) - 1 = 1 + 0 + 0 - 1 = 0;$$

$$\Delta_2 = (1,\ 1,\ 0) \cdot (1/5,\ 6/5,\ -6) - (-1) = 1/5 + 6/5 + 0 + 1 = 12/5;$$

$$\Delta_3 = (1,\,1,\,0)\cdot(0,\,1,\,0) - 1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0;$$

$$\Delta_4 = (1,\,1,\,0)\cdot(-1/5, -1/5,\,1) - 0 = -1/5 - 1/5 + 0 - 0 = -2/5;$$

$$\Delta_5 = (1,\,1,\,0)\cdot(0,\,0,\,1) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0$$

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум оценка $\Delta_4 = -2/5 < 0$. Для улучшения решения, необходимо ввести вектор A_4 в базис опорного решения (таблица 4.2.)

Таблица 4.2.

			1	-1	1	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	4	1	-1	0	0	1/5
A_3	1	5	0	0	1	0	1/5
A_4	0	15	0	-6	0	1	1
$\Delta_к$		9	0	0	0	0	2/5

Полученное решение является оптимальным, так как оценки для всех векторов-условий неотрицательные. Как видно из последней таблицы, оценка вектора A_2, не входящего в базис, равна нулю. Однако разрешающего элемента в указанном столбце нет, поэтому полученное решение является единственным.

Ответ: $\max Z(x) = 9$ при $X^* = (4,\,0,\,5)$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 4.2.

Составить модель задачи и решить ее симплексным методом.

Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг металла. На изготовление одного изделия 1-го вида расходуется 2 кг металла, а изделия 2-го вида – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей прибыли, если отпускная стоимость одного изделия 1-го вида составляет 3 руб., а изделия 2-го вида 2 руб., причем изделий 1-го вида требуется изготовить не более 40, а изделий 2-го вида – не более 20.

Ответ: $Z_{\min}(6;\,4) = -7$

Задача 4.3.

Фирма выпускает четыре пользующихся спросом изделия, причем месячная программа выпуска составляет 10 изделий типа 1 и 3, 200 изделий типа 2 и 120 изделий типа 4. Нормы расхода сырья на единицу различных типов изделий приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Вид сырья	Норма расхода на 1 изделие				Запас сырья, ед.
	1	2	3	4	
1	5	1	0	2	1000
2	4	2	2	1	600
3	1	0	2	1	150

Прибыль от реализации изделий типа 1 равна 6 ден.ед., изделий типа 2 – 2 ден.ед., изделий типа 3- 2,5 ден.ед. и изделий типа 4 – 4 ден.ед. Определить, является ли месячная программа выпуска изделий оптимальной; если нет, то определить месячную программу и дополнительный доход, который фирма может при этом получить.

Ответ: $Z_{\max}(0;\ 225; 0; 150) = 1050$

Задача 4.4.

Изделие состоит из деталей А и В, причем на одну деталь вида В требуются две детали вида А. Затраты машинного времени на производство одной детали и наличие этого времени в планируемый период даны в таблице 4.4.

Таблица 4.4.

Машины	Время обработки одной детали		Наличие рабочего времени (час.)
	А	В	
I	1	2	24
II	2	3	45
III	4	2	60
IV	3	4	70

Составить план производства деталей вида А и В, обеспечивающий максимальный выпуск этих деталей**.**

Ответ: $Z_{\max}(12;\ 6)=18$

Задача 4.5.

В состав рациона кормления входят три продукта: сено, силос и концентраты, содержащие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ (в г на 1 кг) соответствующего продукта питания и минимально необходимые нормы их потребления заданы таблицей 4.5.

Таблица 4.5.

Продукты/ Питательные вещества	Белок	Кальций	Витамины
Сено	50	6	2
Силос	20	4	1
Концентраты	180	3	1
Нормы потребления	1930	120	40

Используя эти исходные данные, решить следующие задачи:

1. Определить оптимальный рацион кормления из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта питания соответственно составляет: сена – 3 у.е., силоса - 2 у.е. и концентратов – 5 у.е.

2. Решить задачу 1, если заданы дополнительные предельные нормы суточной выдачи: сена – не более 12 кг, силоса- не более 20 кг и концентратов не более 16 кг.

3. Включить в задачу 2 условие ограниченности ресурсов продуктов на один рацион: сена – не более 10 кг, силоса – не более 15 кг и концентратов – не более 20 кг.

4. Определить влияние на минимальную стоимость рациона увеличения ресурсов сена и силоса на 1 кг и концентратов на 3 кг.

Ответ: 1) $Z_{\min}(17;\ 0;\ 6)=81$; 2) $x_1=12$, $x_2=9{,}69$, $x_3=6{,}31$, $Z_{\min}=86{,}94$; 3) $Z_{\min}(10;\ 13{,}56;\ 6{,}44)=89{,}31$; 4) стоимость уменьшается на 3,56 у.е/кг.

Задача 4.6.

В районе имеются четыре ткацкие фабрики, выпускающие ткань определенного артикула. Для ее выпуска требуется два вида пряжи А и В. По плану району отпускается 6000 и 4000 у.е. этих видов пряжи. В таблице приведен расход в единицу времени на каждой фабрике каждого вида пряжи и данные, характеризующие производительность (количество ткани, изготовляемое на каждой фабрике в единицу времени) – таблица 4.6.

Таблица 4.6.

Вид пряжи	Запасы пряжи	Расход пряжи в ед. времени на фабриках			
		1	2	3	4
А	6000	4	9	7	10
В	4000	1	1	3	4
Производительность фабрик		12	20	18	40

Определить время работы каждой фабрики по выпуску ткани данного артикула так, чтобы при этом обеспечивался максимальный выпуск ткани. В соответствии с оптимальным планом распределить пряжу между фабриками.

Ответ: $Z_{\max}(0;\ 0;\ 0;\ 600) = 2400$

Задача 4.7. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества А, В, С. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества А не менее 6 единиц, вещества В не менее 8 единиц, вещества С не менее 12 единиц. Вещества А, В, С содержатся в трех видах продукции I, II, III в концентрации, указанной в таблице 4.7.

Таблица 4.7.

Продукты	Химические вещества		
	А	В	С
I	2	4	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III составляет соответственно 2 руб., 3 руб. и 2,5 руб. Смесь составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.

Ответ: $Z_{\min}(4;0;0)=8$

Задача 4.8.

Предприятию необходимо изготовить три вида продукции P_1, P_2, P_3 с использованием двух видов ресурсов R_1, R_2, запасы которых ограничены.

Числовые данные задачи иллюстрируются таблицей 4.8.

Таблица 4.8.

Вид ресурсов	Запас ресурсов	Количество ресурсов на изготовление единицы продукции		
		P_1	P_2	P_3
R_1	40	4	4	2
R_2	30	3	8	4
Прибыль на 1ед., д.е.		10	15	12

Составить экономико-математическую модель выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить наибольшую прибыль.

Ответ: $Z_{\max}(10;\ 0;\ 0)=100$

Задача 4.9.

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице 4.9.

Таблица 4.9.

Вид ресурса	Вид товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг.	3	5	2	4	60

Рабочая сила, час.	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-час.	10	14	8	16	128
Цена ед. товара, руб.	30	25	56	48	

По этим исходным данным решить задачи: 1). Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной? 2). Определить оптимальный ассортимент при дополнительном условии: первого товара выпустить не более 5 ед., второго – не менее 8 ед., а третьего и четвертого - в отношении 1: 2.

