

# ГЛАВА 1. Техническая термодинамика

## 1.1 Основные понятия и определения

Термодинамика изучает закономерности превращения энергии в различных процессах и связанное с этим изменение состояния физических тел.

Техническая термодинамика традиционно изучает процессы взаимных превращений теплоты и механической работы; в настоящее время, однако, в технической термодинамике рассматривают и более сложные процессы. Одной из главных задач технической термодинамики является изучение условий наиболее эффективного прохождения процессов преобразования энергии.

В термодинамике используется *феноменологический метод исследования*, при котором не вводится никаких предположений о молекулярном строении изучаемых тел. Применяемый в других областях физики *статистический метод* исходит из определенной молекулярной структуры тел и использует теорию вероятностей и математическую статистику для определения свойств совокупности микрочастиц. Простейшим примером взаимодействия обоих методов является определение термодинамических величин (давление, температура) в кинетической теории газов.

Термодинамика основывается на двух основных законах. Первый закон термодинамики представляет собой приложение к тепловым процессам всеобщего закона природы — закона превращения и сохранения энергии. Второй закон термодинамики характеризует направление протекающих в природе тепловых процессов. Применяя эти законы, техническая термодинамика исследует большой круг явлений, наблюдаемых в природе и технике. При термодинамическом изучении какого-либо явления в качестве объекта исследования выделяется группа тел, единичное тело или даже отдельные его части. Такой объект изучения называется термодинамической системой. Термодинамическая система — это совокупность макроскопических тел, обменивающихся энергией между собой и с окружающей средой.

В зависимости от условий взаимодействия с другими системами различают открытую, закрытую, адиабатную и изолированную термодинамические системы.

*Открытой системой* называется система, в которой имеется обмен вещества с другими системами. Система, в которой отсутствует обмен вещества с другими системами, называется *закрытой системой*. *Адиабатной* называется система, в которой отсутствует обмен теплотой с другими системами. В изолированной системе отсутствует обмен энергией и веществом.

*Равновесным термодинамическим состоянием* называется состояние тела, которое не изменяется во времени без внешнего энергетического воздействия. Параметры равновесного состояния во всей массе тела одинаковы и равны соответствующим параметрам внешней среды. В состоянии термодинамического равновесия исчезают всякие макроскопические изменения (диффузия, теплообмен, химические реакции), хотя тепловое (микроскопическое) движение молекул не прекращается.

К термодинамическим параметрам относятся физические величины, характеризующие макроскопическое состояние тел: термодинамическое давление, термодинамическая (абсолютная) температура и удельный объем.

*Давление* численно равно силе, действующей на единицу площади поверхности тела перпендикулярно последней. Давление измеряется в Паскалях; 1 Па равен давлению силы 1 Н на площади 1 м<sup>2</sup>, т. е. 1 Па=1 Н/м<sup>2</sup>. внесистемными единицами давления являются атмосфера (1 ат=1 кг/см<sup>2</sup>) и бар (1 бар = 10<sup>5</sup> Н/м<sup>2</sup>). Давление может измеряться высотой столба жидкости, т. е. в миллиметрах ртутного или водяного столба. Соотношение между единицами измерения давления: 1 бар = 10<sup>5</sup> Н/м<sup>2</sup> = 1,01972 кг/см<sup>2</sup>=750,06 мм рт. ст.= 10197 мм вод. ст.; 1 ат=1 кг/см<sup>2</sup>=735,6 мм рт. ст. = 10 000 мм вод. ст.=98 066 Н/м<sup>2</sup>.

Атмосферное давление измеряют барометром и оно называется барометрическим *P<sub>бар</sub>*. Если давление среды в резервуаре больше *P<sub>бар</sub>*, то

измеряют избыточное (или манометрическое) давление. Сумма барометрического и манометрического давлений равна абсолютному давлению  $P_{бар}$ . Если давление в резервуаре меньше  $P_{бар}$ , образуется разрежение, т. е. вакуум, измеряющийся величиной  $P_{вак}$ . Таким образом, давление определяется по показаниям приборов с учетом следующих соотношений:

$$P > P_{бар}: P = P_{бар} + P_{ман};$$

$$P < P_{бар}: P = P_{бар} - P_{вак}$$

Абсолютная температура рабочего тела является мерой интенсивности теплового движения молекул. При тепловом равновесии двух тел, когда теплообмен между ними отсутствует, температура их одинакова. Абсолютная температура всегда положительна, а нулевое значение ее соответствует состоянию полного покоя молекул. Шкала, в которой температура отсчитывается от этого состояния, называется термодинамической *шкалой Кельвина*. Измеренная по этой шкале температура обозначается Т К. В технике же принята международная стоградусная шкала — шкала Цельсия, в которой отсчет ведется от состояния тающего льда при нормальном давлении (соответствующего абсолютной температуре  $T = 273,15\text{К}$ ). Измеренная по этой шкале температура обозначается °С. Величина градуса в обеих шкалах одинакова, поэтому пересчет с одной шкалы в другую производится по формуле  $T = t + 273,15$ .

*Удельный объем* вещества представляет собой объем, занимаемый единицей массы вещества. Удельный объем  $v$  связан с массой тела  $m$  и его объемом  $V$  следующим соотношением:  $v = V/m$ . Единицей измерения удельного объема вещества является м<sup>3</sup>/кг. Плотность рабочего тела  $\rho = m/V$ , ее единицей измерения является кг/м<sup>3</sup>.

Последовательное изменение состояния тела, происходящее в результате энергетического взаимодействия рабочего тела с окружающей средой, называется *термодинамическим процессом*. В термодинамическом процессе обязательно изменяется хотя бы один параметр состояния. Если процесс

протекает настолько медленно, что в системе в каждый момент времени успевает устанавливаться равновесное состояние, то он называется равновесным. Процесс является неравновесным, если он протекает с конечной скоростью и вызывает появление конечных разностей давлений, температур, плотности и т. д.

## 1.2 Уравнение состояния идеального газа

Равновесное состояние вещества (например, 1 кг газа  $O_2$ ) однозначно определяется заданием двух параметров состояния, например, давления  $p$  и удельного объема  $v$ . Температура  $T$  в этом случае является функцией  $p$  и  $v$ , т.е.  $T = T(p, v)$ . Это уравнение, которое в общем виде может быть представлено как  $F(p, v, T) = 0$  и которое связывает термодинамические параметры системы в равновесном состоянии, называется *уравнением состояния*. В пространственной системе координат, на осях которой откладываются величины  $p$ ,  $v$  и  $T$ , уравнению состояния соответствует термодинамическая поверхность, индивидуальная для данного вещества.

Для изображения термодинамических состояний и процессов чаще всего используют плоские диаграммы, координатные оси которых соответствуют двум термодинамическим параметрам. Например, точки на  $p$ - $v$  -диаграмме изображают равновесные состояния: точки  $1, 1', 1'', \dots$  (на рис. 1.1.). Равновесный процесс изображается линией  $1-2$ .

Основными процессами в технической термодинамике являются: *изохорный* (при постоянном объеме), *изобарный* (при постоянном давлении); *изотермический* (при постоянной температуре), *адиабатный* (без внешнего теплообмена).

При низких давлениях и сравнительно высоких температурах, когда расстояния между молекулами реального газа значительны, а силы молекулярного взаимодействия малы, свойства реальных газов близки к свой-

ствам так называемого идеального газа. Опытным путем были установлены основные законы идеальных газов. Согласно *закону Бойля-Мариотта* при постоянной температуре произведение давления газа на его удельный объем есть величина постоянная, т. е. при  $T = \text{const}$   $pv = \text{const}$ . Отсюда следует, что для двух состояний газа, соответствующих постоянной температуре, справедливо равенство  $p_1v_1 = p_2v_2$  (см. рис. 1.1). Согласно *закону Гей-Люссака* при постоянном давлении отношение удельного объема газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная, т. е. при  $p = \text{const}$   $v/T = \text{const}$ .

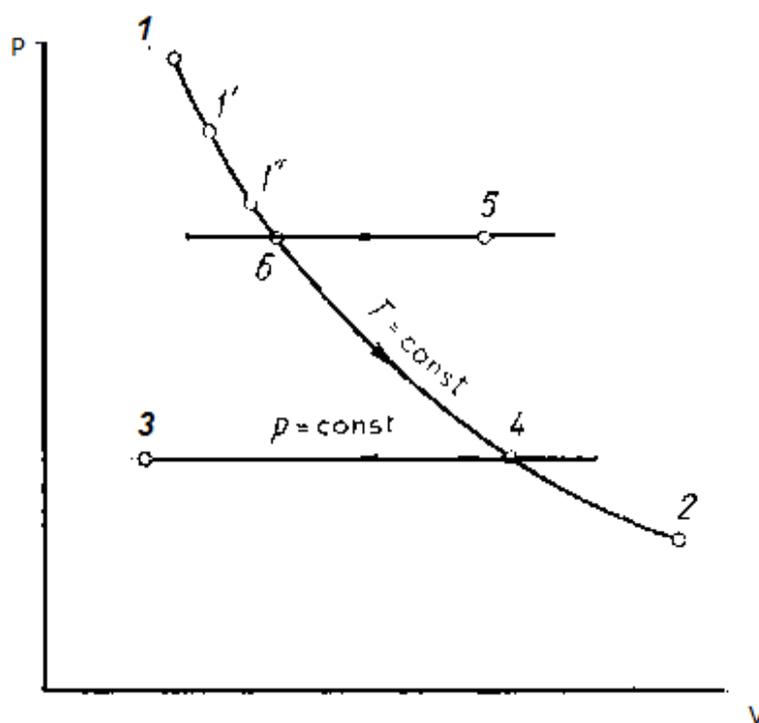


Рис. 1.1 P-v- диаграмма

При этом все газы при нагревании на 1 К обнаруживают относительное увеличение объема на одну и ту же величину, равную  $\beta_0 = 1/273,16$ , т. е.  $v = v_0(1 + \beta_0 t)$ .

Установим связь между параметрами двух произвольных состояний идеального газа на основе указанных законов. Из состояния 1 (см. рис. 1.1) можно перевести газ в произвольное состояние 3 вдоль изотермического процесса 1—4 и изобарного процесса 4—3; выбирая подходящим образом

изотерму и изобару, можно соединить две любых точки на  $p$ - $v$ -диаграмме. Для указанных процессов имеем следующие соотношения:

$$\text{процесс } 1\text{—}4: T_1 = T_4; p_1 v_1 = p_4 v_4;$$

$$\text{процесс } 4\text{—}3: p_4 = p_3; v_4 / T_4 = v_3 / T_3.$$

Исключая из приведенных уравнений параметры точки 4, получим:

$$p_1 v_1 / T_1 = p_3 v_3 / T_3. \quad (1.1)$$

Аналогичный переход из состояния 1 в состояние 5 с промежуточной точкой 6 даст соотношение:

$$p_1 v_1 / T_1 = p_5 v_5 / T_5. \quad (1.2)$$

Объединяя выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$p_1 v_1 / T_1 = p_3 v_3 / T_3 = p_5 v_5 / T_5 = \dots \quad (1.3)$$

Поскольку все состояния являются произвольными, вместо выражения (1.3) можно записать  $pv/T = \text{const}$  или

$$pv = RT, \quad (1.4)$$

где  $R$  — *газовая постоянная*, характерная для каждого газа, кДж/(кг·К).

Газ, в точности подчиняющийся уравнению (1.4) — *уравнению Клапейрона* — называется идеальным.

Согласно *закону Авогадро*, одинаковые объемы различных идеальных газов при одинаковых  $p$  и  $T$  содержат одинаковое количество молекул. Поскольку 1 кмоль любого вещества содержит одно и то же количество молекул, то произведение молярной массы любого идеального газа на его удельный объем есть величина постоянная для определенных  $p$  и  $T$ , т. е.  $\mu v = \text{const}$ , где ( $\mu$  — молярная масса, кг/кмоль. Умножив обе части уравнения (1.4) на  $\mu$ , получим:

$$p\mu v = \mu RT, \quad (1.5)$$

При заданных значениях  $p_1$  и  $T_1$  произведение  $\mu v_1$  одинаково для всех газов. Следовательно, в правой части уравнения (1.5) для всех идеальных газов

должна быть одинакова величина  $\mu R$ . При переходе к другому состоянию с параметрами  $p_2$  и  $T_2$  величина  $\mu R$  не изменится, ибо уравнение (1.5) сохранило все свойства уравнения Клапейрона (1.4) после умножения обеих частей на число  $\mu$ . Таким образом, величина  $\mu R$  не зависит ни от вида идеального газа, ни от его состояния. Эта величина носит название *универсальной газовой постоянной*, она была введена Д. И. Менделеевым.

Для вычисления  $\mu R$  используется стандартное состояние — так называемые нормальные физические условия:  $p_0 = 101\,325$  Н/м<sup>2</sup> и  $T_0 = 273,15$  К; при этом, согласно измерениям, объем 1 кмоль различных идеальных газов равен 22,4143 м<sup>3</sup>/кмоль, а универсальная газовая постоянная оказывается равной

$$\begin{aligned}\mu R &= 101325 \cdot 22,4143 / 273,15 = 8314,2 \text{ Дж/кмоль} = \\ &= 8,3142 \text{ кДж/(кмоль} \cdot \text{К)}.\end{aligned}$$

Зная универсальную газовую постоянную  $\mu R$ , можно подсчитать газовую постоянную  $R$ :

$$R = 8314,2 / \mu.$$

Уравнение состояния идеального газа для 1 киломоля носит название *уравнения Менделеева — Клапейрона*:

$$p\mu v = 8314,2T. \quad (1.6)$$

Для произвольной массы идеального газа  $m$  уравнение состояния имеет вид:

$$pV = mRT \quad (1.7)$$

где  $V$  — объем газа, м<sup>3</sup>.

*Удельная теплоемкость газа* — это количество теплоты, расходуемое при нагревании или охлаждении 1 кг, 1 м<sup>3</sup> или 1 кмоль газа на 1°. Теплоемкость, отнесенная к 1 кг газа, называется массовой, обозначается  $c$  и имеет единицу измерения кДж/(кг·К).

Так как теплоемкость идеального газа зависит от температуры, а реального и от давления, то в термодинамике различают истинную и среднюю теплоемкости. *Истинной теплоемкостью* называется отношение элементарного количества теплоты, сообщаемой термодинамической системе в каком-либо процессе, к бесконечно малой разности температур, т. е.  $c=f(t)$  или  $dq=cdt$  и  $q = \int_{t_1}^{t_2} cdt$ . Это соотношение показывает, что теплота  $q$ , затраченная на осуществление процесса нагрева от температуры  $t_1$  до температуры  $t_2$ , графически (рис. 1.2) изображается площадью 1—2—3—4—1, лежащей под кривой зависимости  $c=f(t)$ .

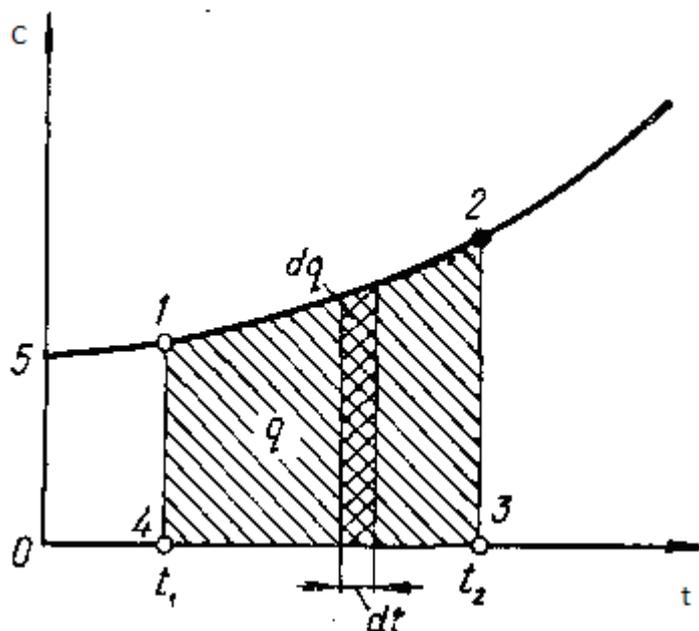


Рис. 1.2 C-t-диаграмма

Эта зависимость может быть выражена формулой:  $c = a + bt + dt^2 + \dots$ . Однако эту теплоемкость можно определить другим способом. Из рис. 1.2 видно, что теплота  $q$ , затраченная на нагревание газа от  $t_1$  до  $t_2$ ,  $q = \int_{t_1}^{t_2} cdt$  и равная площади 1—2—3—4—1, может быть представлена в таком виде:  $q =$  площадь 0—5—2—3—0 — площадь 0—5—1—4—0 или  $q = c_0^{-t_2} t_2 - c_0^{-t_1} t_1$ .

В практических расчетах при определении количества теплоты применяют так называемые средние теплоемкости. *Средней теплоемкостью* данного

процесса в интервале температур от  $t_1$  до  $t_2$  называют отношением количества теплоты к разности температур:

$$c_{t_1}^{-t_2} = \frac{q}{t_2 - t_1} = \frac{c_0^{-t_2} t_2 - c_0^{-t_1} t_1}{t_2 - t_1}.$$

Теплоемкость зависит от характера процесса. Особое значение имеет теплоемкость газа при постоянном давлении (в изобарном процессе)  $c_p$  и постоянном объеме (в изохорном процессе)  $c_v$ .

### 1.3 Первый закон термодинамики. Теплота и работа.

Равновесное состояние термодинамической системы (тела) зависит от внешних условий и температуры. Понятие температуры в термодинамике считается изначально ясным и используется для характеристики степени нагретости тела.

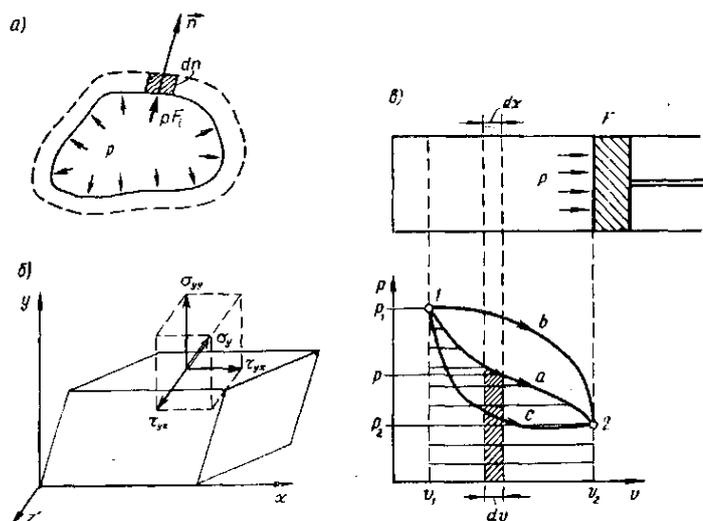


Рис 1.3 Нулевое начало термодинамики

Существование такого параметра состояния, как температура, устанавливается на основании опыта, а тот факт, что каждому равновесному состоянию системы соответствует определенное значение температуры, часто называют *нулевым началом термодинамики*. Это утверждение иллюстрируется примером 1.3.

Внешние условия определяются окружающей средой и воздействием внешних тел на термодинамическую систему. Если при воздействии изменяется

положение внешних тел, то говорят, что над системой производится *работа*. Изменение положения внешних тел приводит к перемещению границы (оболочки) системы и, как правило, к изменению ее объема. Кроме того, взаимодействие между системой и внешними телами проявляется как действие сил. Налицо, таким образом, оба элемента, образующих понятие работы в механике: сила и перемещение точки ее приложения.

Если термодинамическая система изменяет свой объем при взаимодействии с окружающей средой, имеющей определенное давление, то совершается *работа изменения* объема, которую определяют в полном соответствии с правилами механики. Изнутри на границу термодинамической системы действует давление  $p$  (рис. 1.3,а), на ее участок  $F_i$  с внешней нормалью  $\vec{n}$  - сила  $p F_i$ . При перемещении участка границы на расстояние  $dn$  эта сила совершает работу  $p F_i dn = p dV_i$ , где  $dV_i = F_i dn$  — заштрихованный объем, соответствующий участку  $F_i$ . Суммируя работу на всех участках границы системы, получим элементарную работу изменения объема, равную

$$\sum_i p dV_i = dL = p dV.$$

Знак элементарной работы совпадает со знаком дифференциала объема: при увеличении объема работа положительна (система совершает работу); при уменьшении объема работа отрицательна (работа совершается над системой).

Работа изменения объема — не единственный вид работы, рассматриваемый в термодинамике. Например, на грани элемента движущегося вязкого газа действуют напряжения (рис. 1.3,б); вектор напряжения на одной из граней  $\vec{\sigma}_y$  можно представить тремя компонентами: нормальным напряжением  $\sigma_{yy}$  и касательными напряжениями  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{yz}$ . Если умножить эти напряжения на площадь грани, получим три силы, которые при перемещении грани (деформация элемента и его движение в пространстве) совершают определенную работу. В термодинамике сложных явлений рассматривается также и работа немеханического характера: работа сил поверхностного

натяжения, работа сил, действующих в электрическом или магнитном поле, и т. д. В общем случае элементарная работа может быть представлена выражением

$$dL = pdV + dL_k$$

где  $dL_k$  — работа, не связанная с изменением объема системы.

Работа  $dL_k$  может быть представлена как сумма отдельных видов работ:

$$dL_k = \sum_k P_k dx_k,$$

где  $x_k$  — обобщенная координата (один из параметров внешних условий);  $P_k$  — соответствующая обобщенной координате  $x_k$  обобщенная сила.

Например, при образовании парового пузыря в процессе кипения совершается работа сил поверхностного натяжения, в этом случае поверхность раздела паровой и жидкой фаз является обобщенной координатой, а коэффициент поверхностного натяжения — обобщенной силой.

Рассмотрим работу изменения объема применительно к равновесному процессу расширения газа в цилиндре с поршнем (рис. 1.3, в). В цилиндре находится 1 кг газа, поэтому объем цилиндра, ограниченный поршнем, представляет собой удельный объем газа. На стенки цилиндра и на поршень площадью  $F$  изнутри действует всюду одинаковое давление газа  $p$ , которое медленно изменяется по мере того, как поршень редкими, бесконечно малыми толчками перемещается вправо. Такое перемещение поршня возможно в том случае, если извне на него действует сила, почти уравновешивающая давление  $p$  системы; в этом случае процесс можно считать близким к равновесному (или квазистатическому, представляющему последовательность статических состояний).

Вычислим работу изменения объема для равновесного процесса 1—2. При перемещении поршня на расстояние  $dx$  сила давления  $pF$  совершает элементарную работу  $pFdx = pdv$ , ибо  $Fdx = dv$ . На  $p$ - $v$ -диаграмме элементарная работа выражается площадью прямоугольника высотой  $p$  и шириной основания

$dv$ . Работа расширения, произведенная системой в процессе 1—2, равна интегралу

$$l_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv;$$

единица работы здесь Дж/кг.

Графическое представление этого интеграла в виде площади между кривой процесса на  $p$ - $v$ -диаграмме и осью объема показывает, что

$$\int_{1c2} p dv < \int_{1a2} p dv < \int_{1b2} p dv.$$

Таким образом, работа изменения объема термодинамической системы зависит от процесса перехода системы из начального состояния в конечное или короче, является *функцией процесса*. Этот важный отличительный признак работы подчеркнут здесь для того, чтобы сопоставить смысл числового значения величины  $l_{1-2}$  с числовыми значениями величин  $\Delta p_{1-2} = p_2 - p_1$  и  $\Delta v_{1-2} = v_2 - v_1$ . Величины  $\Delta p_{1-2}$  и  $\Delta v_{1-2}$  совершенно не зависят от вида процесса и одинаковы для процессов  $1a2$ ,  $1b2$  и  $1c2$ , их значения определяются только состояниями 1 и 2. В то время, как бессмысленно говорить о значении работы для отдельно взятого состояния 1, величины  $p$  и  $v$  имеют для этого состояния вполне определенные значения  $p_1$  и  $v_1$ . Величины  $p$ ,  $v$ ,  $T$  являются, следовательно, *функциями состояния* или *термодинамическими параметрами*. Работа изменения объема не является термодинамическим параметром.

Понятие работы в механике тесно связано с понятием энергии: если система совершает работу, то ее энергия уменьшается (при совершении работы внешним источником над системой энергия последней увеличится). Выше отмечалось, что производство работы связано с изменением положения внешних тел, например, поршня, ограничивающего объем газа. В отличие от механической системы термодинамическая система способна изменять свою энергию и в том случае, если координаты внешних тел не изменяются и работа,

следовательно, не производится. Такое изменение энергии происходит при *термическом контакте* (взаимодействие без производства работы) системы с телом, температура которого отличается от температуры системы. В этом случае энергия поступает в систему или отводится из нее в форме *теплоты*. Теплоту процесса считают положительной, если она подводится к термодинамической системе, и отрицательной, если она отводится. Для теплоты, отнесенной к 1 кг вещества, принято обозначение  $q$ , ее единица Дж/кг.