Ответ: **1)** $Z_{\max}(0;0;16;0)==896$ **; 2)** $Z_{\max}(0;\ 8;\ 0{,}4;\ 0{,}8)=260{,}8$

Задача 4.10.

Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используются два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел.-ч. В таблице 4.10 приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия.

Таблица 4.10.

Ресурсы	Затраты на 1 ед. изделия			
	столы	стулья	бюро	книжные шкафы
Доски I типа, м.	5	1	9	12
Доски II типа, м.	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-час.	3	2	5	10
Прибыль, руб./ шт.	12	5	15	10

По этим данным решить следующие задачи**:**

1) Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

2) Решить ту же задачу при дополнительных условиях, налагаемых на ассортимент: столов – не менее 40, стульев – не менее 130, бюро – не менее 30 и книжных шкафов – не более 10.

3) Решить задачу 1 при условии комплектности: количество столов относится к количеству стульев, как 1 : 6.

4) Заданы дополнительно цены: стол – 32 руб., стул -15 руб., бюро – 12 руб. и книжный шкаф – 80 руб. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию, при единственном ограничении на ассортимент – условии комплектности столов и стульев 1:6.

Ответ: 1) $x_1 = 267$, $Z_{\max} = 3200$; 2) $Z_{\max}(130;\,130;\,30;\,0) = 2660$; 3) $x_3 = 160$; $Z_{\max} = 2400$; 4) $Z_{\max}(50;\,300;\,0;\,5) = 6500$

Задача 4.11.

На свиноферме производится откорм свиней. Известно, что каждая свинья должна ежедневно получать не менее 6 ед. вещества K, 8 ед. вещества L и 12 ед. вещества M (вещества K, L и M могут, в частности, означать жиры, белки и углеводы). Для откорма свиней можно закупить три вида кормов: I, II и III (например, картофель, жмых и комбикорм). Содержание каждого вещества в различных видах корме и стоимость единицы каждого корма приведены в таблице 4.11. Требуется обеспечить наиболее дешевый рацион корма.

Таблица 4.11.

Вид корма	Вещества			Стоимость ед. корма
	K	L	M	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Ответ: $Z_{\max}(0;\,10/3;\,8/9) = 110/9$

Задача 4.12.

АО «Механический завод» при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Необходимые исходные данные приведены в таблице 4.12.

Таблица 4.12.

Оборудование	Деталь				Полезный фонд времени, станко-час.
	1		2		
	Технологический способ				
	1	2	1	2	
Фрезерное	2	2	3	0	20
Токарное	3	1	1	2	37
Сварочное	0	1	1	4	30
Прибыль, ден.ед.	11	6	9	6	—

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Ответ: $Z_{\max}(7;\ 0;\ 2;\ 7) = 137$

Тема 5. Теория двойственности

Примеры решения задач

Задача 5.1.

Составить задачу, двойственную следующей:

$$Z(x) = 3x_1 + x_2 \to \max \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, (*) \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Решение.

Третье неравенство системы (*) не удовлетворяет п. 3 правил составления двойственной задачи. Поэтому умножим его на « - 1»:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

Для облегчения составления двойственной задачи лучше пользоваться расширенной матрицей В, в которую наряду с коэффициентами при переменных системы ограничений исходной задачи запишем свободные члены и коэффициенты при переменных в целевой функции, выделив для этой цели дополнительную строку и столбец. Матрицу В транспонируем и, используя транспонированную матрицу B', составляем задачу, двойственную исходной. В данном случае матрицы В и B' имеют вид

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & Z \end{array}\right) \qquad B' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & F \end{array}\right)$$

Двойственная задача сводится к нахождению минимума функции

$$F(y) = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 3 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4$$

Задача 5.2.

Составить задачу, двойственную данной:

$$Z(x) = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

Решение.

Данная задача имеет вид исходной задачи несимметричной пары двойственных задач. Записываем двойственную задачу:

$$F(y) = 17y_1 + 11y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 \le 2 \\ 5y_1 + 3y_2 \le -2 \\ 3y_1 + y_2 \le -4 \\ 2y_1 + 2y_2 \le 6. \end{cases}$$

Переменные y_1 и y_2 не должны удовлетворять условию неотрицательности, так как они соответствуют ограничениям-равенствам исходной задачи.

Задача 5.3.

Составить задачу, двойственную данной:

$$Z(x) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min ,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

Решение.

Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим второе ограничение-неравенство на « -1», так как в задаче на минимум неравенства должны иметь вид «≥». Исходная задача примет вид:

$$Z(x) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge -7 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

Составляем двойственную задачу:

$$F(y) = 3 + y_1 - 7y_2 + 6y_3 \to \max ,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - y_3 \le 2 \\ -3y_1 - 4y_2 + y_3 \le 1 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \le 6 \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Переменная y_1, соответствующая ограничению-равенству, может быть любого знака.

Задача 5.4.

Для данной задачи составить двойственную, решить ее симплексным методом и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи.

$$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min ,$$

$$\text{при } x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$$

и системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 5 \\ x_2 + 2x_3 \ge 2 \end{cases}$$

Решение.

Используя вторую симметричную пару двойственных задач (2), составляем задачу, двойственную к исходной:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & Z \end{array}\right) \qquad B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & F \end{array}\right)$$

Двойственная задача примет вид:

$$F(y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \le 4 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \le 6 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = 1,2,3$$

Введя неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 приводим задачу к каноническому виду:

$$F)(y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_4 = 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 4 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 = 6 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5,6$$

Находим начальное опорное решение $У_1$ = (0,0,0,2,4,6) с базисом из единичных векторов $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Решение задачи симплексным методом приведено в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

			6	5	2	0	0	0			
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_1	Θ_2	Θ_3
A_4	0	2	2	$\underline{1}$	0	1	0	0	1	2	-
A_5	0	4	1	1	1	0	1	0	4	4	4
A_6	0	6	2	-1	2	0	0	1	3	-	3
Δ_j		0	-6	-5	-2	0	0	0	Θ_3		
A_2	5	2	2	1	0	1	0	0	-		
A_5	0	2	- 1	0	$\underline{1}$	-1	1	0	2		
A_6	0	8	4	0	2	1	0	1	4		
Δ_j		10	4	0	-2	5	0	0			
A_2	5	2	2	1	0	1	0	0			
A_3	2	2	-1	0	1	-1	1	0			
A_6	0	4	6	0	0	3	-2	1			
Δj		14	2	0	0	3	2	0			

Оптимальное решение двойственной задачи $У^* = (0,2,2,0,0,4)$, его базис $Б^* = (A_2, A_3, A_6)$, значение целевой функции max $F(Y) = F(Y^*) = 14$.Оптимальное решение исходной задачи, двойственной к решенной, можно найти по формуле $X^*=C^*D^{-1}$. Матрица D состоит из координат векторов A_2, A_3, A_6 , входящих в базис оптимального решения двойственной задачи:

$$D = (A_2, A_3, A_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице. Ее столбцы располагаются под столбцами единичной матрицы, т.е. под единичными векторами A_4, A_5, A_6 , образующими базис начального опорного решения:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Координатами вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения y_2, y_3, y_6 . Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы условий входят в базис оптимального решения, т.е. $C^* = (5;2;0)$.