## **1.4 Формулировка первого закона термодинамики.**

### **1.4.1 Внутренняя энергия**

Первый закон термодинамики есть закон сохранения и превращения энергии: при любых процессах, происходящих в изолированной системе, ее полная энергия не изменяется. Этот, по словам Ф. Энгельса, абсолютный закон природы свидетельствует о том, что движение материи несотворимо и неуничтожаемо: оно может лишь переходить из одних форм в другие. Различные виды энергии могут взаимно превращаться в строго одинаковых количествах. Первый закон термодинамики отрицает возможность создания вечного двигателя первого рода, который давал бы полезную работу без затраты энергии извне.

Принципиальная возможность взаимных превращений теплоты и работы была известна еще до начала нашей эры. М. В. Ломоносов сформулировал закон сохранения материи и движения в 1748 г. в письме к Л. Эйлеру; при *этом движении* трактовалось *М.В.Ломоносовым* в самом широком смысле этого слова, охватывая и теплоту, как «внутреннее движение материи». М. В. Ломоносов рассматривал сформулированный им закон как «всеобщий естественный закон». Важным стимулом для развития научных исследований по установлению точной количественной эквивалентности энергии в различных ее формах явилось практическое использование тепловых двигателей. В 1766 г.

И. И. Ползуновым была построена паровая машина, в 1779 г. паровая машина была создана Д. Уаттом, в первые годы XIX в. были построены паровоз и пароход; паровые машины получили широкое распространение. Однако прошло еще несколько десятков лет, прежде чем закон сохранения и превращения энергии был сформулирован окончательно. Этот факт связан с именами Р. Майера, Д. Джоуля и Г. Гельмгольца. Двадцатилетний судовой врач Р. Майер обратил внимание на физиологические изменения в организме, обусловленные, по его мнению, снижением интенсивности теплообмена с окружающей средой в условиях жаркого климата. Через 2 года (1842 г) им была опубликована статья, посвященная закону сохранения и превращения энергии и содержащая рассчитанный автором с погрешностью примерно 14,5 % (по чужим опытным данным) механический эквивалент теплоты. Д. Джоуль проводил эксперименты по тепловым эффектам при прохождении электрического тока (1843 г.), а также по измерению механического эквивалента теплоты (1847—1850 гг.). В опытах Д. Джоуля механическая работа совершалась против сил трения (вращение мешалки или движение пористого поршня в водяном калориметре), работу совершал опускающийся груз, теплота трения определялась повышением температуры воды; механический эквивалент теплоты был измерен Д. Джоулем с погрешностью примерно 0,8 %. Г. Гельмгольц, один из крупнейших немецких ученых, в 1847 г. дал математическую формулировку закона сохранения энергии и указал на всеобщность этого закона; после работы Г. Гельмгольца закон сохранения и превращения энергии стал общепризнанным.

Уравнение первого закона термодинамики выражает принцип сохранения и превращения энергии применительно к термодинамической системе. Теплота и работа суть формы энергии, обусловленные взаимодействием системы с окружающей средой; пока идет процесс взаимодействия, к системе, например, может поступать энергия в форме теплоты, а система может отдавать энергию в форме работы. Лишь в специальном частном случае эквивалентность

теплоты и работы выражается в простом равенстве этих величин. В общем случае требуется еще третья величина, непосредственно связанная с энергетическим состоянием самой системы, отражающая уровень ее собственной энергии. Такой величиной является *внутренняя энергия* термодинамической системы.

В общем случае подводимая к системе теплота затрачивается на изменение внутренней энергии системы и на совершение работы:

$$q = \Delta u + l, \quad (1.8)$$

где  $q$  — теплота процесса изменения состояния термодинамической системы, Дж/кг;  $l$  — работа того же процесса, Дж/кг;  $\Delta u$  — изменение внутренней энергии в рассматриваемом процессе, Дж/кг.

Все величины в уравнении (1.8) - удельные, в расчете на единицу массы системы, которая предполагается неизменной и, кроме того, алгебраические, т. е. могут принимать и отрицательные значения.

Как было ранее сказано, знак работы (в том числе и немеханических видов работы) принимается положительным, если сама система совершает работу; для работы изменения объема этот знак совпадает со знаком дифференциала объема  $dv$ . Знак изменения внутренней энергии выбирается по общепринятому в математике и физике правилу: приращение возрастающей величины положительно. Знак теплоты определяется выбором знаков двух предыдущих величин и первым законом термодинамики, согласно которому подводимая в систему теплота имеет положительный знак.

Для бесконечно короткого (элементарного) процесса уравнение первого закона термодинамики приобретает следующую дифференциальную форму:

$$dq = du + dl = du + pdv. \quad (1.8a)$$

Между бесконечно малыми величинами  $dq$ ,  $du$  и  $dl$  и конечными величинами  $q_{1-2}$ ,  $\Delta u_{1-2}$  и  $l_{1-2}$  для термодинамического процесса с начальным состоянием 1 и конечным состоянием 2 существуют очевидные соотношения:

$$q_{1-2} = \int_1^2 dq; \Delta u_{1-2} = \int_1^2 du; l_{1-2} = \int_1^2 dl. \quad (1.9)$$

Начальное и конечное состояния могут совпадать — тогда происходит круговой процесс (цикл); таков, например, процесс  $1b2c1$  на рис. 1.3,в; этот процесс начинается в состоянии 1 и заканчивается в этом же состоянии. Для циклов используется специальное обозначение интеграла\*

$$l_{1b2c1} = \oint dl. \quad (1.10)$$

Интеграл (1.10) не равен нулю: как видно из рис. 1.3,в, он выражается положительным числом, поскольку положительная работа процесса  $1b2$  преобладает над отрицательной работой процесса  $2c1$ , что видно по соотношению между площадями для этих работ. Это означает, что 1 кг вещества (рабочего тела) совершает работу расширения, которая после окончания цикла может быть использована внешними телами. Согласно первому закону термодинамики, эта работа не может возникнуть из ничего: вечный двигатель запрещен первым законом. Поэтому внешняя среда, получив определенное количество энергии  $\oint dl$  за цикл, должна отдать такое же количество энергии в форме теплоты:

$$\oint dq = \oint dl. \quad (1.11)$$

Сравнивая уравнение первого закона термодинамики для цикла

$$\oint dq = \oint du + \oint dl.$$

с выражением (1.11), получаем следующий результат:

$$\oint du = 0, \quad (1.12)$$

который указывает на то, что внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы, т. е. таким же термодинамическим параметром, как, например, удельный объем, температура, давление. Сразу же можно отметить, что теплота не является функцией состояния, ибо по выражению (1.8) представляет собой сумму изменения функции состояния и функции процесса  $l$ .

Таким образом, величины, упоминавшиеся до сих пор в связи с анализом энергетических взаимодействий системы, отчетливо распадаются на две группы: функции состояния (термодинамические параметры) и функции процесса. Изменения в процессе 1—2 и тех и других определяются интегралами вида (1.9), однако для термодинамических параметров эти интегралы вычисляются несравненно проще:

$$\int_1^2 du = u_2 - u_1, \int_1^2 dv = v_2 - v_1; \int_1^2 dT = T_2 - T_1; \quad (1.13)$$

интегралы  $\int_1^2 dq$  и  $\int_1^2 dl$  не могут быть вычислены столь простым путем. Для вычисления интеграла

$$\int_1^2 dl = \int_1^2 p dv$$

необходимо знать зависимость  $p = p(v)$ , которая для различных процессов имеет различный вид. Простой способ вычисления интеграла  $\int_1^2 dq$  дается вторым законом термодинамики и будет рассмотрен позднее.

Указанное различие между термодинамическими параметрами и функциями процесса можно выразить и по-другому: говорят, что  $du$ ,  $dv$ ,  $dT$ ,  $dp$  являются *полными* дифференциалами, в то время как  $dq$  и  $dl$  таковыми не являются и представляют собой лишь бесконечно малые количества передаваемой системе (или системой в окружающую среду) энергии в форме теплоты или работы.

Тот факт, что внутренняя энергия связана исключительно с конкретным состоянием термодинамической системы, весьма важен, и первый закон термодинамики часто формулируют в виде утверждения о существовании внутренней энергии как термодинамического параметра.

Внутренняя энергия — не единственный вид энергии, которым может обладать термодинамическая система. Рассмотрим небольшой объем жидкости (жидкую частицу), движущейся вместе с окружающим ее потоком. Такая

жидкая частица обладает кинетической энергией, равной половине произведения массы частицы на квадрат скорости потока, потенциальной энергией в поле сил тяжести и, наконец, внутренней энергией; сумма этих трех энергий есть полная энергия системы. Закон сохранения и превращения энергии можно сформулировать так, что будут учтены все три указанных вида энергии. Из сказанного ясно, что к внутренней энергии относится та часть полной энергии термодинамической системы, которая не связана с движением системы как целого и с положением системы в поле сил тяжести.

Поскольку термодинамическая система представляет собой совокупность колоссального количества микрочастиц (молекул, атомов и т. п.), внутренняя энергия с точки зрения микроструктуры вещества представляет собой сумму энергий отдельных микрочастиц системы. Например, каждая молекула газа обладает кинетической энергией поступательного, вращательного и колебательного движений (взаимное колебательное движение атомов молекулы связано и с потенциальной энергией); потенциальной энергией межмолекулярного взаимодействия; внутриатомной и внутриядерной энергией. Просуммировав все виды энергии для одной молекулы, и умножив эту сумму на количество молекул в термодинамической системе, получим внутреннюю энергию этой системы.

Определение изменения внутренней энергии в термодинамическом процессе основано на соотношении:

$$\Delta u_{1-2} = u_2 - u_1 = \int_1^2 du, \quad (1.14)$$

т. е. необходимо иметь выражение для  $du$ . Состояние простой системы определяется двумя параметрами, следовательно, внутренняя

энергия есть функция любой пары термодинамических параметров из совокупности  $p, v, T$ ; например,  $u = u(v, T)$ . Тогда в соответствии с правилами дифференцирования функции двух переменных полный дифференциал внутренней энергии равен:

$$du = (\partial u / \partial T)_v dT + (\partial u / \partial v)_T dv. \quad (1.15)$$

Смысл производной  $(\partial u / \partial T)_v$  таков: это есть приращение внутренней энергии 1 кг вещества в процессе при  $v = const$ , соответствующее изменению температуры на 1 К. Поскольку работа  $p dv$  при  $v = const$  равна нулю, указанное приращение внутренней энергии по первому закону равно количеству подведенной теплоты, т. е. изохорной теплоемкости:

$$(\partial u / \partial T)_v = c_v.$$

Тогда для полного дифференциала  $du$  имеем выражение:

$$du = c_v dT + (\partial u / \partial v)_T dv. \quad (1.16)$$

Приращение внутренней энергии в произвольном процессе изменения состояния реального вещества в одной фазе\* определяется формулой:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) + \int_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv, \quad (1.17)$$

при этом

$$\int_1^2 c_v dT = \bar{c}_v \int_1^2 dT = \bar{c}_v(T_2 - T_1),$$

где  $\bar{c}_v$  — средняя изохорная теплоемкость для интервала температур от  $T_1$  до  $T_2$ .

Формула (1.17) может найти применение при решении, например, следующего практического вопроса: сколько теплоты нужно подвести к рабочему телу для совершения заданной работы? Эту работу необходимо сложить с приращением внутренней энергии, которое вычисляется по выражению (1.17), следовательно, вопрос сводится к вычислению интеграла:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv. \quad (1.18)$$

Несмотря на то, что внутренняя энергия  $u$  — параметр состояния, ее нельзя непосредственно измерить. Непосредственное измерение допускают параметры  $p$ ,  $v$ ,  $T$ . Связь между ними  $F(p, v, T) = 0$  представляет собой *термическое уравнение состояния*, индивидуальное для каждого вещества. Вычислить

интеграл (1.18), используя термическое уравнение состояния, можно, но для этого необходимо использовать второй закон термодинамики.

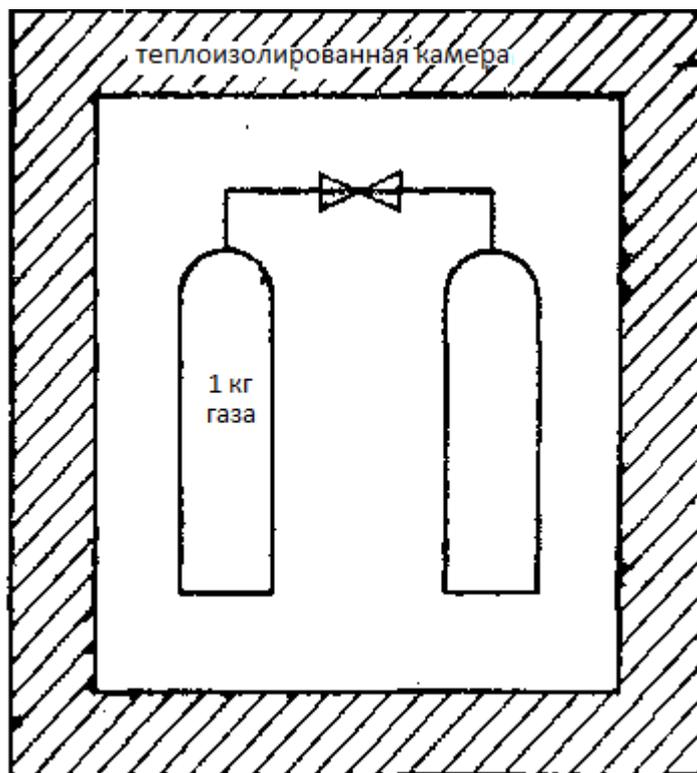


Рис. 1.4 Схема опыта

Просто вопрос решается для идеального газа. Опытами (Гей-Люссак, Джоуль) было установлено, что *внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема* (закон Джоуля). Схема опыта изображена на рис. 1.4. Вначале в левом сосуде находится 1 кг газа при умеренном давлении (чтобы газ оставался идеальным); объем сосуда есть, таким образом, удельный объем. В правом сосуде ничего нет (вакуум). На трубке, соединяющей сосуды, открывают клапан. Газ расширяется в пустоту (в вакуумированный правый сосуд), работа  $p dv$  при этом равна нулю, ибо противодействующее давление равно нулю. Температура среды в теплоизолированной камере 1, как оказалось, имеет одно и то же значение до опыта и после него; это показывает, что обмена теплотой с окружающей среды нет. Следовательно, по первому закону термодинамики имеем:  $l = 0$ ;  $q = 0$ ;  $\Delta u = 0$ ;  $u_2 = u_1$ , несмотря на то, что объем

увеличился практически вдвое. На этом основании интеграл (1.18) для идеального газа равен нулю.

Таким образом, приращение внутренней энергии в произвольном процессе изменения состояния идеального газа определяется формулой:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \bar{c}_v (T_2 - T_1). \quad (1.19)$$

Этот факт имеет простое объяснение с позиций кинетической теории идеального газа: внутренняя энергия его представляет собой сумму кинетических энергий поступательного движения (для одноатомных молекул) отдельных частиц, равную  $N(m\bar{w}^2/2)$ , где  $N$  — число частиц в системе;  $m$  — масса частицы;  $\bar{w}$  — ее средняя квадратичная скорость. При расширении газа в пустоту число частиц  $N$  в системе сохраняется, их средняя кинетическая энергия  $m\bar{w}^2/2$  также не изменяется, поскольку, попадая в вакуумированный правый сосуд, частицы не сталкиваются ни с какими объектами, могущими изменить их кинетическую энергию. Правда, площадь оболочки системы после расширения газа возросла вдвое из-за добавления площади внутренней поверхности второго сосуда, однако следствием этого является уменьшение количества частиц, испытывающих упругие соударения с единицей поверхности, и снижение давления  $p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{m\bar{w}^2}{2}$ , где  $V$  — объем системы, который увеличивается вдвое после открывания вентиля между сосудами. Поскольку кинетическая энергия частицы не изменилась, сохраняет свое значение и температура, которая при  $N = const$  связана с внутренней энергией простой пропорциональной зависимостью, учитывающей, по сути дела, различие в единицах измерения.

Для более полного уяснения сущности происходящих процессов полезно проанализировать в рамках кинетической теории случай, когда давление в правом сосуде перед открыванием вентиля не равно нулю. Представляет интерес и такой вопрос: справедливо ли утверждение «внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема» с точки зрения кинетической теории для

процесса изменения объема, изображенного на рис. 1.3, *в*, если стенка цилиндра и поршень образуют адиабатную оболочку.

### 1.4.2 Энтальпия

При расширении газа в цилиндре с поршнем лишь часть совершаемой работы является полезной работой. Пусть газ в цилиндре находится в равновесном начальном состоянии (рис. 1.5). Поршень при этом неподвижен, силы, действующие на него слева и справа, взаимно уравниваются:

$$pF = p_0F + P_n,$$

где  $p$  — давление газа в цилиндре;  $p_0$  — давление окружающей среды;  $F$  — площадь поршня;  $P_n$  — сила, совершающая полезную работу — поднятие груза массой  $m$ .

При бесконечно медленном подводе теплоты к газу в цилиндре сила  $pF$  будет совершать работу изменения объема в равновесном процессе; эту работу можно разделить на две части: полезную работу против силы  $P_n$  (поднятие груза) и работу против силы  $p_0F$  — давления окружающей среды. Последняя часть работы может оказаться значительной, если давление окружающей среды  $p_0$  велико.

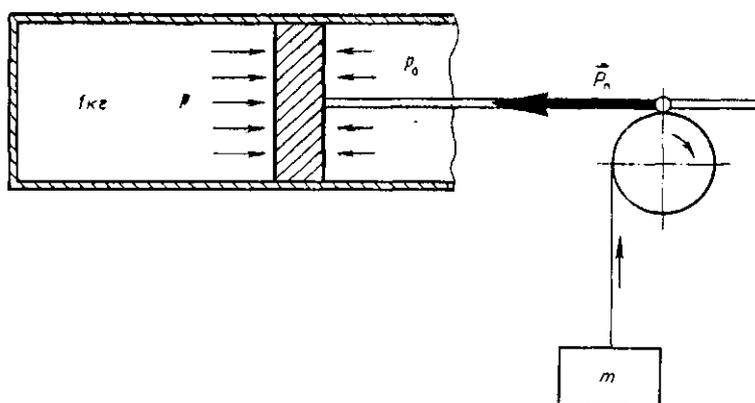


Рис. 1.5 Схема расширения газа в цилиндре

Для более детального выяснения смысла работы против давления окружающей среды и значимости этой работы в термодинамическом анализе рассмотрим три равновесных процесса расширения (рис. 1.6). На дне цилиндра (рис. 1.6,а) налито небольшое количество воды, объемом которой можно пренебречь по сравнению с объемом цилиндра. При подводе теплоты вода начинает превращаться в пар, объем которого намного больше объема воды, и поршень поднимается, совершая работу против давления окружающей среды  $p_0$ . Эта работа соответствует площади прямоугольника высотой  $p_0$  с основанием  $v_K$  (конечный объем) на  $p$ - $v$ -диаграмме. Объем  $v_K$  можно принять сколь угодно большим, ибо после превращения всей воды в пар последний будет продолжать расширение при подводе теплоты.

В другом случае (рис. 1.6,б) на поршень действует сумма двух сил:  $p_0F$  на поверхности жидкости и вес самой жидкости  $mg$ . Последняя сила медленно (в соответствии с требованием равновесности процесса) убывает по мере перелива воды в боковой резервуар при поднятии поршня. Водяной пар совершает полезную работу по поднятию жидкости (центр тяжести жидкости в боковом резервуаре выше, чем в цилиндре) и работу против давления окружающей среды. Последняя может быть записана формально в виде интеграла:

$$p_0 v_k = \int_0^{v_k} p_0 dv.$$

Тогда полезная работа равна:

$$\int_0^{v_k} p dv - \int_0^{v_k} p_0 dv = \int_0^{v_k} (p - p_0) dv.$$

Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, нетрудно понять, что заштрихованная площадь на рис. 1.6, б может быть найдена и в том случае, если переменной интегрирования является давление  $p$ :

$$\int_0^{v_k} (p - p_0) dv = - \int_{p_0}^{p_n} v dp.$$

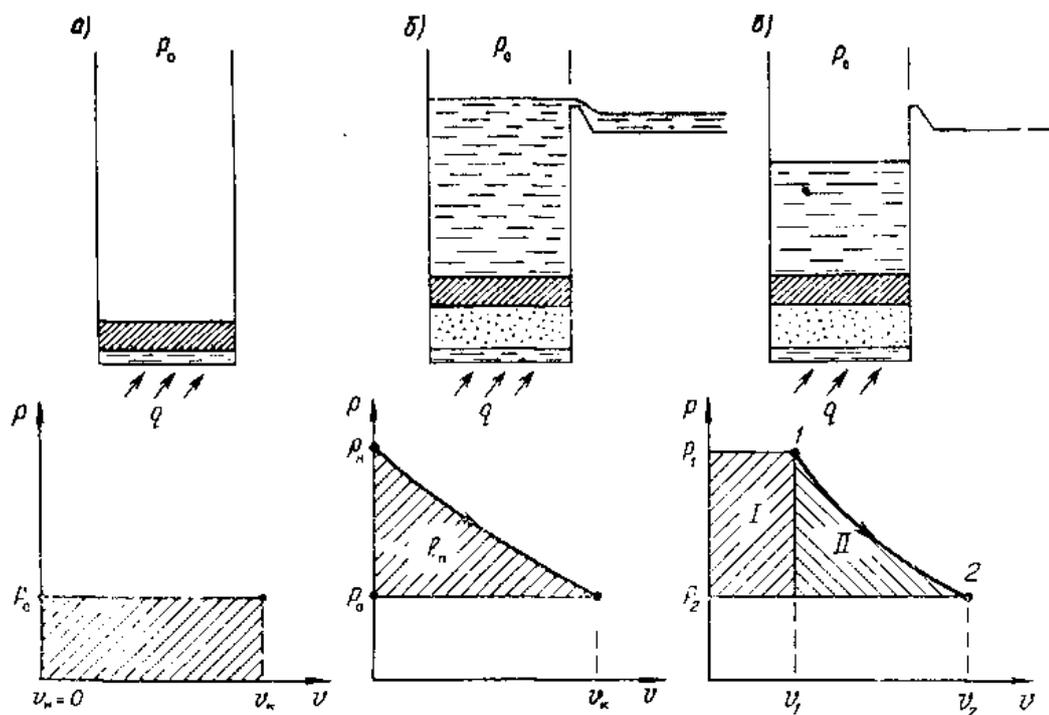


Рис. 1.6 Равновесные процессы расширения

Таким образом, работа изменения объема выражается интегралом

$$l = \int_1^2 p dv,$$

а полезная работа — интегралом

$$l_n = - \int_1^2 v dp. \quad (1.20)$$

Наиболее общий случай совершения работы термодинамической системой представлен на рис. 1.6,в. В этом случае пар совершает полезную работу в два этапа: поднимая воду до уровня перелива (площадь I) и переливая ее в боковой резервуар (площадь II); на обоих этапах паром совершается также работа против давления окружающей среды, соответствующая незаштрихованной площади. Полная работа, совершаемая паром (работа изменения объема), равна

$$l = p_1 v_1 + \int_1^2 p dv.$$

Полезная работа определяется выражением

$$l_n = l - p_2 v_2 = \int_1^2 p dv - (p_2 v_2 - p_1 v_1). \quad (1.21)$$

Каков физический смысл разности (приращения) произведения  $pv$ ? Значение  $p_1 v_1$  можно трактовать как работу против окружающей среды с давлением  $p_1$  значение  $p_2 v_2$  - как работу против окружающей среды с давлением  $p_2$ . При совершении работы такого рода тело, имеющее заданный объем (например,  $v_K$ ), вводится в окружающую среду с заданным давлением (например,  $p_0$ ). Такую работу называют *работой проталкивания*. Работа проталкивания определяется как приращение величины  $pv$ , являющейся функцией состояния. Поскольку формально можно записать

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = \int_1^2 d(pv) = \int_1^2 p dv + \int_1^2 v dp,$$

то полезная работа может быть определена и по выражению (1.20):

$$l_n = \int_1^2 p dv - \int_1^2 d(pv) = - \int_1^2 v dp,$$

которое эквивалентно выражению (1.21).

Подводя итог сказанному, можно констатировать, что работа изменения объема  $l$  и полезная работа  $l_n$  вычисляются путем интегрирования вдоль процесса изменения состояния и, например, для кругового процесса их значения совпадают; работа проталкивания может быть вычислена как приращение величины  $pv$  и не зависит от конфигурации процесса.

Способ вычисления работы проталкивания весьма прост и удобен и, разумеется, желателен и для других видов работы. Например, в механике в общем случае работа подсчитывается как скалярное произведение вектора силы  $\vec{R}$  на вектор перемещения  $ds$ :

$$dA = \vec{R} ds = |\vec{R}| |ds| \cos(\vec{R}, ds). \quad (1.22)$$

Работу на конечном отрезке траектории находят интегрированием вдоль пути перемещения материальной точки (или точки приложения силы  $\vec{R}$ ).

Однако для определения работы в поле сил тяжести имеем простое выражение в виде приращения величины  $\varphi = mgz$  (где  $m$  — масса перемещаемой материальной точки;  $g$  — ускорение свободного падения;  $z$  — высота по отношению к уровню отсчета):

$$A = -(mgz_2 - mgz_1). \quad (1.23)$$

Можно рассчитать работу по формуле (1.22) для различных траекторий перехода материальной точки из положения 1 в положение 2, при этом будет получаться одно и то же значение, определяемое формулой (1.23). Если траектория представляет собой замкнутый контур, то работа равна нулю.

Скалярная величина  $\varphi$  называется *потенциалом* силы тяжести

Сила связана со своим потенциалом выражением

$$\vec{P} = -grad\varphi,$$

где  $grad\varphi$  - вектор с проекциями  $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$  и  $\partial\varphi/\partial z$  на оси координат.

Сила тяжести направлена вдоль вертикальной оси  $z$ , поэтому

$$P = P_z = -\partial\varphi/\partial z = -mg.$$

Вообще, если для векторного поля существует скалярная функция  $\varphi$ , обладающая свойством определять работу вектора простым выражением типа (1.23), то такое поле называют потенциальным. Потенциальные векторные поля находят весьма широкое применение при решении различных проблем физики и техники. Потенциальными являются векторное поле скорости в жидкой среде (при определенных условиях), векторное поле электростатических сил и поле центростремительных сил; однако магнитное поле скалярным потенциалом не обладает. Понятие потенциала в механике известно давно, например, понятие потенциала скоростей было введено Эйлером.

Изложенные выше соображения позволяют понять целесообразность использования понятия потенциала и в термодинамике. Строгий аналитический метод термодинамических потенциалов, применимый практически ко всем задачам термодинамики, был разработан Дж. В. Гиббсом (1875 г.); этот метод

является основным для современной термодинамики. Правильно выбранные термодинамические потенциалы позволяют простым способом определять работу в разнообразных условиях, что особенно важно для немеханических видов работы.

Определим работу изменения объема газа в цилиндре (см. рис. 1.3,в) в предположении, что теплообмен с окружающей средой отсутствует (стенки цилиндра, окружающие газ, и поршень представляют собой адиабатную оболочку). Потенциалом для определения работы в данном случае служит внутренняя энергия и. Действительно, при  $dq = 0$ , согласно первому закону термодинамики, по формуле (2.1,а) имеем:

$$dl = - du$$

или

$$l = \int_1^2 pdv = -(u_2 - u_1).$$

Найдем выражение для потенциала полезной работы, совершаемой газом в тех же условиях (отсутствие теплообмена). С этой целью преобразуем выражение первого закона термодинамики, прибавляя и вычитая из правой части величину  $vdp$ :

$$dq = du + pdv + vdp - vdp.$$

Это выражение можно представить в виде

$$dq = du + d(pv) - vdp$$

или

$$dq = d(u + pv) - vdp.$$

Если теплообмен с внешней средой отсутствует ( $dq = 0$ ), то имеем:

$$dl_n = -vdp = -d(u + pv).$$

Полезная работа для конечного процесса

$$l_n = -\int_1^2 vdp = -[(u_2 + p_2v_2) - (u_1 + p_1v_1)].$$

Следовательно, газ, расширяющийся без теплообмена с окружающей средой, совершает полезную работу, равную взятому с обратным знаком приращению величины  $u+pv$ . Эта величина является потенциалом полезной работы. Она имеет специальное обозначение

$$h = u+pv \quad (1.24)$$

и носит название *энтальпии*. С применением энтальпии аналитическое выражение первого закона приобретает следующий вид:

$$dq = dh+dl_n = dh-vdp. \quad (1.25)$$

По своей структуре и в соответствии со смыслом понятия потенциала энтальпия представляет собой функцию состояния (термодинамический параметр) и для простой системы определяется двумя любыми параметрами, например,  $h = h(p, T)$ . Полный дифференциал энтальпии равен:

$$dh = (\partial h / \partial T)_p dT + (\partial h / \partial p)_T dp.$$

Смысл производной  $(\partial h / \partial T)_p$  состоит в следующем: она равна приращению энтальпии 1 кг вещества в изобарном процессе, соответствующему изменению температуры на 1 К. Полезная работа —  $vdp$  при  $p=const$  равна нулю, поэтому, согласно выражению (1.25), указанное приращение энтальпии равно количеству подведенной (или отведенной) теплоты, т. е. изобарной теплоемкости:

$$(\partial h / \partial T)_p = c_p.$$

Тогда для полного дифференциала  $dh$  имеем выражение:

$$dh = c_p dT + (\partial h / \partial p)_T dp. \quad (1.26)$$

Приращение энтальпии для любого процесса изменения состояния реального вещества в пределах одной фазы (газообразной, жидкой или твердой) определяется формулой:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \overline{c_p}(T_2 - T_1) + \int_1^2 (\partial h / \partial p)_T dp, \quad (1.27)$$

при этом

$$\int_1^2 c_p dT = \overline{c_p} \int_1^2 dT = \overline{c_p} (T_2 - T_1),$$

где  $\overline{c_p}$  — средняя изобарная теплоемкость в интервале температур от  $T_1$  до  $T_2$ .

Для идеального газа интеграл  $\int_1^2 (\partial h / \partial p)_T dp$  равен нулю. Действительно, подставляя значение энтальпии из выражения (1.24) в подынтегральное выражение, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T &= \left[\frac{\partial}{\partial p}(u + pv)\right]_T = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T + \left[\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right]_T = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \left[\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right]_T. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Оба последних слагаемых в формуле (1.28) равны нулю: первое по причине независимости внутренней энергии идеального газа от объема, второе — в силу постоянства величины  $pv$  при  $T = const$ . Кроме того, равенство нулю рассматриваемого интеграла подтверждается опытом по расширению газа в вакууме, так как при этом изменяется не только объем газа, но и давление, и, следовательно,  $(\partial u / \partial p)_T = 0$ .

Таким образом, приращение энтальпии в произвольном процессе изменения состояния идеального газа определяется формулой

$$\Delta h = \overline{c_p} (T_2 - T_1).$$

## 1.5 Теплоемкость газов

Как известно, теплоемкость равна отношению теплоты бесконечно малого процесса к изменению температуры вещества в этом процессе:

$$c = dq / dT.$$

Теплоемкость, следовательно, как и теплота, является функцией процесса и не входит в число термодинамических параметров. Однако первый закон термодинамики позволяет установить связь теплоемкости с термодинамическими параметрами вещества. В последующем изложении чаще всего будет использоваться удельная теплоемкость — теплоемкость единицы массы вещества  $c$ , Дж/(кг·К); часто применяются также: мольная теплоемкость  $\mu c$ , Дж/(кмоль·К) и объемная теплоемкость  $c'$ , Дж/(м<sup>3</sup>·К), при этом для  $c'$  следует указывать условия для единицы объема, чаще всего это нормальные физические условия: 0°С и 760 мм рт. ст.

Согласно первому закону термодинамики

$$c = (du + pdv) / dT.$$

Подставляя сюда выражение (2.8) для  $du$ , получим:

$$cdT = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]dv. \quad (1.29)$$

Выражение (1.29) пригодно для произвольных процессов. Если  $v = \text{const}$ , то  $dv = 0$  и для изохорной теплоемкости имеем:

$$c_v = (\partial u / \partial T)_v \quad (1.30)$$

Если  $p = \text{const}$ , то, разделив равенство (1.29) на  $dT$ , имеем в правой части отношение  $dv$  к  $dT$  при постоянном давлении, т. е. производную  $(dv/dT)_p$ :

$$c_p = c_v + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

Разность изобарной и изохорной теплоемкостей равна:

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{dv}{dT}\right)_p. \quad (1.31)$$

Уравнения (1.30) и (1.31) связывают теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  с термодинамическими параметрами  $p$ ,  $v$ ,  $T$  и  $u$ ; эти уравнения, полученные на основе первого закона термодинамики, справедливы, разумеется, для любого реального вещества, находящегося в любом агрегатном состоянии — твердом, жидком или газообразном (но однофазном). Практическая ценность уравнений типа (1.30) и (1.31) состоит в том, что они позволяют рассчитать все теплофизические свойства определенного технически важного вещества по

результатам экспериментального определения лишь некоторых его свойств. Сложность в данном случае состоит в том, что в правой части, например уравнения (1.31), находятся не только уже упоминавшиеся *термические параметры*  $p, v, T$ , но и параметр иного рода — внутренняя энергия  $u$ . Зависимость  $u = u\{v, T\}$  или  $F_I(u, v, T) = 0$  также является уравнением состояния данного вещества и в отличие от «обычного» (термического) уравнения состояния носит название *калорического уравнения состояния*. Величины  $u, h$  а также теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  называют калорическими свойствами вещества.

Как термическое уравнение состояния  $F(p, v, T) = 0$ , так и калорическое уравнение состояния  $F_I(u, v, T) = 0$  являются источниками разнообразной информации о свойствах данного вещества. Например, производная  $(\partial v / \partial T)_p$  показывает, насколько расширяется данное вещество при нагреве его на 1 К в условиях постоянного давления; применительно к воздуху, например, это позволяет рассчитать его циркуляцию в отапливаемом помещении. Производная  $(\partial p / \partial T)_v$  показывает, насколько возрастает давление при нагреве вещества на 1 К в условиях постоянного объема, что дает возможность рассчитать прочность резервуара, в котором заключено вещество. Калорическое уравнение состояния позволяет по выражению (1.30) найти  $c_v$ , а по выражению (1.31) в сочетании с термическим уравнением состояния —  $c_p$ ; это, в свою очередь, дает возможность по уравнению (1.27) рассчитать приращение энтальпии и определить таким образом полезную работу. Число подобных примеров весьма велико.

Поскольку и термическое, и калорическое уравнения состояния отражают физическую структуру одного и того же вещества, имеется объективная основа для установлении взаимной связи между термическими и калорическими свойствами этого вещества. Такую связь легко определить, например, для идеального газа в рамках кинетической теории. Связь между термическими и калорическими свойствами реального вещества без учета особенностей его

микроструктуры устанавливается совместным применением первого и второго законов термодинамики.

Найдем правую часть уравнения (1.31) для идеального газа. Первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю, так как внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема; величина  $p(dv/dT)_p$  по уравнению Клапейрона  $p\nu = RT$  равна газовой постоянной  $R$ . Вместо уравнения (1.31) имеем, следовательно, известную формулу Майера:

$$C_p - C_v = R, \quad (1.32)$$

из которой, в частности, следует, что изобарная теплоемкость идеального газа всегда больше изохорной теплоемкости. Соотношение  $c_p > c_v$  справедливо и для реальных газов, а также для капельных жидкостей и твердых тел. Из формулы (1.31) видно, что различие между  $c_p$  и  $c_v$ , обусловлено двумя причинами: способностью тела расширяться при изобарном повышении температуры  $[(dv/dT)_p \neq 0]$  и зависимостью внутренней энергии от объема  $[(du/dv)_T \neq 0]$ . Для газов главной является первая причина, а для жидкостей и твердых тел — вторая.

Идеальный газ как физическая модель вещества в газообразном состоянии широко используется в инженерной практике. Поэтому для ориентировочных расчетов теплоемкости идеального газа полезно применить результаты кинетической теории. Калорическое уравнение состояния идеального газа имеет вид  $u = u(T)$ , поскольку  $u$  не зависит от объема. Для 1 кмоль имеем:

$$\mu u = N_a (\overline{m\omega^2} / 2),$$

где  $N_a$  — число Авогадро.

Температура в кинетической теории определяется соотношением:

$$\frac{2}{3} (\overline{m\omega^2} / 2) = kT,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

поэтому

$$\mu u = \frac{3}{2} R_p T, \quad (1.33)$$

где  $N_a k = R_\mu$  — универсальная газовая постоянная, Дж / (кмоль·К),

Выражение (1.33) представляет собой калорическое уравнение состояния идеального газа. Согласно формуле (1.30)

$$\mu c_v = (\partial(\mu u) / \partial T)_v,$$

поэтому для изохорной теплоемкости имеем следующее выражение

$$\mu c_v = \frac{3}{2} R_\mu. \quad (1.34)$$

Формулу (1.34) можно трактовать следующим образом: изохорная теплоемкость идеального газа равна утроенному значению величины  $0,5R_\mu$ , саму величину  $0,5R_\mu$  умноженную на температуру  $T$ , можно рассматривать как энергию, приходящуюся на одно возможное направление поступательного движения (на одну степень свободы) одноатомных молекул для 1 кмоль вещества. Одноатомная молекула имеет три степени свободы, соответствующие трем координатным осям, поэтому и скорость молекулы имеет три составляющих:

$$\overline{\omega^2} = \overline{\omega_x^2} + \overline{\omega_y^2} + \overline{\omega_z^2}.$$

Внутреннюю энергию 1 кмоль вещества можно представить так:

$$\mu u = N_a \left( \frac{m\overline{\omega_x^2}}{2} + \frac{m\overline{\omega_y^2}}{2} + \frac{m\overline{\omega_z^2}}{2} \right) = N_a \sum_{i=1}^{i=3} a_i 0,5kT.$$

Коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$\sum_1^3 a_i = 3; \quad 0 \leq a_i \leq 3$$

и показывать неравномерность распределения средней кинетической энергии по отдельным осям. В кинетической теории газов принята гипотеза о равномерности распределения кинетической энергии по степеням свободы:

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ . Таким образом, на каждую степень свободы приходится энергия  $0,5kT$ , а на 1 кмоль:  $0,5N_a kT = 0,5R_\mu T$ .

Если выйти за рамки модели одноатомного идеального газа и рассматривать многоатомные молекулы, то следует принять, что каждый атом обладает тремя степенями свободы (как материальная точка); следовательно, в общем случае число степеней свободы для молекулы, составленной из  $n$  атомов, равно  $3n$ . Молекулу теперь следует считать системой материальных точек с центром масс, обладающим тремя степенями свободы поступательного движения. Кроме того, система может вращаться вокруг центра масс, а вектор угловой скорости, произвольно расположенный в пространстве, будет иметь три проекции на оси координат — три вращательных степени свободы. Атомы в молекуле подвижны по отношению одни к другим и испытывают колебания относительно положения равновесия. На колебательные степени свободы приходится, таким образом, число, равное в общем случае для многоатомной молекулы  $3n - 6$ ; для линейных молекул (атомы расположены вдоль прямой) это число равно  $3n - 5$ , поскольку вращательная степень свободы для линии, соединяющей атомы, отсутствует. Каждая колебательная степень свободы требует в среднем вдвое больше энергии, чем степень свободы поступательного или вращательного движения. Так происходит потому, что система из двух колеблющихся атомов обладает не только кинетической, но и потенциальной энергией колебания; расчеты показывают, что на долю каждой приходится  $0,5R_\mu T$ , следовательно, на одну колебательную степень свободы (пару атомов) приходится  $R_\mu T$ .

Пусть  $i$  — число степеней свободы поступательного и вращательного движений многоатомной молекулы, тогда число колебательных степеней свободы равно  $3n - i$ , а внутренняя энергия 1 кмоль вещества определится формулой:

$$\mu u = (i + 2(3n - i))0,5R_\mu T.$$

Для изохорной теплоемкости имеем формулу

$$\mu c_v = (i + 2(3n - i))0,5R_\mu.$$

или

$$\mu c_v / 0,5R_\mu = c_v / 0,5R = i + 2(3n - i). \quad (1.35)$$

Сравним расчеты по формуле (1.35) с экспериментальными данными для невысоких температур. Количество атомов в молекуле  $n$ , величина  $2c_v / R$ , вычисленная по формуле (1.35), и экспериментальные значения величины  $2c_v / R$  связаны между собой следующим образом:

$n$	1	2	3	4
Значения $2c_v / R$ по формуле (1.35)	3	7	12(13)	18(19)
Экспериментальные значения $2c_v / R$	3	5	7	7

Формула (1.35), таким образом, дает хороший результат для  $n = 1$  (гелий, неон, аргон и др.). В двухатомных молекулах при низких температурах колебания отсутствуют и  $2c_v / R = 5$ , однако для высоких температур  $2c_v / R \rightarrow 7$ . Для  $n \geq 3$  формула (1.35) не годится; для таких систем используются законы квантовой механики.

## 1.6 Второй закон термодинамики.

Первый закон термодинамики предполагает эквивалентность различных форм энергии: например, энергия в форме теплоты, выделившаяся в результате химической реакции или при высвобождении внутриядерной энергии может быть превращена в энергию в форме механической работы, а последняя — в электрическую энергию (универсальная, наиболее удобная форма энергии). Очевидно, при этом неизбежны некоторые потери (теплота от горячих трубопроводов в окружающую среду, трение в подшипниках, джоулево тепло в электрических проводниках и т. п.), которые можно свести к технически

реальному минимуму, совершенствуя отдельные узлы и агрегаты в системе преобразования энергии. Однако известно, что КПД крупных современных тепловых электростанций с весьма совершенным оборудованием составляет примерно 40%, т. е. более половины энергии в форме теплоты не преобразуется в электрическую энергию. Разумеется, такую потерю нельзя объяснить указанными выше причинами.

Объяснение дает второй закон термодинамики, одна из формулировок которого гласит: *невозможно построить периодически действующую машину, единственным результатом работы которой было бы поднятие груза за счет охлаждения теплового резервуара* (М. Планк). Следовательно, должны быть и другие «результаты» действия такой тепловой машины (потребляющей энергию в форме теплоты и отдающей ее в форме механической работы). И действительно, тепловая машина (паровая турбина электростанции, поршневой двигатель внутреннего сгорания автомобиля или трактора, газотурбинный двигатель самолета и т. д.), получив теплоту в количестве  $Q_1$ , превращает часть ее в работу  $L$ , а оставшуюся часть  $Q_2 = Q_1 - L$  отдает в окружающую среду. Именно этот «результат» работы теплового двигателя — отдача  $Q_2$  в окружающую среду — и является главной причиной снижения его КПД. Если бы не это обстоятельство, человечество получило бы в свое распоряжение двигатель, способный превратить в работу, например, внутреннюю энергию мирового океана; такой двигатель, превращающий всю полученную теплоту  $Q_1$  в работу, получил наименование вечного двигателя второго рода.

Интересно отметить, что вечный двигатель второго рода одноразового действия не запрещается вторым законом. Подведем теплоту к газу в цилиндре с неподвижно закрепленным поршнем, приращение внутренней энергии газа равно подведенной теплоте, поскольку работа не совершается (поршень неподвижен,  $dv = 0$ ). Поместим после этого цилиндр в адиабатную оболочку и дадим газу расширяться: совершенная работа будет равна  $\Delta u$ , ибо теплообмена в процессе расширения нет. Если газ идеальный, то его температура в конце

расширения будет равна температуре перед подводом теплоты, однако объем будет больше и повторение описанной операции (периодически действующая машина) невозможно.

Система, реализующая тепловой двигатель (рис. 1.7), включает три элемента: горячий источник (теплоотдатчик) с температурой  $T_1$  отдающий теплоту  $q_1$ , рабочее тело  $PT$  (обычно газ), воспринимающее энергию в форме теплоты и отдающее ее во внешнюю среду в форме работы; холодный источник (теплоприемник) с температурой  $T_2$ , воспринимающий часть теплоты  $q_2$ , которая не была преобразована в работу. Преобразование теплоты в работу осуществляется рабочим телом в *круговом* термодинамическом процессе изменения его состояния (*цикле*). Совершаемая рабочим телом работа расширения (положительная) должна быть больше работы сжатия (отрицательной), их разность представляет собой работу цикла  $l_u$ ; таким образом, цикл теплового двигателя осуществляется по часовой стрелке.

Проведем анализ термодинамического цикла теплового двигателя на основе первого закона. С этой целью разобьем весь круговой процесс на бесконечно короткие элементарные процессы, что можно сделать с помощью

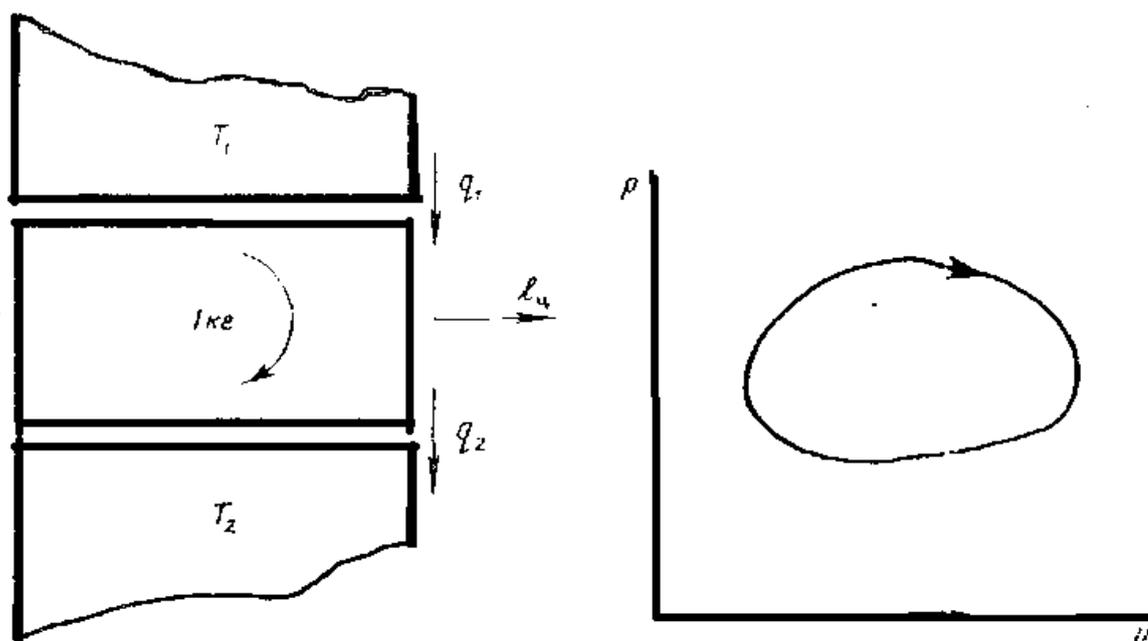


Рис. 1.7 Система, реализующая тепловой двигатель

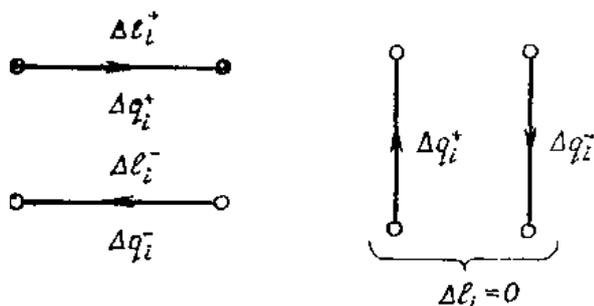
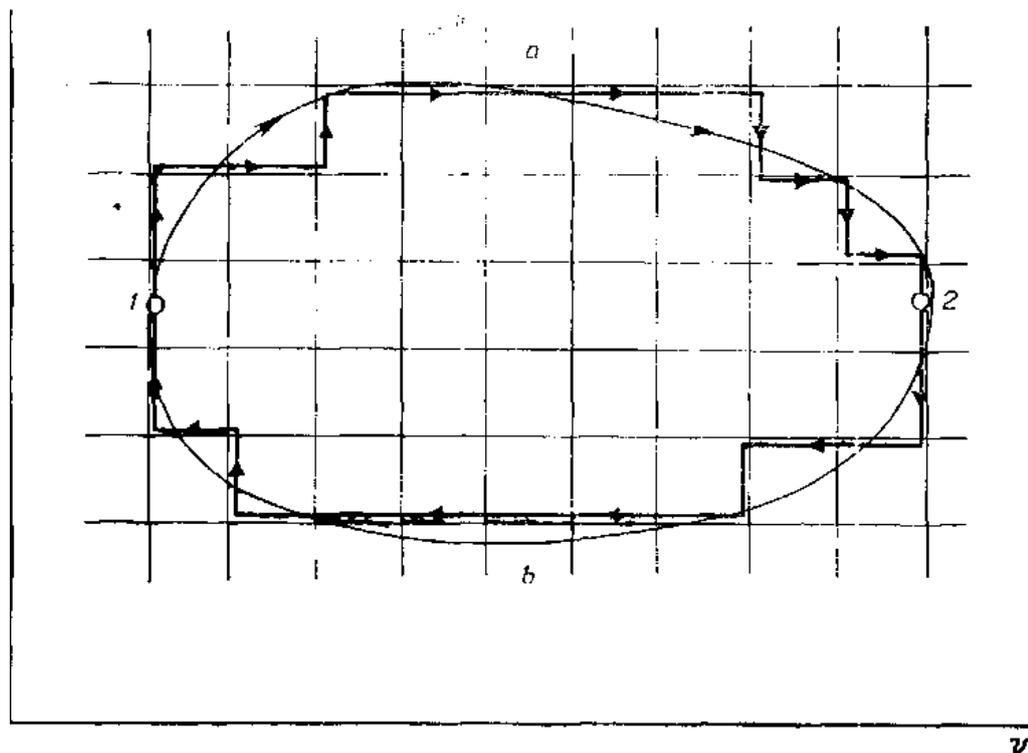


Рис. 1.8 Координатная сетка

координатной сетки (рис. 1.8). Криволинейный непрерывный цикл можно приближенно заменить замкнутой ломаной линией, составленной из горизонтальных (изобар) и вертикальных (изохор) отрезков. При подсчете работы, произведенной за цикл, встречаются отрезки четырех видов, поскольку необходимо учитывать направление процесса (см. рис. 1.8); элементарная работа  $\Delta l_i$  на отрезках может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Положительная работа, произведенная рабочим телом за цикл, равна

$$l^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i^+ = \int_{1a2} dl,$$

где  $\Delta l_i^+$  — элементарная работа на отрезках изобар с увеличением объема (работа на остальных отрезках в сумму не включается).