Вычисляем $X^* = C^* D^{-1} = (5,2,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3,2,0)$

Оптимальное решение исходной задачи можно найти проще, по формуле

$$x_i^* = \Delta_i^* + c_i, \quad i = \overline{1,3}$$

Для этого необходимо к оценкам разложений по базису оптимального решения векторов A_4, A_5, A_6 , входящих в базис начального опорного решения, т.е. к оценкам этих векторов в последней симплексной таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции (они расположены над верхней строкой таблицы над соответствующими оценками)

$$x_1^* = 3 + 0 = 3,\ x_2^* = 2 + 0 = 2,\ x_3^* = 0 + 0 = 0$$

Ответ: $\min Z(x) = 14$ при $X^* = (3,2,0)$.

Задача 5.5.

Найти решение данной задачи и двойственной к ней:

$$Z(X) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Решение.

Задача, двойственная к ней имеет вид:

$$F(Y) = y_1 + 11y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq -6 \\ y_1 \geq 2 \\ y_2 \geq -1 \\ y_3 \geq 3 \end{cases}$$

В данной паре двойственных задач легче решить исходную задачу, так как она имеет начальное опорное решение $X_1^* = (0, 0, 1, 11, 2)$ с базисом $Б_1 = (A_3, A_4, A_5)$ и ее без дополнительных преобразований можно решить симплексным методом. Решение исходной задачи приведено в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

			1	-6	2	- 1	3
Б	$С_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	2	1	-2	1	1	0	0
A_4	-1	11	2	3	0	1	0
A_5	3	2	**1**	-2	0	0	1
Δ_j		-3	-4	-1	0	0	0
A_3	2	5	0	- 3	1	0	2
A_4	-1	7	0	**7**	0	1	- 2
A_1	1	2	1	-2	0	0	1
Δ_j		5	0	- 9	0	0	4
A_3	2	8	0	0	1	3/7	8/7
A_2	- 6	1	0	1	0	1/7	-2/7
A_1	1	4	1	0	0	2/7	3/7
Δ_j		14	0	0	0	9/7	10/7

Оптимальным решением исходной задачи является $X^* = (4;\ 1;\ 8)$, базис оптимального решения $Б = (A_3,\ A_2,\ A_1)$, значение целевой функции $\max Z(X) = 14$.

Найдем оптимальное решение двойственной задачи по формуле

$$\mathbf{У} = C^* D^{-1} = (2; -6; 1)\begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 8/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \\ 0 & 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} = \left(2; \frac{2}{7}; \frac{31}{7}\right).$$

Данное решение можно найти по формулам $y_i^* = \Delta_i^* + c_i^*$

$$y_1^* = 0 + 2 = 2; \qquad y_2^* = 9/7 - 1 = 2/7; \qquad y_3^* = 10/7 + 3 = 31/7.$$

Таким образом, $\min F(Y)=14$ при У* = (2; 2/7; 31/7),

Ответ: $\max Z(X)=\min F(Y)=14$ при Х* = (4; 1; 8),

У* = (2; 2/7; 31/7).

Задача 5.6.

Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X)=-2x_1+4x_2+14x_3+2x_4\to\min$$

$$\begin{cases}-2x_1-x_2+x_3+2x_4=6,\\ -x_1+2x_2+4x_3-5x_4=30,\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}$$

Решение.

Составим двойственную задачу: $F(Y)=6y_1+30y_2\to\max,$

$$\begin{cases}-2y_1-y_2\leq -2,\\ -y_1+2y_2\leq 4,\\ y_1+4y_2\leq 14,\\ 2y_1-5y_2\leq 2\end{cases}$$

Решая эту задачу графическим методом, получаем, что оптимальное решение задачи достигается при $Y^*=(2,3)$. Значение целевой функции двойственной задачи составляет:

$$F(У)=6\cdot 2+30\cdot 3=102.$$

Подставим оптимальное решение $y_1=2,\ y_2=3$ в систему ограничений двойственной задачи. Получим, что первое и четвертое ограничения выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases}-2\cdot 2-3<-2\Rightarrow x_1=0,\\ -2+2\cdot 3=4,\\ 2+4\cdot 3=14,\\ 2\cdot 2-5\cdot 3<2\Rightarrow x_4=0\end{cases}$$

Согласно **Теореме двойственности 2** соответствующие координаты оптимального решения исходной задачи равны нулю: $x_1 = x_4 = 0$.

Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + 4x_3 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \ 6x_3 = 42, \quad x_3 = 7,\ x_2 = 1; \qquad X^* = (0,\ 1,\ 7,\ 0)$$

Ответ: $\min Z(X) = \max F(Y) = 102$ при $X^* = (0,\ 1,\ 7,\ 0)$, $У^* = (2;\ 3)$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 5.7.

При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Исходные данные представлены в таблице 5.3.

Таблица 5.3.

Запасы сырья	Расход сырья на ед. продукции	
	№1	№2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Прибыль	40	50

Определить план выпуска продукции, обеспечивающий получение максимальной прибыли. Составить для данной задачи двойственную и найти оптимальный план двойственной задачи.

Ответ: $\max Z(x) = \min F(y) = 570$ при $X^* = (3;9)$, $Y^* = (0;\ 35;\ 5)$

Задача 5.8.

Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В и Г) используются три вида сырья (I, II и III). Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции даны в таблице 5.4.

Таблица 5.4.

Сырье	Норма расхода	Ресурсы

	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль	7,5	3	6	12	

1) Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли.

2) Сформулировать экономически, записать и решить двойственную задачу.

3) Определить изменение максимальной прибыли при увеличении количества сырья I и III видов на 40 и 50 кг соответственно и при уменьшении количества сырья II вида на 30кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений.

4) Сопоставить оценку затрат и прибыли по оптимальному плану и каждому виду продукции в отдельности.

5) Оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы затрат которого соответственно равны 2, 4, 2 и прибыль равна 15.

Ответ: 1) $\max Z(x) = 900$ при $X^* = (0;\ 0;\ 400;\ 500)$ или $X^* = (92;\ 0;\ 369;\ 507)$ 2) $Y^* = (3;\ 1{,}5;\ 0)$ 3) $\Delta Z_1 = 120;\quad \Delta Z_2 = -45;\quad \Delta Z_3 = 0$; $\Delta Z_{\max} = 7{,}5$; 4) выгодно.

Задача 5.9.

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимым для производства любого из трех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного товара, запасы ресурсов указаны в таблице 5.5.

Таблица 5.5.

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы товара			Объем ресурсов
	I	II	III	
Сырье, кг.	3	5	2	70

Рабочая сила, чел.	6	5	8	160
Оборудование, станко-час.	16	14	18	400

Определить оптимальный ассортимент товара, максимизирующий стоимость обработки, если стоимости обработки единицы каждого вида товаров заданы числами 17, 35, 20. Составить для данной задачи двойственную и найти оптимальный план двойственной задачи.

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходных задач.

Ответ: $\max Z(x) = = \min F(y) = 580$ при $X^* = (0;\, 8;\, 15)$, $Y^* = (6;\, 1;\, 0)$

Задача 5.10.

$$Z(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}$$

Ответ: $Z_{\max} = = F_{\min} = 4/3$, $X^* = (0;\, 2/3;\, 2/3)$, $Y^* = (\,1/3;\, 1/3)$

Задача 5.10.