Отрицательная работа, произведенная рабочим телом за цикл, равна

$$l^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i^- = \int_{2b1} dl,$$

где  $\Delta l_i^-$  — элементарная работа на остальных отрезках изобар.

Результирующая работа, произведенная рабочим телом за цикл и называемая *работой цикла*, равна

$$l_y = l^+ + |l^-| = \int_{1a2} dl + \left| \int_{2b1} dl \right| = \int_{1a2b1} dl = \oint dl, \quad (1.36)$$

где прямые скобки есть знак модуля.

Аналогичным способом может быть подсчитана и теплота. Знаки элементарной теплоты указаны для четырех видов отрезков на рис. 1.8; при этом очевидно, что если при постоянном давлении увеличивается объем при постоянном объеме увеличивается давление, то причиной этого является подвод теплоты и  $\Delta q_i = \Delta q_i^+$  Теплота, полученная рабочим телом за цикл, равна

$$q^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta q_i^+.$$

Теплота, отданная рабочим телом за цикл, равна

$$q^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta q_i^-.$$

Результирующая теплота за цикл, называемая *теплотой цикла*, равна

$$q_y = q^+ + |q^-|. \quad (1.37)$$

Обращает на себя внимание то, что подсчет теплоты цикла гораздо сложнее, чем подсчет работы цикла. Это происходит потому, что идущие один за другим элементарные процессы при обходе цикла могут иметь чередующиеся знаки теплоты (например, на участке *a2*). При этом нарушается

связная последовательность  $\Delta q_i$ , одного знака при суммировании и предел такой суммы как будто не имеет смысла интеграла вдоль кривой термодинамического процесса. Однако интеграл по всему контуру цикла как предел алгебраической суммы элементарных теплот существует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta q_i = \oint dq - q^+ + |q^-| = q_u. \quad (1.38)$$

Из сказанного следует, что  $p$ - $v$ -диаграмма неудобна для подсчета теплоты. Например, можно видеть, что работа  $l^+$  есть площадь под отрезком цикла  $1a2$ , в то время как для теплоты  $q^+$  аналогичного непрерывного отрезка прямо указать нельзя, ибо отдельные части  $q^+$  согласно построению ломаной могут не находиться в соседних точках.

Согласно первому закону термодинамики работа цикла равна теплоте цикла:

$$l_u = q_u, \quad (1.39)$$

что следует как из смысла этих величин, так и формально из уравнения первого закона для цикла:

$$\oint dq = \oint du + \oint dl,$$

поскольку  $\oint du = 0$ , ибо  $u$  — термодинамический параметр.

Работа цикла равна также полезной работе, совершенной рабочим телом за цикл:

$$l_u = l_{n.ц}, \quad (1.40)$$

так как эти работы определяются интегралами

$$l_u = \oint p dv, \quad l_{n.ц} = \oint -v dp,$$

выражающими одну и ту же площадь на  $p$ - $v$ -диаграмме: площадь, ограниченную линией цикла.

Термодинамическое совершенство теплового двигателя оценивается значением *термического КПД*, который равен отношению работы цикла к подведенной теплоте:

$$\eta_t = l_u / q^+.$$

Для подводимой и отводимой теплот обычно принимают следующие обозначения:

$$q^+ = q_1; |q^-| = q_2;$$

тогда для термического КПД имеем

$$\eta_t = \frac{l_u}{q_1} = \frac{q_u}{q_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1}. \quad (1.41)$$

Другая широко известная формулировка второго закона термодинамики звучит так: *теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому* (Р. Клаузиус, 1850 г.). Несмотря на внешнее различие формулировок Томсона—Планка и Клаузиуса, они эквивалентны. Эквивалентность формулировок означает, что каждая из них является следствием другой; эквивалентность можно доказать и другим путем: при нарушении одной формулировки должна нарушаться и другая (и наоборот). Воспользуемся вторым способом. Пусть имеется тепловой двигатель, отбирающий  $q_1 = 100$  кДж/кг от горячего источника, превращающий  $l_u = 40$  кДж/кг в работу и отдающий  $q_2 = 60$  кДж/кг холодному источнику. Нарушим формулировку Клаузиуса, передав 60 кДж/кг от холодного источника к горячему самопроизвольно (без помощи из окружающей среды). После такой передачи оказывается, что горячий источник отдал  $100 - 60 = 40$  кДж/кг, которые тепловой двигатель полностью превратил в работу. Это нарушение формулировки Томсона — Планка. Легко показать также, что при нарушении формулировки о принципе устройства теплового двигателя нарушается и формулировка о направлении самопроизвольного теплового потока.

Несамопроизвольный переход теплоты от холодного тела к горячему, конечно, возможен; для этого необходимо лишь осуществить *компенсацию*. Таковая, например, может выразиться в совершении работы посторонним источником из окружающей среды. Для этого нужно обратить тепловой

двигатель, заставить его не производить работу, а потреблять ее. Рабочее тело должно совершать цикл, в котором отрицательная работа по модулю больше положительной:

$$|l^-| > l^+.$$

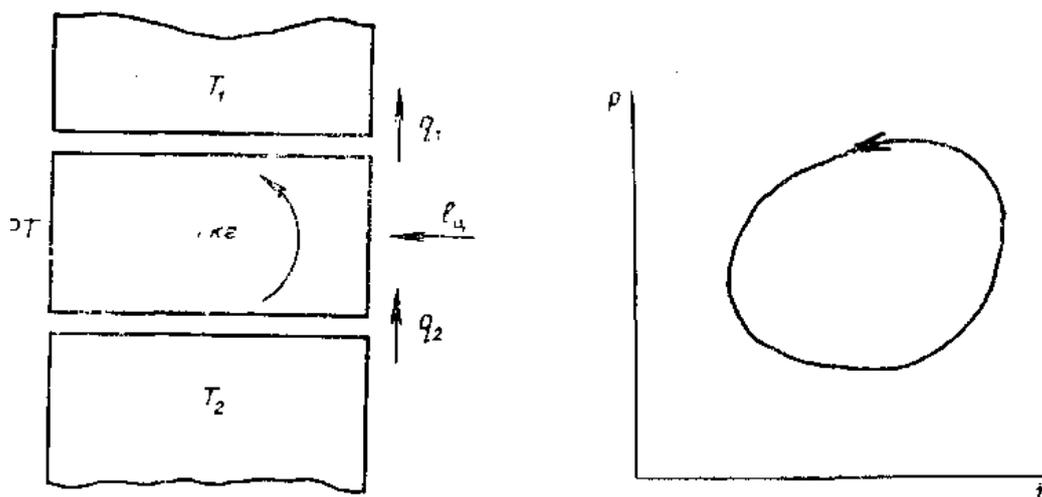


Рис. 1.9 Схема кругового процесса против часовой стрелки

Такой круговой процесс идет против часовой стрелки (рис. 1.9); по обратному циклу работают холодильные машины. Первый закон, разумеется, выполняется и здесь: от охлаждаемого тела отбирается теплота  $q_2$ , складывается с работой цикла и отдается горячему источнику (например, окружающей среде):

$$q_2 + l_{\text{ц}} = q_1.$$

Термодинамическое совершенство холодильной машины определяется малостью затраченной работы по сравнению с переносимой теплотой.

Рассматривая различные самопроизвольные процессы в природе и технических устройствах, можно установить одну их общую черту: эти процессы характеризуются определенной направленностью. Так, теплота распространяется в направлении убывания температуры, вещество в неподвижной среде распространяется в направлении убывания концентрации, газ

расширяется в направлении убывания давления, движение электрического тока происходит в направлении убывания потенциала и т. п. Направленность самопроизвольных процессов не является, конечно, буквально геометрической; речь идет о направлении в широком смысле этого слова. Например, работа, затрачиваемая на перемещение вязкой жидкости, совершается, в частности, и против сил трения. Эта часть работы переходит в теплоту, такое направление перехода является самопроизвольным. В опытах Джоуля по определению эквивалентности теплоты и работы перемешивание воды осуществлялось мешалкой, выделявшаяся теплота трения затрачивалась на увеличение внутренней энергии воды. Однако осуществить процесс *самопроизвольного* вращения мешалки за счет использования внутренней энергии воды, разумеется, невозможно. Таким образом, для процессов можно указать прямое и обратное направления. Прямым считается направление естественного хода самопроизвольного процесса. Обратное направление всегда можно реализовать, вводя некоторый дополнительный компенсационный процесс, как в приведенном выше примере с холодильной машиной.

Большое значение в термодинамике имеет понятие *обратимого термодинамического процесса*: после такого процесса термодинамическая система и окружающая среда могут возвратиться в начальное состояние. Возвращение в начальное состояние окружающей среды означает, что для осуществления обратного процесса не понадобилась компенсация. Более детально обратимый процесс можно представить себе следующим образом: а) система должна пройти в прямом и обратном направлениях через одни и те же состояния; б) после прямого и обратного процессов ни в системе, ни в окружающей среде не должно быть остаточных изменений. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, процесс является *необратимым*.

Равновесный (квазистатический) процесс является процессом обратимым. По определению равновесный процесс представляет собой последовательность равновесных (статических) состояний, в которых соблюдается механическое

(поле давлений однородно) и термическое (поле температур однородно) равновесие. Переход от одного состояния к другому неминуемо связан с нарушением равновесия: движение поршня нарушает однородное поле давлений, так как при сжатии газа у поверхности поршня возникает область повышенного давления: подвод теплоты вызывает нарушение однородного поля температуры, так как в месте подвода температура возрастает. В практическом смысле процесс можно считать равновесным тогда, когда до начала следующей порции (элементарное перемещение поршня или подвей элементарного количества теплоты) возмущения, вызванные предыдущим переходом, успевают «рассосаться». Силовые или термические воздействия внешней среды должны быть достаточно малыми, а паузы между ними — достаточно длительными. Процесс представляется только равновесными состояниями, неравновесные паузы можно не принимать во внимание. Но именно эти неравновесные паузы и являются причиной различия между прямым и обратным процессами: при сжатии давление у поршня повышается, а при расширении — понижается; при подводе теплоты возникает область повышенной температуры, а при отводе — пониженной. Сами фиксированные равновесные состояния идентичны для прямого и обратного процессов, следовательно, если процесс можно трактовать как последовательность состояний (т. е. как равновесный процесс), то он одновременно является и обратимым процессом.

Реально вопрос о равновесности и обратимости процесса решают путем сравнения скорости распространения возмущений в термодинамической системе со скоростью изменения ее состояния. Например, сравнивают скорость движения поршня, сжимающего газ, со скоростью распространения малых возмущений в газе, равной, как известно, скорости звука; чем меньше первая скорость по сравнению со второй, тем ближе процесс сжатия к равновесному, обратимому.

Таким образом, идеально равновесным и обратимым можно считать бесконечно медленный процесс. Если говорить о процессе расширения или сжатия без теплообмена (цилиндр с поршнем в адиабатной оболочке), когда работа производится за счет внутренней энергии, то при необратимом (быстром) изменении объема часть внутренней энергии уйдет на работу против сил трения в газе (завихрения) и внешняя работа поршня будет меньше при расширении и больше при сжатии. Этот эффект называют *внутренней необратимостью или диссипацией (рассеянием) энергии*. Он обладает четко выраженной направленностью: та часть механической работы, которая совершается против сил трения, переходит в теплоту, обратный самопроизвольный процесс невозможен. Если бы не было внутреннего трения в газе, не было бы и диссипации.

Второй вид необратимости — *внешняя необратимость* — связан с подводом или отводом теплоты. Обратимый (бесконечно медленный) подвод теплоты возможен, если разность температур источника теплоты и получающей теплоту термодинамической системы стремится к нулю. Если же эта разность температур имеет конечное значение, то процесс необратим, при этом степень необратимости тем больше, чем больше разность температур. В то время как внутренняя необратимость приводит к простым «вредным» последствиям в виде уменьшения работы, внешняя необратимость, связанная с передачей энергии в форме *теплоты*, имеет более сложную природу, обусловленную самой сутью второго закона термодинамики. Смысл и последствия необратимости при передаче теплоты будут более подробно рассмотрены в последующем.

Приведенные ранее две формулировки второго закона термодинамики самым тесным образом связаны с понятием необратимости. Действительно, формулировка Томсона — Планка накладывает запрет на двигатель, который полностью превращает в работу теплоту, взятую от горячего источника. Нарушение такого запрета равносильно существованию обратного процесса для самопроизвольного прямого процесса превращения работы в теплоту, т. е.

обратимости последнего процесса. Формулировка Клаузиуса накладывает запрет на обратный процесс переноса теплоты, т. е. на обратимость обычного прямого переноса теплоты — самопроизвольного процесса. Таким образом, обе формулировки запрещают обратимость для самопроизвольного процесса.

М. Планку принадлежит следующее высказывание: «...при необратимых процессах конечное состояние, в известном смысле, выделено по отношению к начальному состоянию; природа, так сказать, отдает ему большее «предпочтение».

Все реальные процессы протекают с конечными скоростями, они сопровождаются трением и теплообменом при конечной разности температур. Обобщение опыта практической деятельности человека приводит к заключению: *любой реальный самопроизвольный процесс макроскопического масштаба необратим.* Такова третья формулировка второго закона термодинамики, которую считают наиболее общей.

Физическая природа необратимости, ее механизм могут быть раскрыты, однако для этого необходимо выйти за рамки классической термодинамики и обратиться к статистическим методам.

## 1.7 Термодинамические циклы.

### Цикл Карно

Проходящий по часовой стрелке цикл произвольной формы можно использовать для преобразования теплоты в работу, при этом термодинамическое совершенство такого преобразования оценивается по значению термического КПД. Для осуществления замкнутого цикла обязательны расширение и сжатие рабочего тела; если эти процессы обратимы, то, благодаря отсутствию потерь на трение, работа цикла будет максимальной. Кроме расширения и сжатия, необходимо осуществлять подвод теплоты к рабочему телу от горячего источника и отвод ее к холодному источнику; обратимость этих процессов также способствует увеличению КПД, хотя это

пока и не очевидно. Стремление найти наилучшие условия работы теплового двигателя привели С. Карно к созданию эталонного цикла (рис. 1.10), носящего его имя.

Пусть имеется горячий источник с температурой  $T_1$  которая не уменьшается, несмотря на отбор теплоты для многократно повторяющихся циклов. Приведем рабочее тело (газ в цилиндре с поршнем) в термический контакт с горячим источником, через некоторое время газ примет температуру  $T_1$  и можно начать первый процесс  $ab$  цикла: обратимый подвод теплоты к рабочему телу. Сдвинем поршень на небольшое расстояние, дав газу немного расшириться и понизить свою температуру до значения  $T_1 - dT$ . Под действием малой разности температур к газу от горячего источника будет подведена теплота  $dq_1$  и его температура снова возрастет до  $T_1$ . Возобновляя движение поршня малыми и редкими толчками, можно (в пределе) получить обратимый процесс  $ab$  подвода теплоты к рабочему телу при температуре  $T_1$  (точнее — при температуре рабочего тела бесконечно близкой к температуре горячего источника  $T_1$ ). Окончание процесса подвода теплоты (значение объема  $v_b$  на рис. 3.4) определяется ходом поршня, т. е. конструкцией данного теплового двигателя. При расширении газ совершает работу

$$l_{ab} = \int_a^b p dv$$

и получает теплоту

$$q_1 = q_{ab} = \int_a^b dq.$$

После подвода теплоты  $q_1$  рабочее тело необходимо обратимым способом перевести на температурный уровень холодного источника  $T_2 < T_1$  с тем, чтобы отдать ему теплоту  $q_2$ . Переход  $bc$  совершается без теплообмена по двум причинам: во-первых, имеется только два температурных уровня (источника), на которых по условию должен осуществляться обратимый теплообмен; и, во-вторых, для предотвращения отвода теплоты и получения большего количества

работы за счет уменьшения внутренней энергии. Таким образом, процесс  $bc$  есть процесс обратимого адиабатного расширения (без трения), сопровождающийся охлаждением рабочего тела. Охлаждение означает, что линия процесса  $bc$  идет круче линии  $ab$  и направлена в область более низких температур. Вообще линия  $ab$  (изотерма) определена, если известно уравнение состояния рабочего тела  $F(p, v, T) = 0$ ; в этом случае уравнение изотермы  $ab$  имеет вид:  $p = p(v, T_1)$ . Что касается адиабаты  $bc$ , то ее уравнение в  $p$ - $v$ -диаграмме может быть определено на основе первого закона при  $dq=0$  и калорического уравнения состояния рабочего тела.

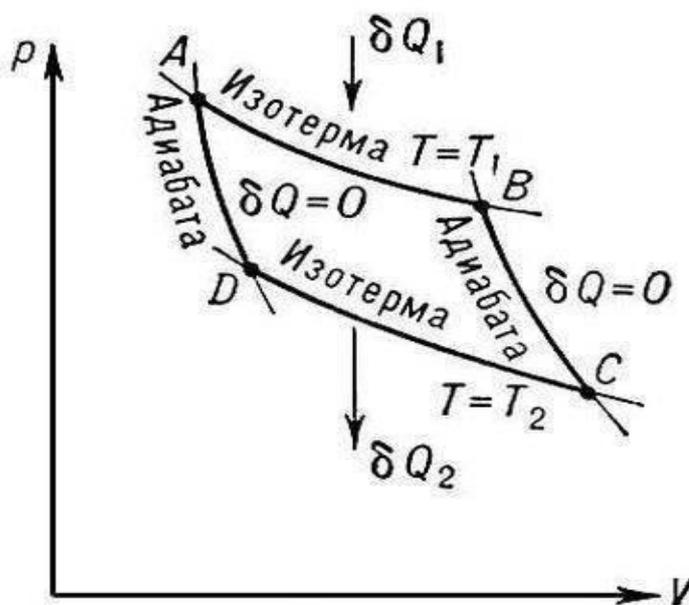


Рис. 1.10 Цикл Карно

В точке  $c$  рабочее тело имеет температуру  $T_2$ . Для отвода теплоты при этой температуре рабочее тело необходимо немного сжать, тогда его температура перейдет к холодному источнику, а температура рабочего тела снизится до температуры холодного источника  $T_2$ . Такой обратимый процесс изотермического отвода теплоты продолжается до точки  $d$ , при этом значение объема  $v_d$  определяется конструкцией двигателя. Последний процесс,

замыкающий цикл Карно,— обратимое адиабатное сжатие рабочего тела  $da$ , в ходе которого его температура повышается до  $T_1$ .

Таким образом, цикл Карно состоит из четырех обратимых процессов, выбор которых, основанный на приведенных выше рассуждениях, сделан рационально. Окончательное суждение о термодинамическом совершенстве цикла можно сделать на основе расчета его термического КПД, определяемого формулой,

$$\eta_t = 1 - q_2 / q_1, \quad (1.42)$$

которая в данном случае предпочтительнее остальных из-за меньшего объема расчетов ( $q_{bc} = q_{da} = 0$ ).

В качестве рабочего тела будем использовать идеальный газ. Это упрощает формулы и, как будет показано далее, не уменьшает общности результатов. Термическое уравнение состояния идеального газа имеет вид:  $p\nu = RT$ , калорическое уравнение:  $u = c_v T$ . Подведенная вдоль изотермы  $ab$  теплота равна:

$$q_1 = q_{ab} = \int_a^b dq = \int_a^b (du + pdv) = \int_a^b pdv = \int_{v_a}^{v_b} \frac{RT_1}{\nu} d\nu;$$

$$q_1 = RT_1 \ln \frac{v_b}{v_a}, \quad (1.43)$$

поскольку  $du = c_v dT = 0$ , ибо интегрирование ведется при условии  $T = \text{const} = T_1$ .

Аналогичным образом определяется отведенная вдоль изотермы  $cd$  теплота:

$$q_2 = |q_{cd}| = \left| \int_d^c dq \right| = \int_d^c (du + pdv) = \int_d^c pdv = \int_d^c \frac{RT_2}{\nu} d\nu;$$

$$q_2 = RT_2 \ln \frac{v_c}{v_d}, \quad (1.44)$$

Покажем, что отношения объемов в формулах (1.43) и (1.44) равны между собой:

$$v_b / v_a = v_c / v_d \quad \text{ИЛИ} \quad v_b / v_c = v_a / v_d$$

Каждая пара объемов, образующих отношение во второй формуле, лежит на адиабате ( $dq=0$ ) и по первому закону

$$c_v dT + p dv = 0.$$

Разделим первый член на  $RT$ , а второй — на  $p v$ :

$$-c_v \frac{dT}{T} = \frac{dv}{v}.$$

От обеих частей этого уравнения возьмем интегралы вдоль каждой адиабаты:

$$-c_v \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} = \int_{v_b}^{v_c} \frac{dv}{v}; \quad -c_v \int_{T_a}^{T_d} \frac{dT}{T} = \int_{v_a}^{v_d} \frac{dv}{v};$$

тогда получим

$$-c_v \ln \frac{T_c}{T_b} = \ln \frac{v_c}{v_b}; \quad -c_v \ln \frac{T_d}{T_a} = -c_v \ln \frac{T_c}{T_b} = \ln \frac{v_d}{v_a};$$

что и доказывает равенство отношений объемов в формулах (1.43) и (1.44).

Подставив выражения для  $q_1$  и  $q_2$  в формулу (1.42), получим следующую зависимость для термического КПД обратимого цикла Карно:

$$\eta_o = 1 - T_2 / T_1 \quad (1.45)$$

По смыслу представленного вывода ясно, что величина  $\eta_o$  не зависит от свойств конкретного идеального газа ( $R$ ,  $c_v$ ), поскольку они не учтены в выражении (1.45). В действительности справедливо еще более общее положение, известное как *теорема Карно*: термический КПД обратимого цикла Карно определяется только температурами  $T_1$  и  $T_2$  и не зависит от природы рабочего тела и устройства двигателя.

Предположим обратное. Пусть имеется другая обратимая машина Карно, работающая в том же интервале температур, но с другим рабочим телом (реальный газ с уравнением состояния  $F(p, v, T) = 0$ ) или другим численным значением отношения  $v_b / v_a$  и по этой причине с другим термическим коэффициентом полезного действия  $\eta'_o$ . Поскольку обе машины — с

идеальным газом и с произвольным рабочим телом — обратимы, то любая из них может работать как в прямом направлении (тепловой двигатель), так и в обратном (холодильная машина). При работе машин в различных направлениях (рис. 1.11) вся система (источник с температурой  $T_1$ , источник с температурой  $T_2$  и обе машины) производит работу  $|l_u - l'_u|$  за счет теплоты  $|q_1 - q'_1|$  одного горячего источника, что противоречит второму закону термодинамики в формулировке Томсона — Планка.

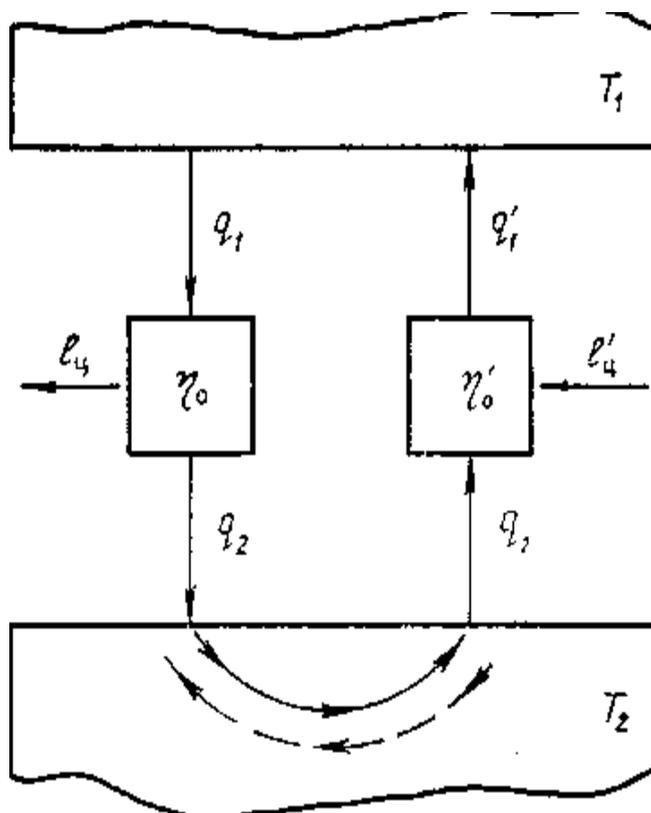


Рис. 1.11 Схема работы машин в различных направлениях

Следовательно, предположение неверно и  $\eta_o = \eta'_o$ . Знак модуля для работы  $|l_u - l'_u|$  и теплоты  $|q_1 - q'_1|$  учитывает оба возможных случая:  $\eta_o > \eta'_o$  и  $\eta_o < \eta'_o$ .

Конечно, две рассматриваемые машины Карно могут быть настолько различными, что  $q_2 \neq q'_2$ . В этом случае сравнение необходимо производить не

для одного цикла, а для одинакового количества теплоты  $Q_2$ , которое первая машина «нарабатывает» за  $m$  циклов, а вторая — за  $m'$  циклов. Если, например,  $q_2/q'_2 = 0.12345$ , то  $m' = 12\,345$ , а  $m = 100\,000$ .

Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (см. рис. 3.4). Однако при доказательстве теоремы Карно используется лишь факт наличия изотерм, связанных с горячим и холодным источниками теплоты. Процессы  $bc$  и  $da$ , вообще говоря, не обязательно должны быть адиабатными. Можно, например, отобрать часть теплоты в процессе расширения  $bc$ , это позволяет уменьшить максимальный объем цикла  $v_c$ . Отобранную теплоту можно подвести к рабочему телу в процессе сжатия  $da$ , уменьшив тем самым количество затрачиваемой на сжатие работы. Такое внутреннее перераспределение теплоты в цикле, не затрагивающее внешние источники, называют регенерацией, а сам цикл — *регенеративным*. Если неадиабатные процессы  $bc$  и  $da$  обратимы, то термический КПД регенеративного цикла равен КПД цикла Карно и определяется по формуле (3.10). Поэтому теорему Карно формулируют и так: любой обратимый тепловой двигатель, работающий с источниками теплоты, имеющими температуры  $T_1$  и  $T_2$  обладает термическим КПД  $\eta_o = 1 - (T_2 / T_1)$ .

Как уже отмечалось, цикл Карно появился как результат поисков принципа действия наиболее, совершенного теплового двигателя. Однако значение цикла Карно значительно шире. Приведенные формулировки второго закона термодинамики имеют сугубо качественный характер и формула для  $\eta_o$  является первой количественной зависимостью, связанной со вторым законом; наиболее естественно сравнение формулы  $\eta_o = 1 - T_2 / T_1$  с формулировкой Томсона—Планка: при  $T_2 = T_1$  имеем  $\eta_o = 0$ , что означает невозможность получения работы от одного теплового источника; при  $T_2 \rightarrow 0$  или  $T_1 \rightarrow \infty$  имеем  $\eta_o = 1$  что означает полное превращение теплоты в работу и также невозможно. Последовательное развитие идей С. Карно в направлении количественного описания второго закона позволило Р. Клаузиусу ввести новую функцию состояния — энтропию и дать уравнение второго закона термодинамики.

## Энтропия

Ранее указывались два случая необратимости: трение при адиабатном расширении или сжатии и теплообмен при конечной разности температур. Исключение этих двух случаев необратимости позволяет получить обратимый цикл Карно. Вообще, обратимый цикл — это цикл, составленный из обратимых процессов. *Любой обратимый цикл можно заменить совокупностью элементарных циклов Карно*; для этого используется сетка изотерм и адиабат.

Использовавшаяся ранее координатная сетка на  $p$ — $v$ -диаграмме удобна для подсчета работы (см. рис. 1.8). Этот подсчет для цикла может быть произведен двумя способами. Один из них представлен формулой (1.36) и состоит в суммировании элементарных работ вдоль ломаной, приближенно представляющей кривую цикла; удобство подсчета состоит в том, что на каждом вертикальном отрезке ломаной (элементарной изохоре) работа равна нулю. При бесконечном сгущении сетки работа цикла выражается криволинейным интегралом вдоль цикла;  $l_u = \oint dl$ . Второй способ подсчета работы состоит в том, что интегрирование вдоль кривой заменяют интегрированием по площади. Термодинамический смысл последней операции состоит

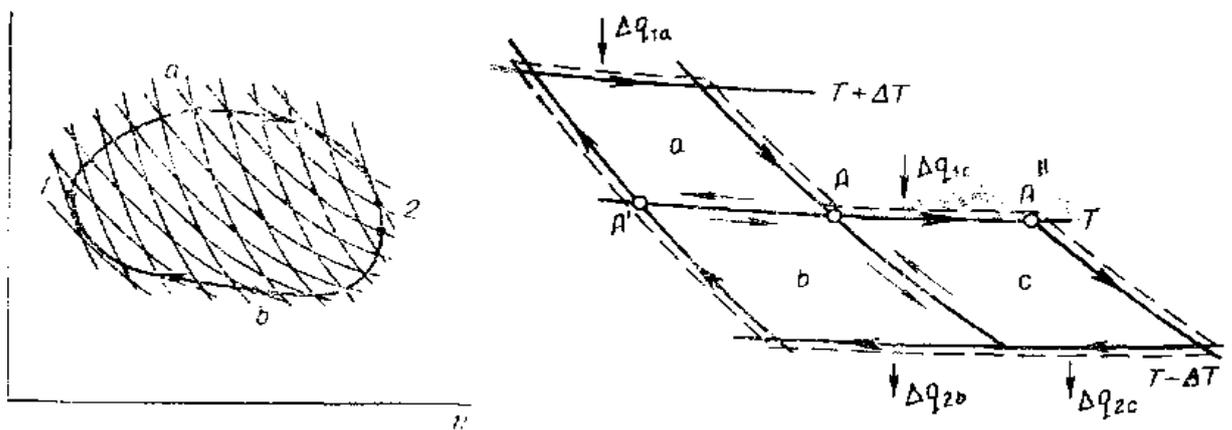


Рис.1.12 Сетка адиабат и изотерм

в замене исследуемого цикла множеством элементарных циклов, каждый из которых представляет собой просто клетку координатной сетки со сторонами  $dp$  и  $dv$ .

Представленная на рис. 1.12 сетка адиабат и изотерм удобна для подсчета теплоты. Действительно, кривую цикла  $1a2B$  можно приближенно заменить ломаной, составленной из отрезков элементарных изотерм и адиабат. При суммировании элементарных количеств теплоты вдоль такой ломаной на всех элементарных адиабатах эти количества теплоты равны нулю. Можно использовать и второй способ: находить теплоту цикла интегрированием по площади. Термодинамический смысл такого интегрирования состоит в том, что рассматриваемый цикл заменяется совокупностью элементарных циклов Карно, представляющих собой клетки нанесенной на плоскость сетки изотерм и адиабат. Три таких клетки в увеличенном виде представлены на рис. 3.6. Легко показать, что сумма теплоты трех элементарных циклов а, б и с равна теплоте окаймляющего цикла, показанного пунктирной линией. Действительно, поскольку

$$\Delta q_{ц,а} = \Delta q_{1а} - \Delta q_{2а}; \quad \Delta q_{ц,б} = \Delta q_{1б} - \Delta q_{2б}; \quad \Delta q_{ц,с} = \Delta q_{1с} - \Delta q_{2с},$$

то, суммируя три приведенных равенства, имеем

$$\Delta q_{ц,а} + \Delta q_{ц,б} + \Delta q_{ц,с} = \Delta q_{1а} + \Delta q_{1с} - \Delta q_{2б} - \Delta q_{2с}. \quad (1.46)$$

Такой результат получается при разбиении любого произвольного обратимого цикла на элементарные циклы Карно, так как элементарные количества теплоты на смежных изотермах (например,  $\Delta q_{2а}$  и  $\Delta q_{1б}$ ) равны по модулю и имеют противоположные знаки. Таким образом, суммирование элементарных количеств теплоты по изотермам окаймляющей ломаной (интегрирование по контуру) и суммирование теплоты элементарных циклов Карно (интегрирование по площади) эквивалентны для произвольного обратимого цикла.

Координатная сетка  $p$ - $v$ -диаграммы равномерна, это значит, что  $1 \text{ см}^2$  на этой диаграмме соответствует определенная работа  $\Delta l_{ц}$ , кДж/кг, зависящая от масштабов на оси давления и на оси удельных объемов. Можно ли сделать сетку изотерм и адиабат равномерной? Как построить такую равномерную сетку в окрестности точки  $A$  (см. рис. 1.12)? Ясно, что соседние изотермы

должны отличаться на одинаковое приращение температуры  $\Delta T$ . Равномерное распределение адиабат можно установить из условия одинаковости теплоты всех элементарных циклов Карно:  $\Delta q_{u,a} = \Delta q_{u,b} = \Delta q_{u,c} = \Delta q_u$ . В этом случае количества подводимой теплоты для окаймляющего цикла (пунктирная линия на рис. 1.12) равны:

$$\Delta q_{1a} = \frac{\Delta q_u}{\eta_{o,a}} = \Delta q_u \frac{T + \Delta T}{T}; \quad \Delta q_{1c} = \frac{\Delta q_u}{\eta_{o,c}} = \Delta q_u \frac{T}{\Delta T};$$

а количества отводимой теплоты определяются выражением

$$\Delta q_{2b} = \Delta q_{2c} = \Delta q_u \left( \frac{1}{\eta_{o,c}} - 1 \right) = \Delta q_u \left( \frac{T}{\Delta T} - 1 \right),$$

ибо  $\eta_{o,b} = \eta_{o,c}$ . Если просуммировать все элементарные количества теплоты в соответствии с правой частью уравнения (1.46), то получим, как и следовало ожидать,  $3\Delta q_u$ .

Если для элементарного цикла Карно известна подводимая теплота, то по формуле (1.43) можно определить соотношение между значениями удельного объема для крайних точек изотерм подвода теплоты; аналогично по формуле (1.44) определяется это соотношение для крайних точек изотермы отвода. Возьмем, например, изотерму со значением температуры  $T$  (см. рис. 1.12), для нее по формуле (1.43) имеем:

$$\Delta q_{1b} = RT \ln \frac{v_A}{v_{A'}} = RT (\ln v_A - \ln v_{A'}); \quad \Delta q_{1c} = RT (\ln v_{A''} - \ln v_A).$$

Таким образом, точки пересечения адиабат с изотермой  $T$  расположены относительно точки  $A$  так, что приращения натурального логарифма удельного объема одинаковы. Для построения равномерной одинаковы. Для построения равномерной сеть и изотерм и адиабат на  $p$ - $v$ -диаграмме необходимо, следовательно, вначале построить семейство изотерм, отличающихся на одинаковое приращение температуры (например, на  $1^\circ\text{C}$ ). На каждой изотерме затем отмечаются точки, расположенные через один и тот же интервал изменения

логарифма удельного объема  $\Delta(\ln v)$ . Через полученные точки проводятся адиабаты. Каждая клетка такой равномерной сетки есть элементарный цикл Карно с теплотой

$$\begin{aligned}\Delta q_u &= \Delta q_1 - \Delta q_2 = RT\Delta(\ln v) - R(T - \Delta T)\Delta(\ln v) = \\ &= R\Delta T\Delta(\ln v),\end{aligned}\tag{1.47}$$

которая, как следует из формулы (1.47), не зависит от положения клетки на диаграмме.

Все эти довольно громоздкие операции, связанные с построением равномерной сетки изотерм и адиабат на  $p$ - $v$ -диаграмме, приводят к неожиданно скромному практическому результату. Во-первых, теплоту произвольного обратимого цикла можно подсчитать только в том случае, если рабочим телом является идеальный газ, так как формулы (1.43) и (1.44) справедливы только в этом случае. Во-вторых, остается открытым вопрос о нахождении теплоты разомкнутого процесса (не цикла).

Все сказанное выше, однако, наводит на мысль решить проблему прямым путем: ввести наряду с  $p$ - $v$ -диаграммой новую систему координат, в которой сетка изотерм и адиабат является обычной прямоугольной координатной сеткой. Малый параллелограмм элементарного цикла Карно на  $p$ - $v$ -диаграмме в новой системе координат превратится в прямоугольник, а при надлежащем выборе масштабов осей — в квадрат, т.е. в элемент площади, выражающей теплоту. Разумеется, новая система координат должна давать такие же возможности для расчета теплоты замкнутого или разомкнутого процесса, как и  $p$ - $v$ -диаграмма для расчета работы в этих случаях. Это предполагает, что в новой системе координат можно построить линию процесса — совокупность точек, каждая из которых соответствует определенному термодинамическому состоянию.

Для введения новой системы координат необходимо знать величины, откладываемые по каждой оси. Относительно температуры имеется следующая информация: температура существует (нулевое начало термодинамики, см. пример 1.3), в определенном смысле универсальной является шкала газового

термометра, в качестве единицы измерения молено принять  $1\text{K} = 1^\circ\text{C}$ ; неясно пока только положение нуля, но можно принять и качестве нуля точку, получаемую экстраполяцией показаний термометра с идеальным газом в область низких температур, хотя такая экстраполяция (т.е. расширение действия определенной закономерности за пределы эксперимента, из которого получена эта закономерность) не имеет обоснования.

Что же касается второй величины для новой системы координат, то относительно нее ничего не известно (если не считать рассмотренной выше сетки изотерм и адиабат для идеального газа). Понятно, что эта величина должна принимать определенное значение для каждой адиабаты как температура — для изотермы, давление — для изобары, объем — для изохоры. Существует ли такая величина? Если да, то является ли она термодинамическим параметром, чтобы вместе с температурой определять термодинамическое состояние в новой системе координат? Как вычислить или измерить эту величину? Второй закон термодинамики дает возможность получить положительный ответ на все эти вопросы\*.

Для обратимого цикла Карно справедливы следующие соотношения (с учетом знака  $q_2$ ):

$$q_1 = q_u / \eta_o; |q_2| = q_1 - q_u = q_u(1 / \eta_o - 1).$$

Составим, следуя Р. Клаузиусу, отношение  $q_1 / |q_2|$ :

$$\frac{q_1}{|q_2|} = \frac{1}{\eta_o(1/\eta_o - 1)} = \frac{1}{1 - \eta_o} = \frac{1}{1 - (1 - T_2/T_1)} = \frac{T_1}{T_2},$$

или иначе:

$$q_1 / T_1 = |q_2| / T_2.$$

При суммировании элементарных количеств теплоты вдоль цикла следует учитывать знак теплоты; в прямом цикле Карно теплота  $q_2$  имеет отрицательное значение. С учетом этого получаем:

$$q_1 / T_1 + q_2 / T_2 = 0. \tag{1.48}$$

В то время как алгебраическая сумма элементарных количеств теплоты для цикла Карно равна теплоте цикла, алгебраическая сумма элементарных количеств *приведенной теплоты* (теплота, отнесенная к температуре соответствующей изотермы) равна нулю. Поскольку любой обратимый цикл эквивалентен совокупности элементарных циклов Карно, соотношение (1.48) можно распространить на произвольный обратимый цикл.

Покроем обратимый цикл произвольной формы на  $p$ - $v$ -диаграмме сеткой адиабат и изотерм (см. рис. 1.12). Для элементарного цикла Карно имеем:

$$q_{1i} / T_{1i} + q_{2i} / T_{2i} = 0.$$

Если количество клеток, покрывающих произвольный цикл, равно  $n$ , то справедливо и равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\Delta q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}}{T_{2i}} \right) = 0. \quad (1.49)$$

С другой стороны, в сумме (1.49) на всех смежных (внутренних) изотермах, разделяющих два соседних элементарных цикла, элементарные количества приведенной теплоты будут взаимно уничтожаться как равные по модулю, но противоположные по знакам; останутся, следовательно, лишь элементарные количества приведенной теплоты по внешней ломаной, приближенно заменяющей линию цикла (они отмечены индексом  $j$ ):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\Delta q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}}{T_{2i}} \right) = \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\Delta q_{1j}}{T_{1j}}.$$

Совершая предельный переход путем сгущения сетки, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\Delta q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}}{T_{2i}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\Delta q_{1j}}{T_{1j}} = \oint \frac{dq}{T} = 0.$$

где интеграл берется вдоль кривой цикла.

Таким образом, *интеграл Клаузиуса* для произвольного обратимого цикла равен нулю:

$$\oint \frac{dq}{T} = 0 \quad (1.50)$$

Выражение (1.50) означает, что стоящая под интегралом величина  $dq/T$  представляет собой полный дифференциал некоторой функции состояния

$$dq/T = ds \quad (1.51)$$

Эта функция состояния  $s$ , кДж/(кг·К), названа Клаузиусом *энтропией* (в переводе с греческого — эволюция, трансформация). Как и прочие функции состояния, энтропия полностью определяется состоянием термодинамической системы, а ее изменение не зависит от процесса перехода системы из начального состояния в конечное. Последнее утверждение прямо следует из формулы (1.50). Интеграл Клаузиуса можно представить в виде суммы двух интегралов (см. рис. 1.12):

$$\oint \frac{dq}{T} = \int_{1a2} \frac{dq}{T} + \int_{2b1} \frac{dq}{T}.$$

Поскольку

$$\int_{2b1} \frac{dq}{T} = - \int_{1b2} \frac{dq}{T}.$$

то имеем

$$\int_{1a2} \frac{dq}{T} = \int_{1b2} \frac{dq}{T} = \int_1^2 ds = s_2 - s_1 = \Delta s_{1-2},$$

т. е. приращение  $\Delta s_{1-2}$  одинаково для любого пути перехода.

При введении новой величины невольно возникают два вопроса: во-первых, насколько эта величина важна и необходима, какова ее практическая значимость; во-вторых, как пользоваться этой величиной, как ее рассчитывать. Отвечая на первый вопрос, отметим, что энтропия - крайне важная в термодинамике величина, позволяющая выразить второй закон количественно. Многочисленные примеры и иллюстрации этого положения содержатся в последующих пунктах и главах.

Что касается второго вопроса, то рассмотрим его подробнее.

Поскольку энтропия является параметром состояния, она может быть представлена как функция любых двух других параметров:

$$s = f_1(v, T); \quad s = f_2(p, T); \quad s = f_3(p, v).$$

Дифференциал энтропии, как функции двух переменных, определяется выражениями:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv; \quad (1.52)$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp; \quad (1.53)$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v dp; \quad (1.54)$$

С другой стороны, на основе первого закона и определения энтропии по формуле (1.51) имеем:

$$dq = Tds = du + pdv,$$

или с учетом выражения (1.16) для дифференциала внутренней энергии получим:

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] dv. \quad (1.55)$$

В примере 1.7 показано, что элемент  $p$ - $v$ -диаграммы  $dpdv$  имеет такую же площадь, что и элементарный цикл Карно в интервале температур  $dT$  с изменением объема  $dv$  в изотермическом процессе. На этом основании устанавливается связь между калорическим уравнением состояния  $u = u(v, T)$  и термическим уравнением состояния  $F(p, v, T) = 0$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p. \quad (1.56)$$

Подставляя выражение производной (1.56) в формулу (1.55), получаем

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{dp}{dT}\right)_v dv. \quad (1.57)$$

Конечное приращение энтропии в произвольном процессе изменения состояния вещества без фазовых превращений (кипение, конденсация) можно определить путем интегрирования выражения (1.57):

$$\Delta s_{1-2} = s_2 - s_1 = \int_1^2 ds = \bar{c}_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{dp}{dT}\right)_v dv. \quad (1.58)$$

Таким образом, для расчета приращения энтропии необходимо иметь данные по изохорной теплоемкости ( $\bar{c}_v$  — средняя в интервале от  $T_1$  до  $T_2$

изохорная теплоемкость) и располагать термическим уравнением состояния (или достаточно подробными таблицами пара метров  $p$ ,  $v$ ,  $T$  данного вещества).

Сравнивая формулы (3.22) и (3.17), получаем следующие выражения:

$$(\partial s / \partial T)_v = c_v / T; \quad (1.59)$$

$$(\partial s / \partial v)_T = (\partial p / \partial T)_v; \quad (1.60)$$

которые имеют самостоятельное значение в термодинамике, так как позволяют вместе с другими подобными выражениями устанавливать связи между различными термодинамическими свойствами вещества.

На практике для расчета изменения энтропии обычно используют соотношения, основанные на формуле (1.53). Если записать первый закон через энтальпию

$$dq = Tds = dh - vdp,$$

то с учетом выражения (2.19) имеем:

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{1}{T} [(\frac{\partial h}{\partial p})_T - v] dp. \quad (1.61)$$

Выражение для производной  $(dh/dp)_T$  можно получить из формулы (1.56), если подставить в левую часть  $u = h - pv$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} [\frac{\partial}{\partial v} (h - pv)]_T &= (\frac{\partial h}{\partial v})_T - v(\frac{\partial p}{\partial v})_T - p = \\ &= (\frac{\partial h}{\partial p})_T (\frac{\partial p}{\partial v})_T - v(\frac{\partial p}{\partial v})_T - p \end{aligned}$$

или

$$(\frac{\partial h}{\partial p})_T = T(\frac{\partial p}{\partial T})_v (\frac{\partial v}{\partial p})_T + v. \quad (1.62)$$

Выражение (1.62) можно упростить следующим образом. На основе уравнения состояния вещества  $p = p(v, T)$  имеем:

$$dp = (\frac{\partial p}{\partial T})_v dT + (\frac{\partial p}{\partial v})_T dv. \quad (1.63)$$

Формулу (1.63) можно записать и в другом виде. Пусть  $dp = 0$  (или  $p = const$ ). Разделим выражение (1.63) на  $dT$  с учетом этого условия. Поскольку отношение дифференциала удельного объема  $dv$  к дифференциалу температуры

$dT$  при условии  $p = const$  есть по смыслу частная производная  $(dv/dT)_p$ , то получаем:

$$(\partial p/\partial T)_v + (\partial p/\partial v)_T (\partial v/\partial T)_p = 0$$

или

$$(\partial p/\partial v)_T (\partial v/\partial T)_p (\partial T/\partial p)_v = -1 \quad (1.64)$$

Обратим внимание на то, что соотношение (1.64) получено как следствие существования уравнения состояния  $F(p, v, T) = 0$ . Не следует полагать, будто выражение (1.64) справедливо лишь при условии  $p = const$ ; это соотношение симметрично относительно всех трех параметров и его можно получить также, исходя из уравнения  $v = v(p, T)$  или  $T = T(p, v)$ . Разумеется, если взять уравнения состояния в виде  $u = u(v, T)$  или  $s = s(v, T)$ , то получатся соотношения типа (1.64).

Совместное рассмотрение выражений (1.64), (1.62) и (1.61) дает:

$$(\partial h/\partial p)_T = v - T(\partial v/\partial T)_p \quad (1.65)$$

и

$$ds = (c_p/T)dT - (\partial v/\partial T)_p dp \quad (1.66)$$

Для конечного приращения энтропии имеем:

$$\Delta s_{1-2} = s_2 - s_1 = \int_1^2 ds = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp. \quad (1.67)$$

Аналогично выражениям (1.59) и (1.60) из выражении (1.66) и (1.67) имеем:

$$(\partial s/\partial T)_p = c_p/T \quad (1.68)$$

$$(ds/dp)_T = -(\partial v/\partial T)_p \quad (1.69)$$

Что касается формулы (1.54), то производные энтропии в ней также можно выразить через теплосемкости и параметры  $p, v, T$ .