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}$$

Ответ: $Z_{\min} = F_{\max} = 9{,}5$ при $X^* = (3/2;\, 5/2;\, 0)$, $Y^* = (3/2;\, 1/2)$

Задача 5.11.

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2$

Ответ: $Z_{\max} = = F_{\min} = 20$ при $X^* = (4;\ 4)$, $Y^* = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$

Задача 5.12.

$Z(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3$

Ответ: $Z_{\min} = F_{\max}$ =23,2 при $X^* = (3{,}4;\ 0;\ 1{,}6)$, $Y^* = (4{,}4;\ 0;\ 0{,}4;\ 0)$

Задача 5.13.

$Z(x) = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}$

Ответ: $Z_{\min} = F_{\max} = = -46/3$, $X^* = (0;\ 1/3;\ 0;\ 11/3;\ 4;\ 0)$, $Y^* = (-19/3;\ -11/3;\ -1/3)$

Задача 5.14.

$Z(x) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \ge 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}$

Ответ: задача не имеет решения; $\max F(y) \to +\infty$

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходных задач.

Задача 5.15.

$Z(x)=5x_1+53x_2-19x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -8x_1+x_2+7x_3 \ge -7 \\ 7x_1+4x_2-11x_3 \ge 11 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j=1,\ 2,\ 3$

Ответ: $Z_{\min}(1;1;0)=F_{\max}(9;11)=58$

Задача 5.16.

$Z(x)=21x_1+8x_2+2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 \ge 5 \\ 3x_1+2x_2-x_3 \ge 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,3}$

Ответ: $Z_{\min}=F_{\max}=24$, $X^*=(0;\ 7/3;\ 8/3), Y^*=(4;\ 2)$

Задача 5.17.

$Z(x)=x_1-x_2+2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3 \le 10 \\ -2x_1+x_2+3x_3 \le 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,3}$

Ответ: $Z(x) \to +\infty$, система ограничений двойственной задачи несовместна.

Задача 5.18.

$Z(x)=6x_1+4x_2+6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3 \ge 1 \\ 2x_1-x_2 \le -6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,3}$

Ответ: $Z_{\min}(0;6;7) = \max F(6;10) = 66$

Задача 5.19

$Z(x) = -2x_1 + 38x_2 - 11x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}$

Ответ: $Z_{\min} = F_{\max} = 68, \ X^*(0{,}2;\ 1{,}8;\ 0), \ Y^* = (8;\ 30)$

Задача 5.20.

$Z(x) = 2x_1 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$

Ответ: $Z_{\max} = F_{\min} = 4, \ X^* = (2;2;0;0), \ Y_1^* = (4/3;-2/3), Y_2^* = (10/3;-2)$

Тема 6. Транспортная задача

Примеры решения задач

Задача 6.1.

Используя метод минимальной стоимости построить начальное опорное, решение ТЗ, исходные данные представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1.

	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

Решение.

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{14}=1$. Это стоимость перевозки груза от первого поставщика четвертому потребителю. В соответствующую клетку (1, 4) записываем максимально возможную перевозку $x_{14}=\min\{a_1,b_4\}=200$. Запасы первого поставщика и запросы четвертого потребителя удовлетворены полностью. Исключаем их из рассмотрения.

В оставшейся части матрицы С наименьшей является стоимость $c_{31}=2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от третьего поставщика к первому потребителю равна $x_{31}=\min\{400,250\}=250$. В соответствующую клетку таблицы записываем перевозку $x_{31}=250$. Запросы первого потребителя исчерпаны, исключаем его из рассмотрения. Запасы первого поставщика уменьшаем на 250, $a_3'=400-250=150$. В оставшейся части матрицы С минимальная стоимость $c_{32}=3$. Заполняем клетку (3,2) $x_{32}=\min\{150,300\}=150$. Запасы первого поставщика исчерпаны, вычеркиваем его из рассмотрения.

Запросы второго потребителя уменьшаем на 150, $b_2'=300-150=150$. В оставшейся части матрицы С минимальная стоимость $c_{23}=6$ Заполняем клетку (2,3) $x_{23}=\min\{350,200\}=200$. Запросы третьего потребителя исчерпаны, вычеркиваем его из рассмотрения. Запасы второго поставщика уменьшаем на 200, $a_2'=350-200=150$.

В матрице С остался единственный элемент $c_{22}=10$. Записываем в клетку таблицы (2,2) перевозку $x_{22}=150$. Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы должно быть равно $N=m+n-1=3+4-1=6$. Однако у нас число заполненных клеток равно 5, поэтому базисный нуль записываем в клетку (1, 3).

В результате получим первое опорное решение – таблица 6.2:

Таблица 6.2.

	250	300	200	200
	9	8	3	1

200			0^*	200
350	7	10 150	6 200	4
400	2 250	3 150	8	12

Посчитаем суммарные затраты по составленному опорному решению:

$$Z(X) = 1 \cdot 200 + 10 \cdot 150 + 6 \cdot 200 + 2 \cdot 250 + 3 \cdot 150 = 3850 .$$

Задачи для самостоятельного решения.

Для следующих транспортных задач составить начальные опорные решения, используя метод минимальной стоимости.

Задача 6.2.

$a_i = (23;\ 38;\ 39);$

$b_j = (20;\ 30;\ 30;\ 20)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 6.3.

$a_i = (40;\ 60;\ 60);$

$b_j = (40;\ 40;\ 30;\ 50)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 6.4.

$a_i = (20;\ 30;\ 50);$

$b_j = (20;\ 20;\ 30;\ 30)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 6.5.

$a_i = (100; 150; 250);$

$b_j = (100; 100; 150; 150)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Примеры решения задач.

Задача 6.6.

Решить транспортную задачу, исходные данные которой таковы – таблица 6.3:

Таблица 6.3.

	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

Решение.

1. Проверяем исходную транспортную модель на сбалансированность путем расчета суммы запасов товара у поставщиков и суммарные потребности в товаре потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000 :$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100$$

Запасы поставщиков не совпадают с потребностями потребителей, следовательно, исходная задача является задачей с неправильным балансом (открытая модель задачи).

Для приведения исходной транспортной модели задачи к закрытой вводим четвертого фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза.

2. Находим начальное опорное решение методом минимальной стоимости – таблица 6.4. Полученное решение X_1 имеет $m+n-1=4+4-1=7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении:

$$Z(X_1) = 200+400+300+700+2700+1200+0 = 5300$$

Таблица 6.4

	200	200	300	400
200	4	3	2	1 200
300	2 200	3 100	5	6
500	6	7 100	9 300	12 100
100	0	0	0	0 100

3. Для проверки опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$).

Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$u_1 + v_4 = 1;$$

$$u_2 + v_1 = 2;$$

$$u_2 + v_2 = 3;$$

$$u_3 + v_2 = 7;$$

$$u_3 + v_3 = 9;$$

$$u_3 + v_4 = 12;$$

$$u_4 + v_4 = 1$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одной из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_3 = 0$. Остальные потенциалы находят однозначно:

$$u_3 = 0;$$

$$v_2 = 7 - u_3 = 7;$$

$$v_3 = 9 - u_3 = 9;$$

$$v_4 = 12 - u_3 = 12;$$

$$u_1 = 1 - v_4 = -11;$$

$$u_4 = 0 - v_4 = -12;$$

$$u_2 = 3 - v_2 = -4;$$

$$v_1 = 2 - u_2 = 6$$

Значения потенциалов записываем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей - таблица 6.5.

Таблица 6.5.

	200	200	300	400	u_i
200	4 —	3 —	2 —	1 200	-11
300	2 200	«–»3 100	5 0	«+» 6 2	-4
500	6 0	7 «+» 100	9 300	12 100 «-»	0
100	0 —	0 —	0 —	0 100	-12
v_j	6	7	9	12	

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2 > 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0;$$

$$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6 < 0;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5 < 0;$$

$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3 < 0$$

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «–».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительная оценка $\Delta_{24} = 2$.

5. Переходим к новому опорному решению. Для клетки (2,4) с положительной оценкой строим цикл: (2,4), (3,4), (3, 2), (2, 2). В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с клетки (2,4). Определяем величину груза θ, перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»: $\theta = \min\limits_{"-"} \{100, 100\} = 100$.

Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 – таблица 6.6.

Таблица 6.6.

	200	200	300	400	u_i
200	4 –	3 –	2 –	1 200	–5
	2	3	5	6	

300	200	0*	0	100	0
500	6 0	7 200	9 300	12 —	– 4
100	0 —	0 —	0 —	0 100	–6
v_j	2	3	5	6	

Находим для этого решения потенциалы (они приведены в таблице).

Вычисляем оценки:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -7 < 0;$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -5 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -2 < 0;$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0;$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -2 < 0;$$

$$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -4 < 0;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -3 < 0;$$

$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1 < 0.$$

Все оценки неположительные. Следовательно, решение является оптимальным. Вычисляем значение целевой функции на этом решении:

$$Z(X_2) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200$$

Ответ: при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.7.

На трех станциях A , B и C имеется соответственно 50, 20 и 30 ед. однородного груза, который нужно доставить в пять пунктов назначения П$_1$, П$_2$, П$_3$, П$_4$, П$_5$ в количестве соответственно 30, 5, 25, 15 и 25 ед. Эти данные, а также стоимость перевозки единицы груза от каждой станции отправления к каждому пункту назначения указаны в таблице 6.7.

Таблица 6.7.

Пункты отправления	Запасы груза	Пункты назначения и их потребности				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
		30	5	25	15	25
A	50	4	1	2	3	3
B	20	3	1	5	2	4
C	30	5	6	1	4	2

Составить такие планы перевозок грузов, чтобы затраты на эти перевозки были минимальными.

Ответ: $Z_{\min} = 245$

Задача 6.8.

У четырех поставщиков I , II, III и IV есть соответственно 60, 70, 30, 40 ед. однородного груза. Спрос на них потребителей 1, 2 и 3 равняется соответственно 80, 80, 40 ед. Эти данные и стоимость перевозок единицы груза от поставщиков к потребителям предоставлены в таблице 6.8. Составить такой план перевозок грузов, чтобы расходы были минимальными.

Таблица 6.8.

	80	80	40
60	4	3	5
70	8	7	6
30	4	5	9
40	10	9	7

Ответ: $Z_{\min} = 1120$

Задача 6.9.

Даны условия транспортной задачи (таблицы 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14). Числа, находящиеся на пересечении строк с указанием мощностей поставщиков и столбцов с указанием спроса потребителей, показывают стоимость перевозки единиц груза от поставщиков к потребителям.

Таблица 6.9

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		150	200	200	400
I	150	1	4	7	2
II	300	3	6	3	9
III	250	4	8	12	2
IV	150	1	5	9	13

Таблица 6.10

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос		
		1	2	3
		60	60	50
I	50	2	3	2
II	70	2	4	5
III	60	6	5	7

Таблица 6.11

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		450	250	100	100
I	200	6	4	4	5
II	300	6	9	5	8
III	100	8	2	10	6

Таблица 6.12

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос		
		1	2	3
		50	70	50
I	60	2	3	2
II	60	2	4	5
III	50	6	6	7

Таблица 6.13

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		15	25	8	12
I	25	2	4	3	6
II	18	3	5	7	5
III	12	1	8	4	5
IV	15	4	3	2	8

Таблица 6.14

Поставщики	Мощность	Потребители и их спрос

	поставщиков	1	2	3	4
		50	50	40	60
I	30	5	4	6	3
II	70	4	5	5	8
III	70	7	3	4	7

Составить такой план перевозок грузов, чтобы затраты на эти перевозки были минимальными.

Ответ: 1) $Z_{\min} = 2150$; 2) $Z_{\min} = 510$; 3) $Z_{\min} = 2750$; 4) $Z_{\min} = 570$; 5) $Z_{\min} = 187$; 6) $Z_{\min} = 620$

Задача 6.10.

Три поставщика обеспечивают товаром трех потребителей. В таблице 6.15

указаны транспортные издержки на перевоз единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю

Таблица 6.15.

Поставщики	Потребители			Наличие
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5	8	280
A_2	6	3	5	250
A_3	5	2	6	250
Потребность	260	240	280	780

Составить модель распределения грузов, чтобы при этом транспортные расходы были минимальными.

Ответ: $Z_{\min} = 4030$

Задача 6.11.

В двух пунктах отправления А и В находится соответственно 150 и 90 т горючего. В пункты 1, 2, 3 требуется доставить соответственно 60, 70 и 110 т горючего. Стоимости перевозки тонны горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 составляют соответственно 6, 10 и 4 руб., а из пункта В – 12, 2 и 8 руб. Составить оптимальный план перевозок горючего так, чтобы общая сумма транспортных расходов была наименьшей.

Ответ: $Z_{\min} = 1020$

Задача 6.12.

На двух складах А и В находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада А в пункты 1, 2, 3 соответственно стоит 1, 3и 5 руб., а перевозка одной тонны со склада В в те же пункты – соответственно 2, 5 и 4 руб. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству тонн горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

Ответ: $Z_{\min} = 510$

Задача 6.13.

В резерве трех железнодорожных станций А, В и С находятся соответственно 60, 80 и 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту № 1 необходимо 40 вагонов, № 2 – 60 вагонов, № 3 – 80 вагонов и № 4 – 60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции А в указанные пункты соответственно равны 1, 2, 3, 4 руб., со станции В – 4, 3, 2, 0 руб. и со станции С – 0, 2, 2, 1 руб.

Ответ: $Z_{\min} = 280$

Задача 6.14.

На трех складах А, В и С находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта: пункту № 1 – 5 т, № 2 – 10 т, № 3 – 20 т и № 4 – 15 т. Стоимости доставки одной тонны со склада А в указанные пункты соответственно равны 8, 3, 5, 2 руб.; со склада В – 4, 1, 6, 7 руб. и со склада С – 1, 9, 4, 3 руб. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

Ответ: $Z_{\min} = 140$

Задача 6.15.

Компания «Уют» производит пластмассовую мебель для отдыха на открытом воздухе. Основной продукт компании – стулья. Производство находится в Можайске, Наро-Фоминске и Туле. Сейчас на складе в Можайске находятся 7250 стульев, в Наро-Фоминске – 10150, в Туле – 4350. Основными потребителями продукции компании «Уют» являются фирмы по оптовой продаже в Москве, Санкт-Петербурге, Минске и Воронеже. Сейчас эти фирмы готовы закупить соответственно 8800, 5800, 2900 и 2100 стульев. Удельные затраты на перевозку стульев (в руб./шт.) указаны в таблице 6.16.

Таблица 6.16.