Расчет энтропии существенно упрощается, если речь идет об идеальном газе. В этом случае производные в формулах (1.57) и (1.66) определяют по уравнению Клапейрона  $p v = RT$  и получают следующие выражения:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}; \quad (1.70)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}. \quad (1.71)$$

Используя уравнение Клапейрона в дифференциальной форме

$$dp/p + dv/v = dT/T,$$

а также формулу Майера  $c_p - c_v = R$ , можно получить третье выражение для  $ds$  [аналог формулы (1.54)]:

$$ds = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}. \quad (1.72)$$

Конечное приращение энтропии в произвольном процессе изменения состояния идеального газа может быть найдено интегрированием выражений (1.70) — (1.72):

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}; \\ s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}; \\ s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{p_2}{p_1}; \end{aligned} \quad (1.73)$$

Из формул (1.70) — (1.73) следует, что существование энтропии для идеального газа можно доказать весьма просто. Для этого нужно лишь непосредственной проверкой убедиться в том, что величина

$$dq/T = (c_v dT + p dv)/T$$

является полным дифференциалом. Вводя обозначения  $k = c_p/c_v$  из формулы (1.72) имеем:

$$ds = c_v \left( \frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} \right) = c_v d[\ln(pv^k)]$$

или

$$s_2 - s_1 = c_v (\ln p_2 v_2^k - \ln p_1 v_1^k).$$

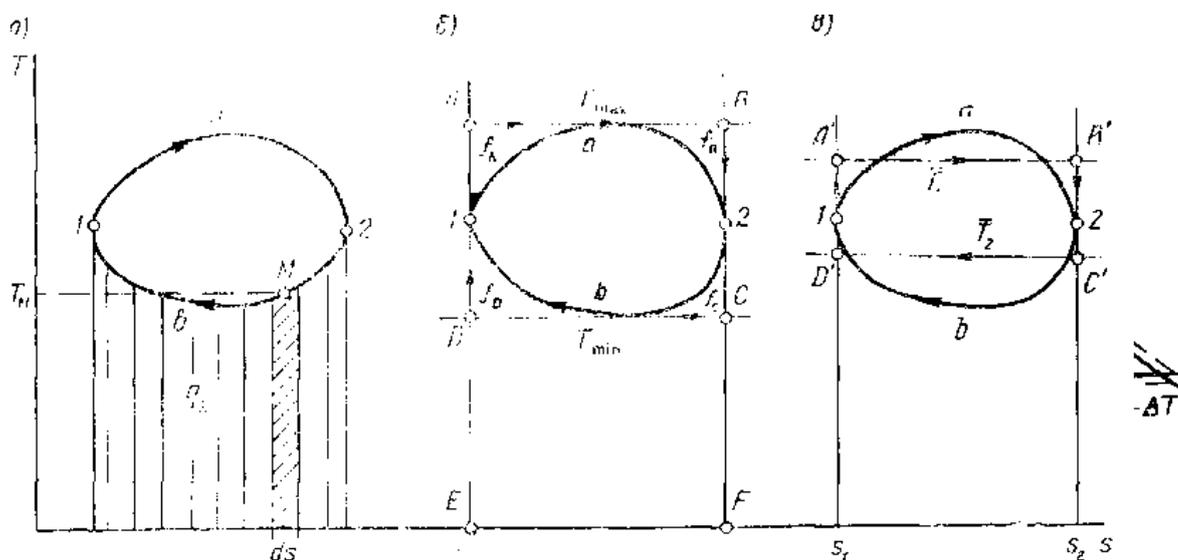


Рис. 1.13  $T$ - $s$ -диаграмма

Известно, что величина  $pv^k$  имеет одно и то же значение для всех точек адиабаты; из двух последних формул видно, что энтропия идеального газа обладает тем же свойством.

Вопрос о доказательстве существования энтропии для вещества с произвольным уравнением состояния рассматривается в примере 1.7.

Возвращаясь к вопросу о практической значимости энтропии, рассмотрим применение ее для геометрического представления некоторых важных положений термодинамики; следует отметить, что широкое применение диаграмм и графиков процессов в термодинамическом анализе весьма плодотворно и способствует ясности и наглядности исходных суждений и их доказательств.

Существование энтропии позволяет ввести так называемую тепловую диаграмму —  $T$ - $s$ -диаграмму (рис. 1.13). На оси ординат наносят значения термодинамической температуры от абсолютного нуля, на уровне  $T = 0$  К проводят ось абсцисс, которую снабжают масштабом энтропии  $s$ , кДж/(кг·К). Вопрос о начале отсчета энтропии решается третьим законом термодинамики. В технической термодинамике в подавляющем большинстве случаев представляет интерес приращение энтропии, поэтому начало отсчета на оси энтропии выбирают по соглашению (например, на энтропийных диаграммах

для воды считают, что  $s = 0$  при  $t = 0,01 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) или же такое начало отсутствует вообще. Однако это не мешает использовать главное свойство  $T$ - $s$ -диаграммы - теплота обратимого термодинамического процесса на ней определяется площадью под кривой процесса. Теплота элементарного процесса в окрестности точки  $M$  (рис. 1.13, а) равна  $dq = T_M ds$ . Теплота процесса  $2b1$  определяется интегралом

$$q_2 = \int_{2b1} dq = \int_{2b1} T ds, \quad (1.74)$$

который может быть вычислен, если известно уравнение процесса в переменных  $T, s$ , т. е. функция вида  $T = T(s)$ .

Равновесное состояние на  $T$ - $s$ -диаграмме изображается точкой аналогично тому, как это делается на  $p$ - $v$ -диаграмме; равновесный (обратимый) процесс изображается линией. Особенно просто в  $T$ - $s$ -диаграмме изображаются изотермический ( $T = const$ ) и адиабатный ( $s = const$ ) процессы. Изобарный и изохорный процессы изображаются кривыми линиями.

$T$ - $s$ -диаграмма позволяет простым способом оценить термодинамическую эффективность произвольного цикла. Для этого его нужно сравнить с циклом Карно, линии процессов которого являются касательными к рассматриваемому циклу (рис. 1.13,б). Из рисунка видно, что КПД цикла Карно, осуществляемого между максимальной  $T_{msx}$  и минимальной  $T_{min}$  температурами произвольного цикла  $1a2b1$ , всегда больше КПД последнего:

$$\eta_o = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{f_{DCFE}}{f_{ABFE}} > 1 - \frac{f_{DCFE} + f_D + f_C}{f_{ABFE} - f_A - f_B}. \quad (1.75)$$

Таким образом, КПД цикла Карно в интервале температур  $T_{msx} - T_{min}$  есть тот предел, к которому стремится КПД произвольного цикла, охватываемого циклом Карно, в этом смысле цикл Карно является эталонным. Термодинамическое совершенство произвольного цикла тем выше, чем больше так называемый коэффициент заполнения  $k_3$ :

$$k_3 = f_{1a2b1} / f_{ABCD}, \quad (1.76)$$

который для произвольного цикла меньше единицы, а для цикла Карно  $k_3 = 1$ .

Наконец, используя  $T$ - $s$ -диаграмму, можно осуществлять термодинамический анализ циклов на базе так называемых среднеинтегральных температур. Среднеинтегральная температура подвода теплоты  $\bar{T}_1$  для произвольного цикла  $1a2b1$  определяется из соотношения (рис. 1.13, в);

$$q_1 = \int_{1a2} T ds = \bar{T}_1 (s_2 - s_1),$$

а среднеинтегральная температура отвода теплоты  $\bar{T}_2$  - из соотношения:

$$q_2 = \int_{2b1} T ds = \bar{T}_2 (s_2 - s_1).$$

Термический КПД цикла  $1a2b1$  можно рассчитать по формуле

$$\eta = 1 - q_2 / q_1 = 1 - \bar{T}_2 / \bar{T}_1. \quad (1.77)$$

Таким образом, термический КПД произвольного цикла равен термическому КПД цикла Карно, осуществляемого в интервале температур  $\bar{T}_1 - \bar{T}_2$ .

### Понятие об эксергии

Важные положения в точных науках выражают, как правило, не только словами, но и в виде математической формулы. Так, первый закон термодинамики выражается формулой (1.8). Второй закон термодинамики, согласно которому все реальные самопроизвольные процессы в макроскопических системах необратимы, также имеет свое аналитическое выражение. Главной величиной в этом выражении является энтропия.

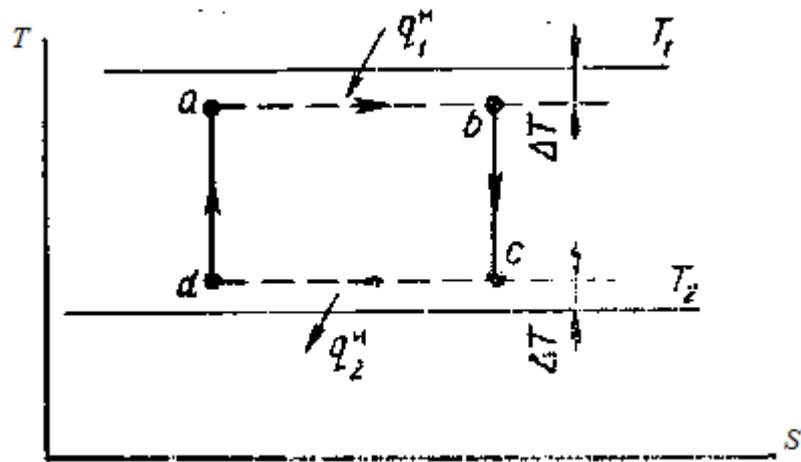


Рис. 1.14 Термический КПД необратимого цикла Карно.

Рассмотрим подробнее понятие необратимости. Проявления ее в различных процессах природы и техники весьма разнообразны. Поскольку здесь речь идет главным образом о взаимных превращениях теплоты и работы (как форм энергии, передаваемой от одного тела к другому при их взаимодействии), необратимость будем рассматривать в случаях: адиабатного расширения и сжатия при совершении работы против сил трения (внутренняя необратимость); передачи теплоты при конечной разности температур между телами, участвующими в теплообмене (внешняя необратимость).

Термический КПД необратимого цикла Карно меньше КПД аналогичного обратимого цикла. Будем учитывать лишь внешнюю необратимость: при подводе теплоты от горячего источника к рабочему телу и при отводе теплоты. Горячий источник с температурой  $T_1$  передает теплоту  $q_1''$  рабочему телу необратимо, т.е. под действием конечной разности температур  $\Delta T$  (рис. 1.14); максимальная температура в цикле соответствует необратимому изотермическому процессу, условно показанному пунктирной линией  $ab$ , и равна  $T_1 - \Delta T$ . С конечной разностью температур проходит и процесс  $cd$  отвода теплоты  $q_2''$ . Таким образом, необратимый цикл Карно осуществляется как бы в более узком диапазоне температур по сравнению с обратимым циклом, полный перепад температур между горячим и холодным источниками используется лишь частично. Это приводит к более низкому значению термического КПД:

$$\eta_o'' = 1 - \frac{T_2 + \Delta T}{T_1 - \Delta T} < 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_o.$$

Величину  $\eta_o''$  можно выразить и через значения теплоты необратимых процессов  $q_1''$  и  $q_2''$ ; тогда получим:

$$1 - (q_2'' / q_1'') < 1 - (T_2 / T_1)$$

или с учетом знаков значений теплоты

$$(q_1'' / T_1) + (q_2'' / T_2) < 0. \quad (1.78)$$

Таким образом, *сумма значений приведенной теплоты необратимого цикла Карно отрицательна.*

Произвольный необратимый цикл может быть представлен совокупностью необратимых элементарных циклов Карно. Для этого произвольный цикл необходимо покрыть сеткой изотерм и адиабат, причем в  $T$ - $s$ -диаграмме это прямоугольная координатная сетка. Каждая клетка представляет собой элементарный цикл Карно, а поскольку учитывается только внешняя необратимость (только при теплообмене с внешними горячими и холодными источниками, имеющими различную температуру в различных точках произвольного необратимого цикла), то внутренние клетки можно считать обратимыми элементарными циклами Карно. В этом случае для окаймляющих элементарных циклов Карно имеем

$$(q_{1i}'' / T_{1i}) + (q_{2i}'' / T_{2i}) < 0,$$

а для внутренних элементарных циклов

$$(q_{1i} / T_{1i}) + (q_{2i} / T_{2i}) < 0,$$

Производя суммирование значений приведенной теплоты для всех элементарных циклов, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\Delta q_{1i}^n}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}^n}{T_{2i}} + \frac{\Delta q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}}{T_{2i}} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{j=m} \left( \frac{\Delta q_{1i}^n}{T_{1i}} + \frac{\Delta q_{2i}^n}{T_{2i}} \right) < 0, \end{aligned}$$

где индексом  $j$  помечены необратимые элементарные циклы Карно па внешней ломаной, приближенно представляющей произвольный необратимый цикл. Пределом суммы при условии бесконечного сгущения сетки изотерм и адиабат является интеграл Клаузиуса:

$$\oint \frac{dq^n}{T} < 0, \quad (1.79)$$

где  $dq^n$  - теплота элементарного необратимого процесса;  $T$  — температура источника теплоты (теплопрнемника или теплоотдатчика).

Таким образом, *интеграл Клаузиуса для произвольного необратимого цикла отрицателен.*

Ввиду важности полученного результата рассмотрим данный вопрос с другой точки зрения, не связывая его решение с понятием цикла Карно. Пусть термодинамическая система (например, 1 кг газа находится в состоянии равновесия, имея контакт с источником теплоты заданной температуры  $T$ . Переведем систему в другое состояние равновесия, не нарушая контакта с источником теплоты; такой переход можно совершить двояким образом: обратимо (идеализированный бесконечно медленный процесс) и необратимо (реальный процесс). При обратимом переходе температура системы все время равна температуре источника  $T$ , процесс возможен в прямом и в обратном направлениях. При необратимом переходе между системой и источником возникает конечная разность температур, процесс в обратном направлении невозможен (ибо при этом  $\Delta T$  меняет знак). Для достаточно короткого процесса обратимого перехода по первому закону термодинамики имеем

$$dq = du + -dl;$$

для необратимого перехода первый закон (закон сохранения энергии), разумеется, также справедлив:

$$dq'' = du + dl''.$$

Поскольку начальное и конечное состояния для обоих рассматриваемых процессов одинаковы, величину  $du$  можно исключить из приведенных уравнений, так как и — параметр состояния и от процесса изменение и не зависит. В этом случае получаем:

$$dq'' - dq = dl'' - dl. \quad (1.80)$$

С математической точки зрения левая и правая части выражения (1.80) могут быть равны нулю, положительны или отрицательны. В соответствии со вторым законом термодинамики обе части выражения (1.80) могут принимать только отрицательные значения, т.е. всегда

$$dq'' < dq; \quad dl'' < dl.$$

Два оставшихся варианта невозможны: при  $dq'' = dq$  и  $dl'' = dl$  исчезает различие между обратимым и необратимым процессами, а при  $dq'' > dq$  и  $dl'' > dl$  становится возможным получение работы за счет теплоты только одного источника (вечный двигатель второго рода). Действительно, рассмотрим цикл, составленный из необратимого процесса, проходящего из состояния 1 в состояние 2 (разрешенное направление для необратимого процесса), и обратимого процесса в направлении 2-1 (для обратимого процесса оба направления являются разрешенными). Если  $dl'' > dl$ , то в результате совершения указанного цикла производится положительная работа  $(dl'' - dl)$  за счет положительной теплоты  $(dq'' - dq)$  от *одного* источника. Если бы термодинамическая система не возвращалась в исходное состояние, то противоречия со вторым законом не возникало бы: например, при изотермическом расширении идеального газа подводимая теплота полностью переходит в работу. Однако вернуть систему в исходное состояние без второго

источника теплоты невозможно, ибо это противоречит второму закону термодинамики. Поэтому и неравенства  $dq'' > dq$  и  $dl'' > dl$  не выполняются.

Таким образом, теплота  $dq''$  элементарного необратимого изотермического процесса при температуре  $T$  источника теплоты меньше теплоты  $dq$  идущего в том же направлении обратимого изотермического процесса. Разделив обе теплоты на температуру  $T$  источника теплоты, получим:

$$dq'' / T < dq / T. \quad (1.81)$$

В правой части неравенства (1.81) вместо температуры источника можно использовать равную ей температуру термодинамической системы (рабочего тела), в левой части температура  $T$  источника отливается от температуры термодинамической системы на  $\Delta T$ .

Неравенство (1.81) легко сопоставить с неравенством (1.79), если в последнем заменить нуль интегралом Клаузиуса для обратимого цикла:

$$\oint \frac{dq''}{T} < \oint \frac{dq}{T}. \quad (1.82)$$

Следовательно, теплота необратимого процесса, разделенная на температуру источника теплоты, меньше теплоты обратимого процесса не только по отношению к циклу в целом, но и для каждой точки, в которой отмечается внешняя необратимость.

Как было установлено ранее, величина  $dq/T$  для обратимого процесса представляет собой дифференциал энтропии  $ds$ . Объединяя равенство  $dq/T = ds$  и неравенство (1.81), получаем аналитическое выражение второго закона термодинамики в форме:

дифференциальной

$$ds \geq dq / T, \quad (1.83)$$

интегральной

$$s_2 - s_1 \geq \int_1^2 \frac{dq}{T}. \quad (1.84)$$

Выражение (1.83) эквивалентно выражениям: для обратимых процессов

$$ds = dq/T;$$

для необратимых процессов

$$ds > dq'' / T.$$

Изменение энтропии в левой части выражения (1.84), разумеется, не зависит от процесса, для которого вычисляется правая часть и который может быть обратимым (произвольной формы) или необратимым. При вычислении  $s_2 - s_1$  используется удобный для расчета обратимый переход из состояния 1 в состояние 2, составляемый из двух процессов [см. формулы (1.57), (1.66), (1.73)].

Аналитическое выражение второго закона получено на основании анализа термодинамической системы, обменивающейся с внешней средой энергией как в форме теплоты, так и в форме работы. При этом именно энергообмен в форме теплоты был источником так называемой внешней необратимости. Но ведь существует и внутренняя необратимость, которая в чистом виде проявляется при отсутствии теплообмена с внешними источниками.

Природа внутренней необратимости связана с уже высказанным ранее положением: работа может быть превращена в теплоту полностью, теплота в работу — лишь частично. Например, работа, совершаемая против сил трения, полностью переходит в теплоту. В реальной адиабатной системе, осуществляющей энергообмен с внешней средой в форме работы, существует трение, приводящее к возникновению внутренних тепловых явлений. А там, где речь заходит о теплоте, неизменно появляется и энтропия.

Если теплота поступает в систему из внешней среды через границу, то говорят о переносе теплоты и об одновременном переносе энтропии. В адиабатную систему с непроницаемой для теплоты границей энтропия извне не поступает и поэтому здесь говорят о производстве энтропии. Производство

энтропии в адиабатной системе обусловлено двумя причинами: нарушением равновесия и диссипативными эффектами.

Если изменение состояния адиабатной системы происходит бесконечно медленно (равновесно), то изменения энтропии системы нет, производство энтропии равно нулю. Из первого закона термодинамики следует:

$$dq = du + pdv = 0; \quad du = -pdv, \quad (1.85)$$

т.е. изменение внутренней энергии равно работе, взятой с обратным знаком. Равновесный процесс в адиабатной системе можно представить в виде линии на  $u$ - $v$ -диаграмме (рис. 1.15), дифференциальное уравнение этой линии, согласно выражению (1.85), таково:

$$(\partial u / \partial v)_s = -p. \quad (1.86)$$

Постоянство энтропии в равновесном адиабатном процессе следует из определения изменения энтропии в равновесных (обратимых) процессах ( $ds = dq / T = 0$ ;  $s = const$ ) и отмечается индексом  $s$  у

Частной производной в формуле (1.86). Таким образом линия  $AB$  на рис. 1.15 соответствует уравнению (1.86) и условию  $s = const$ .

Пусть теперь состояние адиабатной системы изменилось с нарушением ее равновесия, например, произошло резкое сжатие некоторой части системы, при этом оставшаяся часть этим возмущением не была затронута. Температура сжатой части повысилась до  $T + \Delta T$ , температура невозмущенной части осталась равной  $T$ .

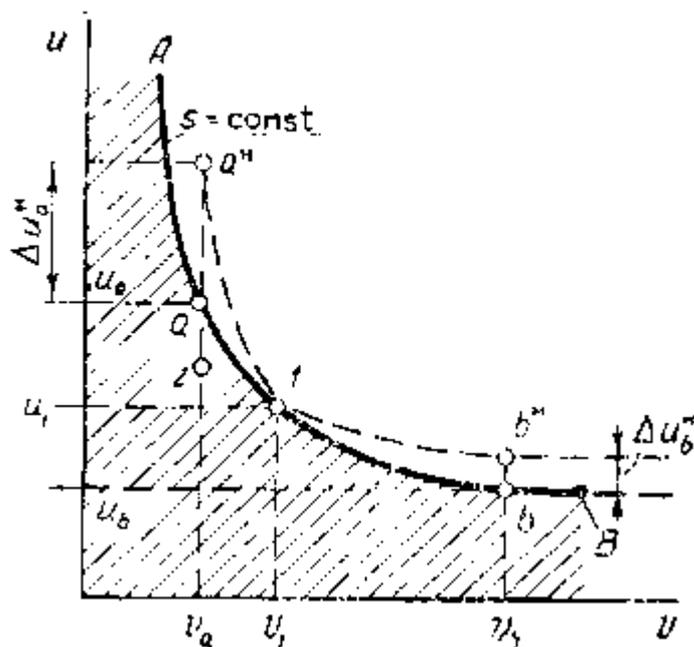


Рис. 1.15  $u$ - $v$ -диаграмма

После возмущения система устремится к новому состоянию равновесия с более высоким значением внутренней энергии  $u$ . При этом распределение внутренней энергии в системе будет выравниваться за счет теплообмена между сжатой и невозмущенной частями при конечной разности температур  $\Delta T$ . Энтропия всей системы при таком необратимом процессе возрастет. Действительно, уменьшение энтропии, отдающей теплоту сжатой части системы, равно  $dq/(T + \Delta T)$ , а увеличение энтропии, воспринимающей теплоту невозмущенной части, равно  $dq/T$ . Результирующее изменение энтропии всей системы является величиной положительной. Таким образом, согласно выражению(1.87), в результате внутреннего перераспределения  $u$  путем теплообмена: конечной разностью температур энтропия адиабатной системы возрастает.

$$ds = ds' + ds'' = -\frac{dq}{T + \Delta T} + \frac{dq}{T} = \frac{\Delta T}{T(T + \Delta T)} dq \quad (1.87)$$

Сопоставим рассмотренный процесс с  $u$ - $v$ -диаграммой. Исходное состояние равновесия — точка 1 (см. рис. 1.15); в результате сжатия объем уменьшается и, согласно уравнениям (1.85), внутренняя энергия возрастает. Если бы процесс сжатия был равновесным, то все состояния такого процесса

располагались бы на линии  $AB$  и он мог бы окончиться, например, в точке  $a$ . При этом была бы совершена работа  $l_{1-a} = -(u_a - a_1)$ , энтропия не изменилась бы:  $s_a = s_1$ . В результате неравновесного сжатия (или расширения, при этом  $ds = \frac{\Delta T}{T(T - \Delta T)} dq$ ) энтропия системы возрастает и, следовательно, ее конечное значение больше  $s_a$ ; в связи с этим конечное состояние системы после неравновесного процесса не совпадает с состоянием в точке  $a$ , но лежит на вертикали, соответствующей объему  $v_a$ . Стало быть, конечное состояние после неравновесного сжатия может соответствовать либо точке  $a''$ , либо точке  $z$ .

Согласно второму закону термодинамика точка  $z$  лежит в области абсолютной адиабатической недостижимости и такое состояние для рассматриваемой адиабатной системы невозможно.

Испытаем точку  $z$  на пригодность в качестве точки конечного состояния процесса неравновесного сжатия. Изменение энтропии в процессе  $1-z$  не зависит от формы процесса перехода, а также от того, является ли он равновесным или нет. Это изменение равно

$$\Delta s_{1-z} = \Delta s_{1-a} + s_{a-z} = \Delta s_{a-z} = \int_a^z \frac{du + pdv}{T} = \int_a^z \frac{du}{T},$$

т.е. изменению энтропии в изохорном процессе  $a-z$ , для которого  $ds = du/T = 0$ . Таким образом, если бы процесс неравновесного сжатия заканчивался в точке  $z$ , то энтропия системы уменьшилась бы. Однако, согласно выражению (1.87), энтропия должна возрасть; названное выражение есть прямое следствие второго закона — в его основе лежит формулировка Клаузиуса (теплота распространяется в сторону уменьшения температуры), оно учитывает факт существования энтропии и принцип ее возрастания. Следовательно, по второму закону состояние  $z$  адиабатически недостижимо. Совокупность таких состояний образует область, показанную на рис. 1.15 штриховкой.

Что касается точки  $a''$ , то она может быть конечным состоянием неравновесного сжатия, ибо возрастание энтропии  $\Delta s_{a-a''}$  не противоречит выражению (1.87). Точка  $a''$  лишь не может быть достигнута равновесным (обратимым) путем, она обладает *относительной* адиабатической недостижимостью.

Нетрудно показать, что энергетические превращения типа работа - изменение внутренней энергии для адиабатной системы выгоднее всего осуществлять равновесным (обратимым) путем, т. е. безным (обратимым) путем, т. е. без производства энтропии. При этом необходимо учитывать, что, «гласно первому закону термодинамики, работа равна изменению внутренней энергии с обратным знаком как для равновесного, так и для неравновесного процесса. Ниже приведены соотношения для работы в обратимых и необратимых процессах для адиабатной системы (обозначения см. на рис. 1.15):

Процесс	обратимый	необратимый
Сжатие	$l = -\Delta u_{1-a} < 0$	$l'' = -(\Delta u_{1-a} + \Delta u_a'') < 0$
Расширение	$l = -\Delta u_{1-b} > 0$	$l'' = -(\Delta u_{1-b} + \Delta u_b'') > 0.$

Обусловленные необратимостью величины  $\Delta u_a''$  и  $\Delta u_b''$  считаются положительными, при вычислении  $\Delta u$  для необратимых процессов использованы обратимые переходы  $1aa''$  и  $1bb''$ . Приведенные соотношения показывают, что в любом случае работа обратимого (равновесного) процесса больше:  $l > l''$ .