Москва	1,1	0,8	1,6
Санкт-Петербург	2,6	2,4	3,4
Минск	1,9	2,0	2,8
Воронеж	2,2	2,1	1,7

Составить математическую модель задачи и ответить на вопросы: 1) Чему равна минимальная стоимость перевозки всех стульев? 2) Сколько стульев компания должна перевозить в Москву из Можайска? 3) Какое количество стульев останется на складе в Туле?

Ответ: 1) 30990 руб.; 2) не следует перевозить ни одного стула; 3) 2150 стульев.

Тема 7. Производственная функция.

Задача 7.1.

На предприятии применяются два независимых процесса производства. Первый характеризуется производственной функцией $Q^A = 3K + \sqrt{(0{,}5KL + L^2)}$, второй – функцией $Q^B = 0{,}1K^2 + 0{,}2KL$. Определите, каким типом эффекта масштаба характеризуется каждый процесс.

Решение

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить, как изменится функция производства при кратном увеличении всех ее независимых переменных. Для этого умножим факторы каждой функции в *n* раз. Получим:

для $Q^A: 3nK + \sqrt{0{,}5nKnL + nL^2} = 3nK + \sqrt{0{,}5n^2KL + n^2L^2} = 3nK + \sqrt{n^2(0{,}5KL + L^2)}$ или $n(3K + \sqrt{0{,}5KL + L^2})$.

Это говорит о том, что увеличение факторов в пропорции *n* даст увеличение *Q* в *n* раз, то есть объем выпуска будет увеличиваться в той же пропорции, что и факторы. Следовательно, производство характеризуется постоянным эффектом масштаба;

для $Q^B: 0{,}1(nK)^2 + 0{,}2nKnL = 0{,}1n^2K^2 + 0{,}2n^2KL = n^2(0{,}1K^2 + 0{,}2KL)$.

Следовательно, при увеличении факторов в *n* раз объем выпуска увеличится в n^2 раз, что указывает на растущий эффект масштаба.

Задача 7.2.

Технология производства описывается функцией $Q = 5KL^2$. Рассчитайте предельную норму замещения капитала трудом при использовании 16 единиц капитала и 8 единиц труда.

Решение. Предельная норма замещения факторов равна обратному соотношению их предельных продуктов $MRTS_{LK} = MP_L/MP_K$. Следовательно, для решения задачи необходимо определить предельные продукты факторов для заданного количества их использования:K = 16; L = 8. Предельный продукт определятся как производная функции по данному фактору:

$MP_L = \sigma Q/\sigma L = 10KL;$

$MP_K = \sigma Q/\sigma K = 5L^2.$

Теперь можно определить $MRTS_{LK} = MP_L/MP_K$.

Учитывая, что замещение предполагает сокращение какого-то из факторов – в нашем случае - ΔK/ΔL, - то, решая уравнение соотношения предельных продуктов факторов, нам следует ввести перед ним знак «минус», который будет указывать, что увеличение труда сопровождается сокращением капитала.

Таким образом, $MRTS_{LK}$ = - $10KL/5L^2$ = - $2K/L$. При K = 16; L = 8 $MRTS_{LK}$ = - 4. Это означает, что введение в производство дополнительной единицы труда позволит сократить применение капитала на четыре единицы, сохранив объем выпуска неизменным.

Задача 7.3.

Фирма, производящая оборудование, выбирает одну из трех производственных технологий, каждая из которых отличается сочетанием используемых ресурсов (труда и капитала). Данные о применяемых технологиях приведены в таблице 6.17 (L — труд; К — капитал; все показатели измеряются в единицах за неделю). Предположим, что цена единицы труда составляет 200 у.е., а цена единицы капитала — 400 у. е.:

Таблица 6.17.

Объем производства (ед.)	Технология					
	А		Б		В	
	L	K	L	K	L	K
1	9	2	6	4	4	6
2	19	3	10	8	8	10
3	29	4	14	12	12	14
4	41	5	18	16	16	19
5	59	6	24	22	20	25
6	85	7	33	29	24	32
7	120	8	45	38	29	40

а) установите, какую производственную технологию выберет фирма при каждом уровне выпуска продукции;

б) рассчитайте общие издержки при каждом уровне выпуска продукции;

в) определите, повлияет ли на выбор технологии фирмой увеличение цены единицы труда до 300 у. е. при прежней цене капитала;

г) установите, какая технология будет выбрана для каждого объема производства при новом уровне издержек на оплату труда.

Решение

Расчеты производятся по формуле изокосты $TC = PL_L + P_K K$.

В случае: а и б при объеме выпуска 1 ед. издержки производства для разных технологий составляют:

$TC_A = 200 \times 9 = 400 \times 2 = 2600$;

$TC_Б = 200 \times 6 + 400 \times 4 = 2800$;

$TC_B = 200 \times 4 + 400 \times 6 = 3200$.

Таким образом, при объеме выпуска 1 ед. производитель выберет технологию А, так как при ее использовании достигаются наименьшие издержки. Затраты производства при других объемов выпуска рассчитаны в таблице 6.18.

Таблица 6.18

Объем производства (ед.)	Общие издержки при технологиях, у.е.		
	А	Б	В
1	2 600	2 800	3 200
2	5 000	5 200	5 600
3	7 400	7 600	8 000
4	10 200	10 000	10 800
5	14 200	13 600	14 000
6	19 800	18 200	17 600
7	27 200	24 200	21 800

Тема 8. Экономико-статистическое моделирование.

Примеры решения задач.

Задача 8.1.

Имеются данные выборочного наблюдения за неделю для 10 семей в условных денежных единицах о связи между доходами и розничным товарооборотом – таблица 8.1.

Таблица 8.1.

Доходы населения	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31
Розничный товарооборот	17	18	19	20	21	23	24	25	26	27

Вначале по фактическим данным таблицы устанавливаем принадлежность переменных к группам независимых и зависимых переменных. Пусть x_i - доход i-той семьи, а y_i – розничный товарооборот этой семьи за неделю.

Наша задача состоит в том, чтобы построить линейную парную регрессию $y = a + bx$.

Параметр a называют свободным членом регрессии; параметр b - коэффициент регрессии, который измеряет, на сколько единиц в среднем изменится y при изменении x на одну единицу. Параметр $a > 0$, если вариация зависимой переменной (V_y) превосходит вариацию независимой переменной (V_x); иными словами, вариация результата меньше вариации фактора – *коэффициент вариации* по фактору x выше коэффициента вариации для результата y: $V_x > V_y$. В противном случае $a < 0$. Иногда, если данные выборки включают значения x_i, равные нулю, то свободный член интерпретируется как значение y при $x_i = 0$. Однако чаще свободный член не имеет экономического смысла. Параметр $b > 0$ в случае прямой связи между x и y, $b < 0$ в случае обратной связи между x и y.

Представим исходные данные на графике. Каждая точка графика соответствует каждой семье; координаты точек определяются значениями переменных – розничному товарообороту (y_i) и доходам (x_i) семьи. Если бы параметры уравнения регрессии были бы известны, мы бы нанесли прямую линию $y_i = a + bx_i$ на график, где $a = \bar{y} - b\bar{x}$. Очевидно, что не все наблюдаемые точки будут лежать непосредственно на прямой $y_i = a + bx_i$. Отклонения обусловлены случайной ошибкой e_i. Эта ошибка может быть вызвана случайным искажением значений переменных, ошибками в измерении переменных, наконец, неправильным выбором линейной формы регрессии, тогда как на самом деле связь между x и y нелинейна. Указанные причины по-разному влияют на распределение ошибки e_i.

Параметры a и b должны быть оценены так, чтобы линия $(a+bx_i)$ наилучшим образом подходила к данным. Поскольку по одним и тем же данным можно провести несколько линий, возникает необходимость понять, чем одна линия лучше другой. Пусть наилучшая линия имеет вид : $\hat{y}_i = a + bx_i$, где $\hat{y}, a, b$ - выборочные оценки.

Уравнение вида $\hat{y}_i = a + bx_i$ (или в более общем виде $\hat{y}_x = a + b \cdot x$) позволяет по заданным значениям фактора x иметь теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора x.

Качество подобранной линии, т.е. то, насколько хорошо она соответствует фактическим данным, можно измерить как $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т.е. путем сравнения величины остаточной дисперсии $D_{ост}$ рассчитанной при разных моделях. В практических исследованиях, как правило, имеют место отклонения фактических данных от теоретических $(y_i - \hat{y}_i)$. Они обусловлены влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов. Величина этих отклонений и лежит в основе расчета остаточной дисперсии: $D_{ост} = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y}_x)^2$.

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем в меньшей мере наблюдается влияние прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов, лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным. При обработке статистических данных на компьютере перебираются разные математические функции в автоматическом режиме, и из них выбирается та, для которой остаточная дисперсия является наименьшей.

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на **методе наименьших квадратов** (МНК).

МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака (y) от расчетных (теоретических) $\hat{y}_x$ минимальна: $\sum_i (y_i - \hat{y}_{x_j})^2 \to \min$

Иными словами, из всего множества линий линия регрессии на графике выбирается так, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали между точками и этой линией была бы минимальной (Рис. 8.1)

Обозначив, $y_i - \hat{y}_x = \varepsilon_i$ получим $\sum_i \varepsilon_i^2 \to \min$

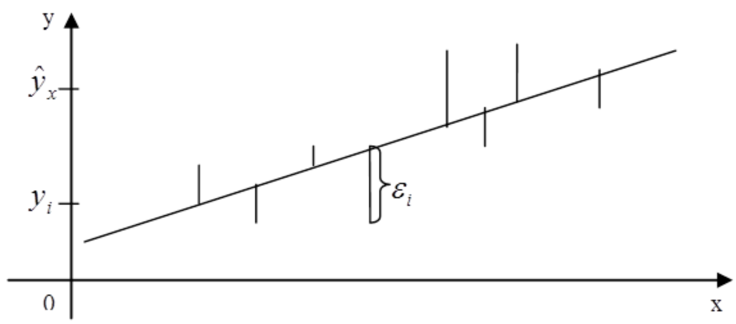


Рис.8.1. Линия регрессии с минимальной дисперсией остатков

Для определения параметров регрессии можно воспользоваться готовыми формулами:

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

$$b = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2};$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2$$

Параметр b называется *коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу.*

Формально a – значение y при $x = 0$.

Параметр a может не иметь экономического содержания. Попытки экономически интерпретировать параметр a, могут привести к абсурду, особенно при a<0. Интерпретировать можно лишь знак при параметре a.

Найдем параметры регрессии для нашего примера. Для этого составим расчетную таблицу 8.2.

Таблица 8.2.

№ п\п	y	x	x^2	xy	y^2	$\hat{y}$
1	17	18	324	306	289	16,67
2	18	20	400	360	324	18,31
3	19	21	441	399	361	19,31
4	20	22	484	440	400	19,25
5	21	24	576	504	441	21,59
6	23	25	625	575	529	22,41
7	24	27	729	648	576	24,05
8	25	28	784	700	625	24,87
9	26	29	841	754	676	25,69
10	27	31	961	837	729	27,33
∑	220	245	6165	5523	4950	—
Среднее значение	22,0	24,5	616,5	552,3	495	—

$$b = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{552{,}3 - 22 \cdot 24{,}5}{616{,}5 - (24{,}5)^2} = \frac{13{,}3}{16{,}25} = 0{,}82, \quad a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 22 - 0{,}82 \cdot 24{,}5 = 1{,}91$$

Следовательно, эконометрическая модель розничного товарооборота запишется в виде: $\hat{y} = 1{,}91 + 0{,}82x$. Она количественно описывает связь недельного розничного товарооборота и

доходов населения. Сделаем экономические выводы.

Подставив в уравнение значения x, найдем теоретические значения у (см. последнюю графу таблицы).

Параметр $a = 1{,}91$ экономического смысла не имеет. Параметр $b = 0{,}82$ характеризует граничный размер расходов на покупку товаров в розничной торговле. То есть, когда доход возрастет на единицу, то объем розничного товара увеличится на 0,82 единицы.

Определим также коэффициент эластичности (относительный эффект влияния фактора x на результат y). Для *линейной регрессии* $\hat{y}_x = a + bx$ функция и эластичность следующие: $f'(x) = b,\ \text{Э} = b \cdot \frac{x}{a+bx}$

Так как коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x, то обычно рассчитывается **средний показатель эластичности** по формуле $\overline{\text{Э}} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

По полученным данным в нашей задаче коэффициент эластичности розничного товарооборота в зависимости от доходов населения равен:

$$\overline{\text{Э}} = 0{,}82 \cdot \frac{24{,}5}{22} = 0{,}91$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменится значение y при изменении x на 1%. На основании коэффициента эластичности можно сделать вывод, что с увеличением доходов населения на 1% розничный товарооборот растет на 0,91%.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 8.2.

Имеются данные по семи территориям Уральского района за 20ХХ год, представленные в таблице 8.3.

Таблица 8.3.

Район	Доля расходов на продовольственные товары в об общих расходах, %, у	Среднедневная заработная плата одного работающего, руб., х
Удмуртская республика	68,8	45,1
Свердловская область	61,2	59,0
Башкортостан	59,9	57,2
Челябинская область	56,7	61,8
Пермская область	55,0	58,8

Курганская область	54,3	47,2
Оренбургская область	49,3	55,2

Для характеристики зависимости у от х:

1) рассчитать параметры линейной регрессии

2) рассчитать коэффициент парной корреляции и детерминации.

3) оценить полученную регрессионную модель через среднюю ошибку аппроксимации и F-критерий Фишера.

Ответ: 1) *а*= 76,87; *в* =-0,35. 2) r_{xy} = -0,35; R^2 =0,124. 3) $\overline{A}$ =8,14 4) $F_{факт}$=0,71

Тема 9. Имитационное моделирование производственных систем

Примеры решения задач.

Задача 9.1.

Известно количество машин, приезжавших на мойку автомашин в течение последних 200 часов, исходные данные представлены в таблице 9.1. Рассчитать основные параметры СМО.

Таблица 9.1.

Число машин в час	Частота
4	20
5	30
6	50
7	60
8	40

Решение.

Будем имитировать прибытие машин в течение 10 часов. Заполним таблицу 9.2.

Таблица 9.2

Число машин	Частота	Вероятность	Кумулятивная	Случайные

в час			вероятность	числа
4	20	0,1	0,10	00-09
5	30	0,15	0,25	10-24
6	50	0,25	0,50	25-49
7	60	0,3	0,80	50-79
8	40	0,2	1,00	80-99
Сумма	200			

Так как у чисел в столбце «Кумулятивная вероятность» после запятой меняются 2 знака, то случайные числа группируем по два. Заполняется последний столбец сверху вниз.