Подводя итог, отметим, что, согласно второму закону термодинамики, как теплота, так и работа обратимого процесса всегда больше этих величин для аналогичного необратимого процесса. Приведенный выше анализ подтверждает этот вывод применительно к системе, имеющей тепловое и механическое взаимодействие с окружающей средой, а также к адиабатной системе, взаимодействующей с окружающей средой только механически. Сказанное

справедливо и для изолированной системы, а также для немеханических видов работы, когда объем системы не изменяется.

Первый закон термодинамики применительно к элементарному необратимому процессу выражается соотношением

$$dq'' = du + dl''.$$

Второй закон термодинамики утверждает:

$$dq'' < dq = Tds.$$

Объединяя оба соотношения, получаем *основное термодинамическое неравенство*:

$$Tds > du + dl'', \quad (1.88)$$

которое для обратимых процессов превращается в равенство

$$Tds = du + dl, \quad (1.89)$$

Выражения (1.88) и (1.89) часто записывают совместно, получая объединенное аналитическое выражение первую и второго законов термодинамики для обратимых и необратимых процессов:

$$Tds \geq du + dl, \quad (1.90)$$

Для адиабатных систем, в которых совершаемая работа равна взятому с обратным знаком приращению внутренней энергии для любого процесса (обратимого или необратимого), правая часть выражения (3.56) равна нулю; поскольку  $T \neq 0$ , имеем:

$$ds \geq 0, \quad (1.91)$$

$$s_2 - s_1 \geq 0. \quad (1.92)$$

Таким образом, энтропия адиабатной (или изолированной) системы не может убывать: при обратимых процессах она сохраняет свое значение неизменным, в реальных системах энтропия всегда возрастает.

С последним обстоятельством связано известное высказывание Клаузиуса: «Энергия мира постоянна. Энтропия мира стремится к максимуму» (1856 г.),

выражающее мысль о стремлении Вселенной к термодинамическому равновесию («тепловой смерти»). Ф. Энгельс в «Диалектике природы» дал детальную и убедительную критику этого ошибочного тезиса, основанного на неправильной трактовке Вселенной как изолированной системы. Современные исследования, посвященные применению законов термодинамики к различным моделям Вселенной и связанные, например, с общей теорией относительности, также не подтверждают вывода о стремлении Вселенной к термодинамическому равновесию.

Закон возрастания энтропии, выражаемый неравенствами (1.91) и (1.92), позволяет использовать энтропию для количественной оценки степени необратимости; для неадиабатных систем используются неравенства (1.83) и (1.84). На этом основаны методы анализа термодинамической эффективности различных устройств преобразования энергии. В последние десятилетия получил распространение удобный метод анализа технических систем, в основе которого лежит понятие *эксергии*.

Пусть термодинамическая система (например, 1 кг газа) с параметрами  $p_1$ ,  $T_1$  находится в окружающей среде с параметрами  $p_0$ ,  $T_0$ ; для определенности будем полагать, что  $p_1 > p_0$  и  $T_1 > T_0$  (хотя это не влияет на общность результата). Позволим системе расширяться и охлаждаться. Система будет совершать работу до тех пор, пока не придет в равновесие с окружающей средой:  $p = p_0$ ,  $T = T_0$ , где  $p$ ,  $T$  - изменяющиеся в процессе параметры системы. Максимальная работа была бы совершена в том случае, если бы переход совершался обратимо. Реальная работа, согласно второму закону, всегда меньше.

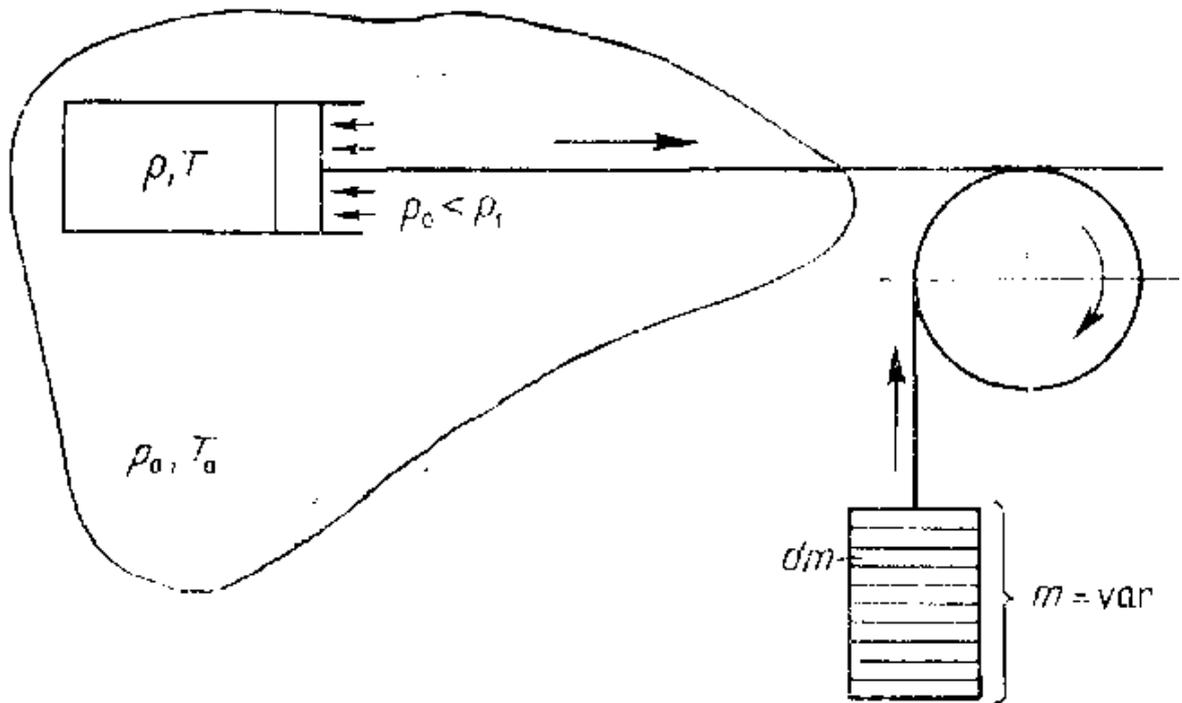


Рис. 1.16 Схема груза переменной массы

Определим максимальную работу. При этом необходимо учесть, что не вся работа изменения объема может быть использована, так как часть ее совершается против давления окружающей среды. Необходимо подсчитать, следовательно, полезную работу  $l_n$ , которая для элементарного обратимого процесса равна  $dl_n = dq - dh$  или с учетом выражения (1.89)  $dl_n = Tds - dh$ . Обратимый переход системы из произвольного начального состояния в состояние равновесия с окружающей средой можно совершить двумя процессами: обратимым адиабатным расширением (сжатием) до температуры  $T_0$  и последующим изотермическим отводом (подводом) теплоты при бесконечно малой разности температур  $T - T_0 \rightarrow 0$ ; равновесность второго процесса очевидна, в первом же процессе имеет место конечная разность давлений  $p - p_0$ . Для снятия этого ограничения необходимо соединить с расширяющейся системой устройство, воспринимающее полезную работу, например груз переменной массы (рис. 1.16). В начальный момент  $p_1 = p_0 + p_m$ , где  $p_m$  - давление от действия груза. Процесс расширения начинается сбрасыванием бесконечно малой массы  $dm$ , так как  $p > p_0 + p_m - dp_m$ , и продолжается равновесно до

конечного состояния, которое определяется условием  $T = T_0$ . В общем случае в процессе адиабатного расширения роль  $dm$  может изменяться, поскольку конечное давление адиабатного расширения  $p_a$  может быть как больше, так и меньше  $p_0$ . Максимальная полезная работа равна:

$$l_n = \int_{p_1, T_1}^{p_{01}, T_0} dl_n = \int_{p_1, T_1}^{p_{01}, T_0} (Tds - dh).$$

Приведенный в правой части интеграл равен сумме четырех интегралов (а—промежуточное состояние):

$$\begin{aligned} s_1 = s_a = \text{const} : \int_1^a Tds = 0; \quad -\int_1^a dh = h_1 - h_a; \\ T_o = T_a = \text{const} : \int_a^0 Tds = T_0(s_0 - s_a) = T_0(s_0 - s_1); \\ -\int_a^0 dh = h_a - h_0. \end{aligned}$$

После суммирования получаем следующее выражение:

$$l_n = (h_1 - h_0) - T_0(s_1 - s_0). \quad (1.93)$$

Формула (1.93) выражает максимальную полезную работу через начальные параметры системы и параметры окружающей среды. Для произвольного начального состояния с параметрами  $p$ ,  $T$  или  $h = h(p, T)$  и  $s = s(p, T)$  получаем функцию

$$e = (h - h_0) - T_0(s - s_0), \quad (1.94)$$

именуемую *эксергией потока* и определяемую параметрами состояния термодинамической системы и параметрами окружа; единица измерения эксергии - кДж/кг.

Для заданного состояния  $(h, s)$  значение эксергии равно максимальной полезной работе, которую способна совершить система, переходя обратимым путем на «нулевой уровень» (окружающая среда с параметрами  $p_0, T_0$ ). Этим объясняется прежнее название эксергии - работоспособность. Эффективность

технического устройства с точки зрения обратимости протекающих в нем процессов может быть определена сравнением фактически произведенной полезной работы с максимально возможной работой, рассчитываемой по изменению эксергии. Количественной характеристикой эффективности такого рода служит *эксергетический КПД*, который определяется следующим образом:

$$\eta_e = -l_{n,1-2}^h / (e_2 - e_1), \quad (1.95)$$

где  $l_{n,1-2}^h$  - фактическая полезная работа с учетом необратимости;  $e_1$  - эксергия потока на входе в техническое устройство;  $e_2$  - эксергии на выходе.

При обратимом протекании всех процессов  $\eta_e = 1$ . Минус учитывает уменьшение (исчезновение) эксергии по мере совершения работы.

Эксергетический анализ удобен при исследовании сложных технических устройств, в которых используется энергия в различных формах — работа, теплота, электроэнергия, энергия химических превращений и т. д. Обычно составляют эксергетический баланс в котором подсчитывают приход и расход эксергии потока вещества, теплоты, работы (механической или электрической). Важное значение, в частности, имеет *эксергия теплового потока*  $e_q$ .

Смысл эксергии теплового потока можно уяснить, если рассмотреть описанную ранее термодинамическую систему при начальных параметрах  $p = p_0 = const, T > T_0$ . При переходе системы в состояние равновесия с окружающей средой, который осуществляется при  $p = const$ , происходит как бы исключение механического взаимодействия через границу системы, главным становится тепловое взаимодействие, обусловленное преобладанием температуры системы  $T$  над температурой окружающей среды (в действительности  $dv \neq 0$  среда сжимает охлаждающуюся систему). Дифференциал эксергии по выражению (1.94) равен  $de = dh - T_0 ds$ , кроме того,  $T ds = dh - v dp$ , откуда

$$ds = \frac{1}{T} dh - \frac{v}{T} dp$$

или

$$de = \left(1 - \frac{T_o}{T}\right)dh + \frac{T_o}{T}vdp.$$

Поскольку  $p = const$ , то  $dp = 0$  и второе слагаемое равно нулю; по той же причине  $dh = dq_p$  — теплота изобарного процесса равна изменению энтальпии. Следовательно,

$$de = (1 - T_o/T)dq_p. \quad (1.96)$$

Выражение (1.96) показывает, что если от системы отвести теплоту  $dq_p$  на уровне температуры  $T$ , то эксергия потока для системы уменьшится на  $de$ . Температурный уровень, при котором отводится (или подводится) теплота, определяет «ценность» этой теплоты: если подвести теплоту при  $T \square T_o$ , то увеличение эксергии (т.е. работоспособности) будет значительным, если теплоподвод осуществляется при  $T = T_o$ , то эксергия не меняется:  $de = 0$ .

Выражение (1.96), справедливое только для процесса  $p = const$ , положено в основу понятия эксергии теплового потока  $e_q$ . Принято по определению, что выражение (1.96) по отношению к произвольному процессу дает изменение  $e_q$ , т. е.

$$de_q = (1 - T_o/T)dq; \quad (1.97)$$

для изобарного процесса, таким образом,  $de_q = de$ .

В отличие от эксергии потока  $e$  эксергия теплового потока  $e_q$  есть функция процесса, так как функцией процесса является теплота:

$$e_q = \int_1^2 \left(1 - \frac{T_o}{T}\right)dq = q_{1-2} - T_o(s_2 - s_1); \quad (1.98)$$

здесь использовано соотношение  $dq = Tds$ .

Таким образом, теплота  $q_{1-2}$  не может быть полностью превращена в полезную работу, равную в лучшем случае  $e_q$  (при обратимом превращении); для получения  $e_q$  от теплоты необходимо отбросите ее непревращающуюся в работу часть  $T_o(s_2 - s_1)$  - так называемую анергию.

На величину  $e_q$  можно взглянуть и с несколько иной точки зрения. Если в процессе 1-2 температура  $T=const$ , то, согласно формулам (1.97) и (1.98), имеем

$$e_q = (1 - T_o / T) q_{1-2}. \quad (1.99)$$

Выражение в скобках есть термический КПД обратимого цикла Карно, осуществляемого между теплоотдатчиком с температурой  $T$  и окружающей средой с температурой  $T_o$ , которая играет роль теплоприемника; в формуле (1.99) это выражение называют фактором Карно или эксергетической температурой.

Согласно формуле (1.99), доля теплоты, подводимой при температуре  $T$ , которая может быть превращена в максимальную полезную работу, определяется термическим КПД цикла Карно. Обратимый цикл Карно-единственный способ обратимого переноса теплоты с температурного уровня  $T$  на «нулевой» уровень окружающей среды  $T_o$ ; при этом можно получить максимальную работу.

В реальных технических устройствах процессы переноса теплоты часто осуществляются изобарно ( $p = const$ ). При этом нет необходимости подсчитывать величину  $e_q$  по формуле (1.98), ибо на основании формул (1.96) и (1.97)  $e_q = e_2 - e_1$ .

Если в анализируемом техническом устройстве (или в отдельном элементе такого устройства) не производится полезная работа, то эксергетический КПД определяется выражением

$$\eta_e = e_2 / e_1. \quad (1.100)$$

При обратимом протекании процессов потеря эксергии отсутствует и  $e_2 = e_1$  в этом случае  $\eta_e = 1$ , в реальных условиях  $\eta_e < 1$ , так как имеется потеря эксергии.

При вычислении эксергетического КПД по формуле (1.95) или (1.96) составляют баланс эксергии.

## 1.8 Реальные газы

Практика использования реальных газообразных рабочих тел показывает, что расчеты, проведенные на основании уравнения Клапейрона  $p\nu = RT$ , далеко не всегда дают достаточно точные результаты. Происходит это оттого, что реальные газы и пары обладают свойствами, выходящими за рамки модели идеального газа.

Наиболее отчетливо различие между идеальным и реальным газом проявляется при анализе зависимости так называемого коэффициента сжимаемости

$$Z = p\nu/RT$$

от давления  $p$  (рис. 1.17). Коэффициент сжимаемости всегда равен единице для идеального газа, отклонение  $Z$  от единицы характеризует степень отличия реального вещества от идеального газа. На рис. 1.17 представлены изотермы реального газа (без соблюдения масштаба). Видно, что изотермы для достаточно низких температур имеют минимум, при этом с повышением температуры минимум вначале смещается в область более высоких давлений, а затем в область более низких. Пунктирная линия, соединяющая точки минимумов различных изотерм, носит название «кривой Бойля». Точка пересечения кривой Бойля с осью ординат ( $p = 0$ ) является точкой минимума для изотермы с определенной для каждого газа температурой  $T_0$  (температура Бойля). У изотерм с более высокой температурой минимум отсутствует — при любом давлении коэффициент сжимаемости  $Z$  больше единицы. Экспериментально установленный закон Бойля — Мариотта для температуры  $T_0$  выполняется при низких давлениях:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_{T=T_0, p \rightarrow 0} = \frac{1}{RT} \left[\frac{\partial(p\nu)}{\partial p}\right]_{T=T_0, p \rightarrow 0} = 0$$

или

$$pv = const \text{ (при } T = T_B; \rho \rightarrow 0\text{)}.$$

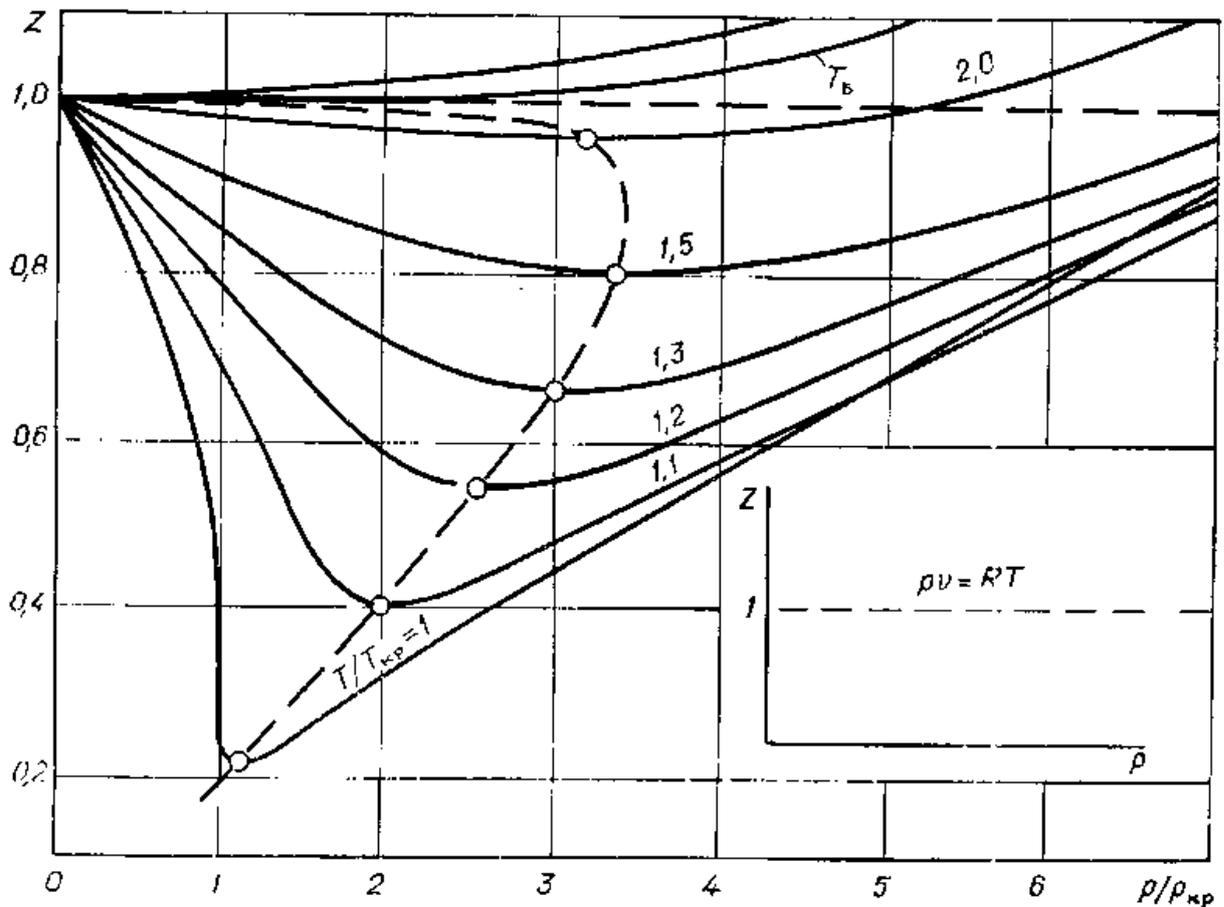


Рис. 1.17 Изотермы реального газа

Таким образом, задавшись определенной погрешностью, определяющей отклонение  $Z$  от единицы, можно установить интервал давлений  $0 \leq p \leq p_*$ , в котором газ может считаться идеальным; понятно, что такой интервал будет иметь максимальное значение для изотермы с  $T = T_B$ , поскольку эта изотерма касательна к линии  $Z = 1$ . Таким образом, закон Бойля — Мариотта лучше всего выполняется, если газ имеет температуру  $T_B$ .

Главной причиной отклонения изотерм реального газа от линии  $Z = 1$  является наличие сил взаимодействия между молекулами. Модель идеального газа представляет собой систему материальных точек, хаотически движущихся в пространстве и обменивающихся между собой количеством движения при соударениях; в реальном газе между молекулами действуют силы притяжения и силы отталкивания. Силы межмолекулярного взаимодействия имеют

электрическую природу, характер их весьма сложен. С увеличением расстояния между молекулами газа силы взаимодействия резко убывают. При этом особенно резко уменьшаются силы отталкивания:  $F_{от} \sim x^{-m}$ , где  $x$  - расстояние между молекулами (рис. 1.18), показатель  $m=9 \div 15$ . Для сил притяжения показатель  $m \approx 7$ . Поскольку силы притяжения и отталкивания действуют одновременно, результирующая сила  $F = F(x)$  равна их алгебраической сумме. С этой силой связан потенциал межмолекулярного взаимодействия, т.е. потенциальная энергия, численно равная работе результирующей силы  $du_n(x) = -F(x)dx$ . Знак «минус» устанавливается в соответствии с принятой моделью потенциального взаимодействия: при  $x \rightarrow \infty$  потенциальная энергия взаимодействия равна нулю, работа сил притяжения приводит систему в «потенциальную яму» — точка  $A$  на рис. 1.18,  $a$ ; работа внешних сил против сил отталкивания приводит к неограниченному возрастанию потенциальной энергии системы — ветвь  $AC$  на рис. 1.18,  $a$ .

Силы взаимодействия могут быть рассчитаны для пары молекул, если для данного газа известна кривая  $u_n = u_n(x)$ . Например, часто используется так называемый потенциал Леннарда — Джонса

$$u_n = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left( \frac{x_0}{x} \right)^6 \right], \quad (1.101)$$

где  $x_0$  - расстояние между молекулами, при котором потенциальная энергия равна нулю;  $\varepsilon$  - «глубина потенциальной ямы» (максимальная энергия притяжения).

Первое слагаемое в выражении (1.101) соответствует силам отталкивания  $F_{от}$ , второе — силам притяжения  $F_{пр}$ . Кроме потенциальной энергии взаимодействия молекул следует учитывать и кинетическую энергию, пропорциональную величине  $kT$  ( $k$  - постоянная Больцмана).

Проблемой исследования свойств макроскопических систем, находящихся в состоянии равновесия, на основании известных свойств образующих такие системы частиц занимается статистическая физика. Основная задача

заключается в том, чтобы описать поведение системы, содержащей весьма большое число частиц (например, 1 кг или 1 кмоль реального газа), по свойствам и законам движения отдельных молекул, которые считаются заданными. Поведение макроскопических систем определяется закономерностями особого рода статистическими закономерностями. Общие равновесные свойства системы (например, термодинамические параметры, характеризующие ее состояние) сравнительно мало зависят от конкретных свойств частиц и законов их взаимодействия. Это обстоятельство позволяет установить общие законы поведения систем и, в частности, законы теплового поведения макроскопических тел в состоянии равновесия; например, методами статистической физики можно теоретическим путем получить уравнение состояния (разумеется, в ограниченном числе случаев). Следует отметить, что последовательное применение статистических методов нельзя осуществить на основе классической механики движения частиц. Даже для описания движения сравнительно тяжелых частиц (молекул) в объеме макроскопической системы, когда, казалось бы, справедливы положения ньютоновской механики, приходится использовать теорию движения микрочастиц - квантовую механику. Таким образом, получение уравнения состояния реальных газов теоретическим путем в принципе возможно, но для большинства практически важных случаев связано с непреодолимыми трудностями. Однако теория позволяет обосновать общий вид уравнения состояния.

Термическое уравнение состояния реального газа  $F(p, v, T) = 0$  можно представить в виде  $p = p(v, T)$  или, умножив обе части на удельный объем  $v$ , в виде:

$$pv = vp(v, T) = f_o(v, T) = f(\rho, T),$$

где  $\rho$  — плотность,  $p = l/v$ .