Берем числа после запятой из 1-й строки и 4-го столбца. Это 10. Поэтому с 10 начинаем 2-ю строку последнего столбца, а числом 10-1=09 завершим 1-ю строку. Начинаем же 1-ю строку с 00.

Берем числа после запятой из 2-й строки и 4-го столбца. Это 25. Поэтому с 25 начинаем 3-ю строку последнего столбца, а числом 25-1=24 завершим 2-ю строку. И т.д.

Полученная таблица 9.3 используется следующим образом. Берем подряд из любой строки или столбца случайные числа из таблицы случайных чисел. Определяем, в какой интервал нашей таблицы они попадают, и находим соответствующие значения в 1-м столбце.

Таблица 9.3

Час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайное число	69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
Прибыло машин	7	4	6	6	7	8	6	5	7	5

69 попадает в интервал 50-79, что соответствует 7 машинам, 02 попадает в интервал 00-09, что соответствует 4 машинам, и т.д.

Тема 10. Моделирование процессов массового обслуживания в экономических системах.

Примеры решения задач.

Задача 10.1.

Системы массового обслуживания и методика их моделирования широко используется применительно к экономическим системам. Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой *обслуживающей системы,* которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в систему *заявок.* Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в очередях в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки.

В качестве примера применения системы массового обслуживания рассмотрим задачу проектирования автозаправочной станции (АЗС). Пусть необходимо выбрать один из нескольких вариантов строительства АЗС. Автомобили прибывают на станцию случайным образом и, если не могут быть обслужены сразу, становятся в очередь. Дисциплина очереди — «первым пришел — первым обслужен». Предположим для простоты, что во всех вариантах рассматривается только одна бензоколонка, а вариант от варианта отличается лишь ее мощностью.

Предположим, статистические наблюдения позволили получить величину среднего количества клиентов μ, обслуживаемых в единицу времени. Обратная величина $1/\mu$ определяет среднее время обслуживания одного клиента.

Далее допускается стандартное предположение, что вероятность того, что обслуживание одного клиента, находящегося в процессе обслуживания в момент *t,* будет завершено в малом промежутке времени $[t, t + \tau]$, приблизительно равна $\mu\tau$, где $\mu > 0$. Вероятность того, что обслуживание не закончится, считается приблизительно равной 1- $\mu\tau$, а вероятность того, что будет закончено обслуживание двух или более клиентов, — пренебрежимо малой величиной. Тогда плотность распределения времени обслуживания имеет экспоненциальное распределение:

$$F(t)= \mu \exp(- \mu\tau),\ t>=0 \quad (10.1)$$

Далее, исходя из того что клиенты прибывают на АЗС случайно, предполагается, что вероятность прибытия одного клиента за любой малый промежуток времени $[t, t + \tau]$, начинающийся в произвольный момент времени t и имеющий длину τ, с точностью до пренебрежимо малых величин пропорциональна τ с некоторым коэффициентом пропорциональности $\lambda > 0$. Величина λ интерпретируется как среднее число клиентов, появляющихся в АЗС за единицу времени, а обратная ей величина $1 / \lambda$ — как среднее время появления одного клиента. Вероятность того, что за этот промежуток времени не прибудет ни одного клиента, считается приблизительно равной $1 - \lambda \tau$, а вероятность прибытия двух или более клиентов — пренебрежимо малой величиной по сравнению со значением $\lambda\tau$. Из выдвинутых предположений в теории вероятностей делаются следующие выводы. Во-первых, промежутки времени τ между двумя последовательными появлениями клиентов удовлетворяют экспоненциальному распределению:

$$\varphi(t)=\lambda \exp(-\lambda t),\ t>=0$$

Во-вторых, вероятность того, что за любой, уже не малый период времени T прибудет *n* клиентов, подсчитывается по формуле

$$P(п) = (\lambda T)'' \exp(-\lambda t)/n!,\ n - 0,1,\ 2,...n$$

т. е. входной поток заявок является пуассоновским. Отметим, что в отличие от среднего количества автомобилей, прибывающих в единицу времени на АЗС, т. е. величины λ, величина μ зависит от выбранного нами варианта строительства АЗС. Поэтому имеет смысл рассматривать те проекты АЗС, для которых среднее время обслуживания 1/μ меньше среднего промежутка времени *1*/λ между прибытием клиентов, ибо в противном случае очередь будет постоянно расти. В том же случае, когда 1/μ < 1 / λ*,* через некоторое время после начала работы система перейдет в *стационарный режим,* т. е. ее показатели не будут зависеть от времени.

Обозначив отношение 1/μ через р, можно показать, что стационарный режим устанавливается при р < λ. Величину р называют *нагрузкой системы.* Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по формулам:

- *коэффициент простоя системы*

$$E_1 = 1 - p$$

- *среднее число клиентов в системе*

$$E_2 = \frac{p}{1-p}$$

- *средняя длина очереди*

$$E_3 = \frac{p^2}{1-p}$$

- *среднее время пребывания клиента в системе*

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- *время пребывания клиента в очереди*

$$E_5 = \frac{p}{\mu - \lambda}$$

На основе анализа значений приведенной системы показателей, характеризующих систему массового обслуживания, делается вывод о целесообразности выбора варианта строительства АЗС.

Например, для общих условий постановки задачи по проектированию АЗС известны следующие данные: средний интервал между прибытиями автомобилей составляет 4 минуты. Варианты строительства АЗС имеют следующие средние времена обслуживания автомобилей: 5 мин, 3,5 мин, 2 мин, 1 мин, 0,5 мин. Результаты расчетов по исследованию различных вариантов строительства АЗС сведены в таблицу 10.1.

Таблица 10.1.

Характеристики СМО	1	2	3	4	5
$1/\lambda$	4 мин	4 мин	4 мин	4 мин	4 мин
λ	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
$1/\mu$	5 мин	3,5 мин	2 мин	1 мин	0,5 мин
μ	0,2	0,286	0,5	1	2
p	1,25	0,875	0,5	0,25	0,125
E_1	-0,25	0,125	0,5	0,75	0,875
E_2	-5	7	1	0,333	0,143
E_3	-6,25	6,125	0,5	0,083	0,018
E_4	-20	27,477	4	1,333	0,571
E_5	-25	24,305	2	0,333	0,071

Из анализа результатов расчетов следует.

Первый вариант строительства АЗС не годен из-за того, что очередь в этом случае будет расти до бесконечности.

Второй вариант хорош по показателю загруженности оборудования p - 0,875 и, следовательно, малой средней доли простоя оборудования E_1 = 0,125, но при этом варианте возникают большие очереди и,

следовательно, большие средние времена простоя автомобилей E_4= = 27 мин 48 с.

Третий вариант приводит к тому, что оборудование в среднем половину времени простаивает, но среднее число автомобилей в системе равно только 1, а средние потери времени равны 4 мин при среднем времени обслуживания 2 мин.

В остальных вариантах очереди практически нет, но большую часть времени оборудование простаивает, поэтому эти варианты целесообразно отбросить как неэффективные.

Окончательный выбор варианта проекта АЗС, очевидно, принадлежит лицу, принимающему решение (ЛПР), но предварительная рекомендация по результатам анализа может состоять в предложении третьего варианта, если исходить из того, что наблюдается постоянная тенденция роста автомобильного парка в стране.