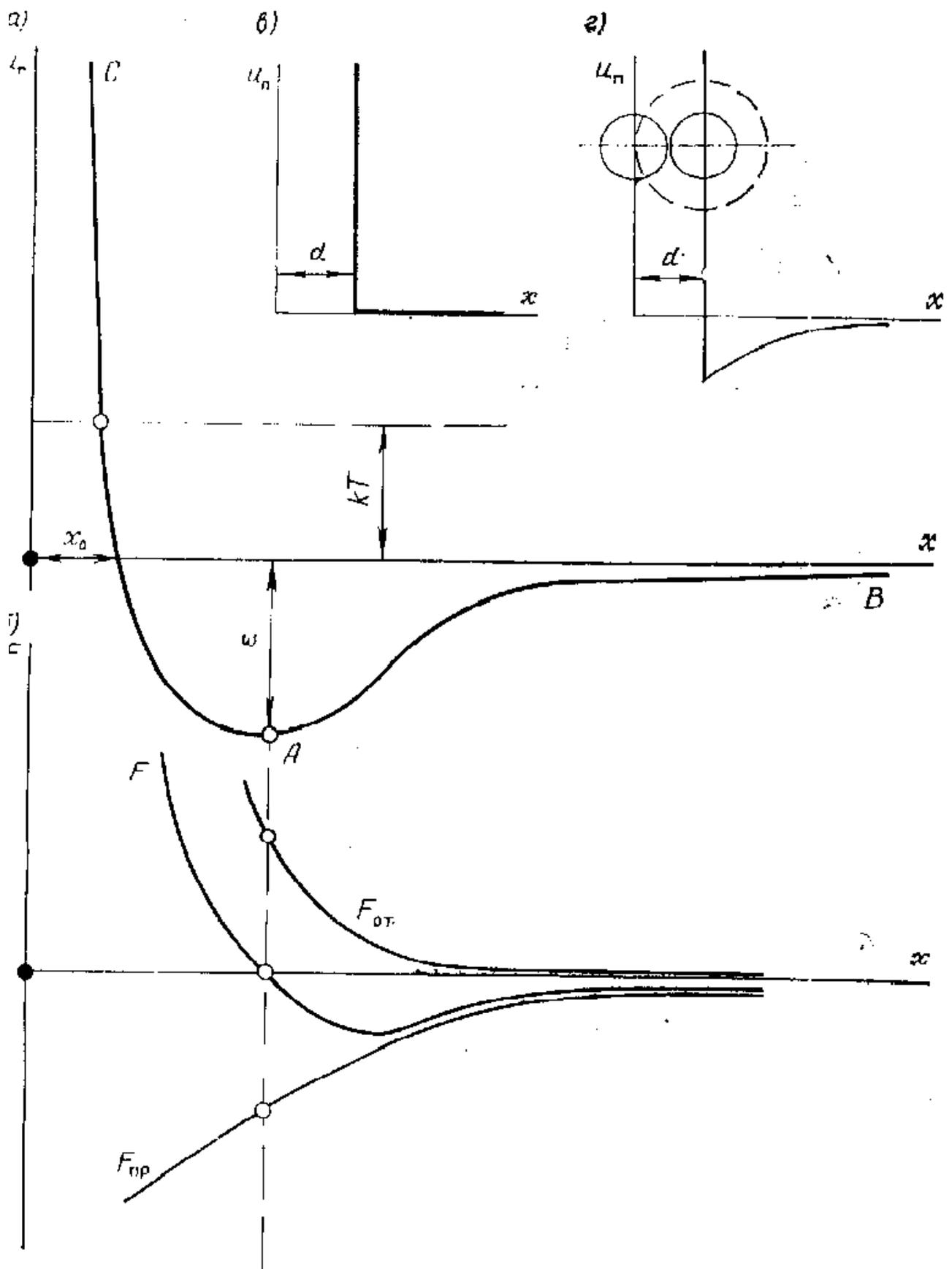


Рис.1.18 Модель идеального газа

Разложим функцию  $f / (p, T)$  в степенной ряд по плотности  $\rho$  в окрестности точки  $\rho = 0$ ; получим:

$$pv = f(\rho, T)_{\rho=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\rho=0} \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=0} \rho^2 + \\ + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \rho^3}\right)_{\rho=0} \rho^3 + \dots$$

Первый член разложения есть значение разлагаемой в ряд функции в точке  $\rho = 0$ ; по физическому смыслу он соответствует предельно разреженному, т. е. идеальному газу, и равен:

$$f(\rho, T)_{\rho=0} = RT.$$

Разделив обе части разложения на  $RT$  и введя обозначения:

$$\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\rho=0} = B(T); \quad \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=0} = C(T);$$

$$\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \rho^3}\right)_{\rho=0} = D(T),$$

получим для коэффициента сжимаемости  $Z$  следующее выражение:

$$Z = \frac{pv}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \frac{D(T)}{v^3} + \dots \quad (1.102)$$

Уравнение (1.102) называют *уравнением состояния в вириальной форме*; коэффициенты  $B(T)$ ,  $C(T)$ ,  $D(T)$  и т. д. — соответственно вторым, третьим, четвертым и т. д. *вириальными коэффициентами*. Вириальные коэффициенты являются функциями только температуры (ибо они получены при условии  $\rho = 1/v = 0$ ). Уравнение в вириальной форме, предложенное Камерлинг-Оннесом, было обосновано методами статистической физики Дж. Майером и Н. Н. Боголюбовым (1937—1946 гг.). Второй вириальный коэффициент (вириалом (по Клаузиусу) называют усредненную во времени сумму  $\sum_{i=1}^N \overrightarrow{K_i} \overrightarrow{r_i}$ , где  $K_i$  — сила, действующая на  $i$ -ю молекулу;  $\overrightarrow{r_i}$  — радиус-вектор (координата) молекулы;  $N$  — количество молекул в системе. Нахождение вириальных коэффициентов

связано с вычислением вириала) учитывает парные взаимодействия частиц, третий — взаимодействия, в которых одновременно участвуют три частицы, четвертый — четыре частицы и т. д. Вероятность одновременного столкновения четырех и более молекул весьма мала, поэтому во многих практически важных случаях достаточно учитывать второй и третий вириальные коэффициенты. Статистическая физика позволяет рассчитать вириальные коэффициенты, если известна зависимость для потенциала межмолекулярного взаимодействия; например, для таких газов, как  $O_2$ ,  $H_2$ ,  $CO_2$ , обычно используется потенциал Леннарда — Джонса (1.101), однако для водяного пара  $H_2O$ ,  $SO_2$  потенциал описывается более сложной функцией.

Для идеального газа учитываются только силы отталкивания в виде размера жесткой молекулы, так что зависимость  $u_n(x)$  в этом случае можно представить так, как это показано на рис. 1.18, в. Если учесть и силы притяжения в соответствии с потенциалом на рис. 1.18,г, то получим газ Ван-дер-Ваальса (на рисунке  $d$ —расстояние между сталкивающимися молекулами, равное диаметру молекулы). Уравнение состояния для такого газа легко вывести из уравнения Клапейрона, если учесть силы отталкивания, обусловленные собственным объемом молекул, и силы притяжения, которые проявляются в виде некоторой добавки к давлению. Если рассматривать только парные взаимодействия, то, как видно из рис. 1.18, г, для каждой из двух соударяющихся молекул объем сферы радиусом  $d$  (пунктирная окружность) является недоступным; этот объем равен учетверенному объему взаимодействующих молекул. Следовательно, вместо объема  $v$  для 1 кг реального газа имеем меньший объем  $(v-b)$ , где  $b$ —учетверенный суммарный объем молекул. В отличие от сил отталкивания, которые проявляются лишь при взаимодействии, силы притяжения являются дальнедействующими и охватывают своим влиянием группу молекул. В целом это приводит к некоторому ослаблению воздействия газа на окружающую стенку:

$$p = RT / (v - b) - \Delta p.$$

Молекулы, заполняющие пристенную зону, в отличие от внутренних групп молекул испытывают несимметричное воздействие сил притяжения, увлекающих их внутрь объема. Это воздействие пропорционально, во-первых, концентрации молекул в пристенной зоне и, во-вторых, концентрации молекул во внутренней части объема, т. е. величине  $\rho^2$ , поэтому  $\Delta p = a\rho^2 = a/v^2$ , где  $a$  — вторая константа уравнения, определяемая характером зависимости  $u_n(x)$ . Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид:

$$(p + a/v^2)(v - b) = RT. \quad (1.103)$$

Полученное из простых соображений уравнение (1.103) неплохо описывает реальный газ в качественном смысле; расчеты по уравнению (1.103) дают недостаточно точные результаты. Так, например, из уравнения (1.103) следует существование минимумов на изотермах  $Z$ - $p$ -диаграммы и тенденции смещения этих минимумов в область низких давлений при приближении к температуре Бойля  $T_b$  со стороны меньших температур (см. рис. 1.17).

Изотермическое сжатие газа приводит одновременно к росту давления и плотности, поэтому для удобства будем искать минимум для зависимости  $Z(\rho)$  при  $T = \text{const}$ , а не для  $Z(p)$ . Используя указанные переменные, уравнение Ван-дер-Ваальса (1.103) можно представить в виде:

$$Z = \frac{1 - (a/RT)\rho + (ab/RT)\rho^2}{1 - b\rho}. \quad (1.104)$$

Приравняем нулю производную:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)_T = \frac{b - a/RT + 2(ab/RT)\rho - (ab^2/RT)\rho^2}{(1 - b\rho)^2} = \frac{f_1(\rho)}{f_2(\rho)} = 0. \quad (1.105)$$

Знаменатель в выражениях (1.104) и (1.105) равен нулю лишь для предельно плотных газов — при  $v = b$ . Применительно к газам с меньшей плотностью условием минимума является  $f_1(\rho) = 0$  и в результате решения квадратного уравнения относительно  $\rho$  получаем:

$$\rho_m = 1/b - \sqrt{RT/ab}, \quad (1.106)$$

где  $\rho_m$  — плотность газа соответствующая минимуму на изотерме.

Второй корень уравнения (1.105) не имеет физического смысла: получается  $v < b$ . Из выражения (1.106) видно, что с возрастанием температуры минимум на изотермах смещается в область низких плотностей (низких давлений). Физически это означает увеличение сил отталкивания, что происходит в связи с увеличением частоты столкновений. В пределе при  $\rho_m = 0$  получаем значение температуры Бойля:

$$T_0 = a/bR. \quad (1.107)$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса является наиболее простым уравнением состояния реального газа. Существует ли связь этого уравнения с наиболее общим уравнением состояния — уравнением в вириальной форме? Такая связь существует: если для разреженного газа учитывать только второй вириальный коэффициент, то уравнения (1.102) и (1.103) эквивалентны. Для уравнения состояния в вириальной форме (1.102) имеем:

$$(\partial Z / \partial \rho)_T = B(T) + 2C(T)\rho + 3D(T)\rho^2 + \dots$$

Отсюда следует, что для разреженного газа  $\rho \rightarrow 0$

$$(\partial Z / \partial \rho)_{T, \rho \rightarrow 0} = B(T). \quad (1.108)$$

С другой стороны, уравнение Ван-дер-Ваальса (1.104), дает следующее значение для производной (1.108):

$$(\partial Z / \partial \rho)_{T, \rho \rightarrow 0} = b - a / RT.$$

Следовательно, уравнение (1.102), в котором учтен только второй вириальный коэффициент, имеет вид:

$$Z = 1 + B(T)\rho = 1 + ((b - a) / RT)\rho.$$

После некоторых преобразований имеем:

$$p + a/v^2 = (RT/v)[(v+b)/v]. \quad (1.109)$$

Для разреженного газа собственный объем молекул намного меньше объема, занимаемого газом:  $b \ll v$ ; при этом можно считать, что  $(v+b)/v \approx v/(v-b)$ . Тогда из выражения (1.109) получаем уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$p + a/v^2 = RT/(v-b).$$

Геометрический смысл величины  $B(T)$  определяется выражением (4.8): второй вириальный коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной к изотерме при  $\rho \rightarrow 0$ . Согласно рис. 1.17 для реального газа, тангенс отрицателен при  $T < T_B$ , равен нулю при  $T = T_B$  и положителен при  $T > T_B$ . Полученное из уравнения Ван-дер-Ваальса выражение для  $B(T)$  приводит к таким же результатам:

$$B(T) = \frac{a}{R} \frac{T - T_0}{T T_0}; \quad (1.110)$$

здесь использовано выражение (1.107).

На основе уравнения (1.103) можно рассчитать и калорические свойства газа Ван-дер-Ваальса:  $u$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $c_p$  и  $c_v$ . В основе такого расчета лежит уравнение (1.56), являющееся следствием первого и второго законов термодинамики.

Надежность проектирования различных технических объектов в большой степени связана с точностью расчетов процессов изменения состояния рабочих веществ, которые используются в этих объектах. Качественное проектирование дает существенный экономический эффект за счет снижения затрат топливно-энергетических ресурсов и материалов, а также затрат на создание опытно-промышленных образцов нового оборудования. Различные газообразные рабочие вещества широко используются в народном хозяйстве. В связи с этим создание достаточно точного уравнения состояния реальных газов представляет собой задачу первостепенной важности. Уравнение Ван-дер-Ваальса было опубликовано в 1873 г., теория уравнения обобщала опыт исследований в этой

области за предшествующий многолетний период. В последующий период по мере развития техники предпринимались многочисленные попытки усовершенствования уравнения Ван-дер-Ваальса, а также построения новых уравнений состояния. В настоящее время наибольшее внимание уделяется созданию так называемых полуэмпирических уравнений состояния. Основой в этом случае является уравнение в вириальной форме (1.102), но вириальные коэффициенты рассматриваются как эмпирические и вычисляются по измеренным термодинамическим свойствам веществ, а не по зависимости  $u_n(x)$ .

По рис. 1.17 и формуле (1.110) видно, что с понижением температуры второй вириальный коэффициент возрастает по модулю, следовательно, свойства реального газа даже при умеренных плотностях все более отклоняются от свойств идеального. Кривая Бойля при низких температурах отклоняется в область пониженных давлений. Минимумы на изотермах становятся все более явно выраженными. Причиной всех этих изменений является приближение к области фазовых превращений.

### 1.8.1 Процессы изменения состояния идеального газа

Основные цели изучения термодинамических процессов следующие: установить уравнение процесса, т.е. связь между термодинамическими параметрами, определить работу, совершаемую газом, а также количество теплоты, сообщаемое газу или отводимое от него в процессе. При определении теплоты и работы процесса следует исходить из уравнения первого закона термодинамики.

Рассмотрим изохорный, изобарный, изотермический и адиабатный процессы.

*Изохорным* называется равновесный процесс, протекающий при постоянном объеме. Уравнение процесса:  $v = \text{const}$ . График процесса на  $p$ - $v$ -диаграмме изображается отрезком вертикальной прямой (рис. 1.19,а); при этом отрезок  $1-2$  соответствует подводу теплоты, а отрезок  $1-2'$  — ее отводу.

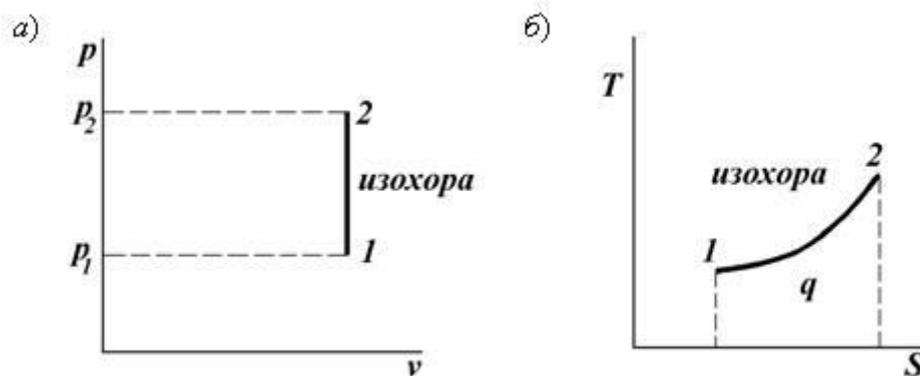


Рис. 1.19 а)  $p$ - $v$ -диаграмма; б)  $T$ - $s$ -диаграмма

Из уравнения состояния  $p v = R T$  при  $v = \text{const}$  следует, что  $p/T = \text{const}$  или  $p_2 / p_1 = T_2 / T_1$ . Таким образом, при изохорном процессе давление газа изменяется прямо пропорционально абсолютной температуре.

Аналитическое выражение первого закона термодинамики  $dq = du + p dv$  для изохорного процесса, в котором  $dv = 0$ , принимает вид:

$$dq = du = c_v dT,$$

или в конечной форме

$$q = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = c_v (t_2 - t_1).$$

Следовательно, в изохорном процессе вся подводимая теплота расходуется на изменение внутренней энергии газа, а работа расширения равна нулю.

Изменение энтропии в изохорном процессе можно получить по формуле:

$$\Delta s_v = s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.111)$$

Выражение (1.111) показывает, что изохорный процесс изображается на  $T$ - $s$ -диаграмме экспонентой (рис. 1.19, б):

$$T = T_1 \exp\left(\frac{s - s_1}{c_v}\right) \dots \quad (1.112)$$

*Изобарным* называется равновесный процесс, протекающий при постоянном давлении. Его уравнение  $p = \text{const}$ . График процесса изображается отрезком горизонтальной прямой  $1-2$  при подводе теплоты и отрезком  $1-2'$  при ее отводе (рис. 1.20, а).

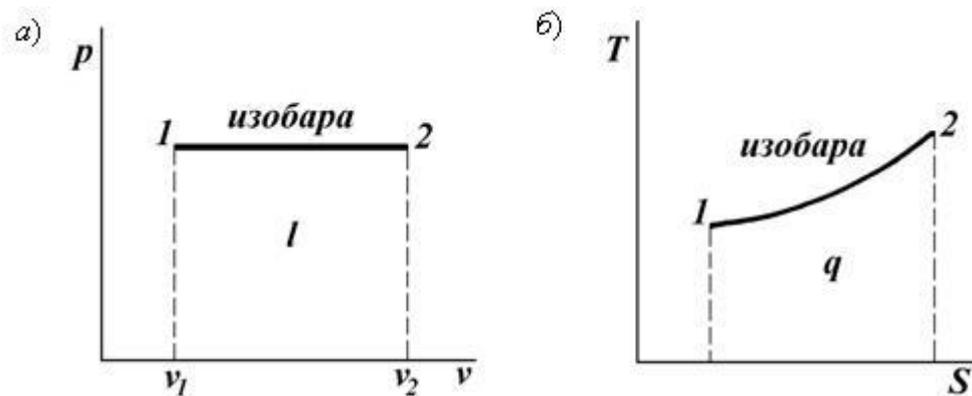


Рис. 1.20 а)  $p$ - $v$ -диаграмма; б)  $T$ - $s$ -диаграмма

Из уравнения состояния  $p\nu = RT$  при  $p = \text{const}$  следует, что  $\nu/T = \text{const}$  или  $\nu_2 / \nu_1 = T_2 / T_1$ .

Таким образом, при изобарном процессе объем газа изменяется прямо пропорционально абсолютной температуре. Работа изменения объема выражается следующим уравнением:

$$l = \int_{\nu_1}^{\nu_2} p d\nu = p(\nu_2 - \nu_1) = R(T_2 - T_1). \quad (1.113)$$

Уравнение (1.113) раскрывает физический смысл газовой постоянной  $R$ — это работа 1 кг газа в изобарном процессе при изменении температуры на 1 К.

Количество теплоты в изобарном процессе может быть определено по уравнению первого закона с учетом выражения (1.113):

$$\begin{aligned} q &= u_2 - u_1 + l = c_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) = (c_v + R)(T_2 - T_1) = \\ &= c_p(T_2 - T_1) = h_2 - h_1. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Таким образом, в изобарном процессе вся подводимая теплота расходуется на изменение энтальпии газа. Изменение энтропии в изобарном процессе можно определить при  $p = \text{const}$ :

$$\Delta s_p = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.115)$$

Как следует из выражения (1.115), изобара на  $T$ — $s$ -диаграмме представляет собой экспоненциальную кривую, проходящую через точку 1:

$$T = T_1 \exp\left(\frac{s - s_1}{c_p}\right). \quad (1.116)$$

Поскольку  $c_p > c_v$ , одному и тому же изменению температуры в изобарном процессе соответствует большее изменение энтропии, чем в изохорном процессе. Поэтому, как показано на рис. 1.20,б, изобара, построенная по уравнению (1.116), располагается более полого, чем нзохора.

*Изотермическим* называется равновесный процесс, протекающий при постоянной температуре. Уравнение процесса вытекает из уравнения состояния  $pv = RT$ . При  $T = \text{const}$  находим  $pv = \text{const}$ , т. е. объем газа изменяется обратно пропорционально давлению.

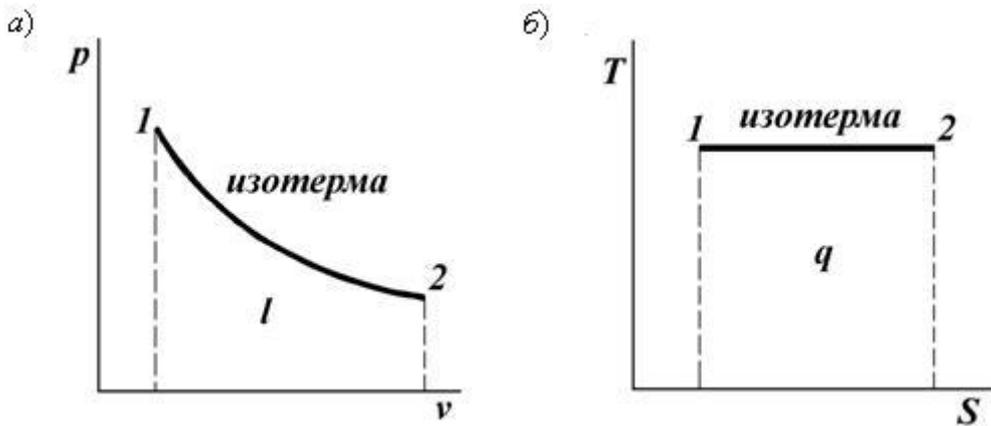


Рис. 1.21 а)  $p$ - $v$ -диаграмма; б)  $T$ - $s$ -диаграмма

График процесса на  $p$ - $v$ -диаграмме изображается равнобокой гиперболой (рис. 1.21,а); при этом отрезок 1—2 соответствует изотермическому расширению газа ( $dv > 0$ ), когда требуется подвод теплоты ( $dq > 0$ ); отрезок 1—2'—изотермическому сжатию ( $dv < 0$ ), когда требуется отвод теплоты ( $dq < 0$ ).

В изотермическом процессе  $T = \text{const}$ , поэтому  $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = 0$ , т.е. внутренняя энергия не изменяется, и аналитическое выражение первого закона термодинамики принимает вид:

$$q = l = \int_{v_1}^{v_2} p dv. \quad (1.117)$$

Таким образом, вся теплота, затрачиваемая на процесс, расходуется на совершение работы изменения объема газа.

Поскольку  $p = RT/v$ , интегрирование выражения (1.117) дает:

$$q = l = \int_{v_1}^{v_2} \frac{RT}{v} dv = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_2}{v_1}. \quad (1.118)$$

Выражение (1.118) показывает, что в изотермическом процессе вся подведенная теплота преобразуется в работу расширения, а в случае сжатия идеального газа вся затраченная работа преобразуется в теплоту, отводимую от него. На  $T$ - $s$ -диаграмме изотермический процесс изображается горизонтальной прямой  $1-2$  или  $1-2'$  (рис. 1.21,б).

Изменение энтропии для изотермического процесса удобно определять:

$$\Delta s_T = s_2 - s_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Определить количество теплоты, подведенное к рабочему телу при изотермическом процессе, с использованием удельной теплоемкости невозможно, так как  $c = dq/dT$ , а при изотермическом процессе  $dq \neq 0$ ,  $dT = 0$ , теплоемкость  $c = \pm\infty$ .

Адиабатным называется процесс, протекающий без теплообмена между термодинамической системой и окружающей средой. К адиабатным процессам относятся, например, процессы истечения газа из сопла, процессы сжатия и расширения в двигателе внутреннего сгорания и др. Скорости движения газа при этом настолько велики, что обмен тепловой энергией между газом и средой практически не успевает произойти.

Уравнение связи параметров может быть получено из уравнения первого закона термодинамики при  $dq = 0$ :

$$du + pdv = 0,$$

или с учетом  $du = c_v dT$  имеем

$$c_v dT + pdv = 0. \quad (1.119)$$

Бесконечно малое изменение температуры можно определить, продифференцировав уравнение  $p\nu=RT$ :  $p dv + \nu dp = R dT$ , откуда  $dT = (p dv + \nu dp) / R$ .

Подставив значение  $dT$  в формулу (1.119), получим

$$(c_v/R)(p dv + \nu dp) + p dv = 0 \quad (1.120)$$

Отметим, что в термодинамике идеального газа широко используется отношение удельных теплоемкостей, называемое *показателем адиабаты*:

$$k = c_p / c_v. \quad (1.121)$$

Так как  $c_p > c_v$ , то  $k > 1$ .

Величину  $c_v/R$  из выражения (1.120) с учетом соотношения (1.121) и формулы Майера можно представить так:  $c_v/R = 1/(k-1)$ . Тогда выражение (1.120) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0. \quad (1.122)$$

Интегрируя уравнение (1.122), получим уравнение адиабатного процесса

$$p\nu^k = \text{const}. \quad (1.123)$$

На  $p$ - $\nu$ -диаграмме адиабата изображается степенной функцией  $p = \text{const} / \nu^k$  (кривые 1—2 или 1—2' на рис. 1.22,а).

Из сравнения уравнений изотермы и адиабаты видно, что при одинаковом изменении объема изменение давления в адиабатном процессе будет больше, чем в изотермическом, так как  $k > 1$ . На  $p$ - $\nu$ -диаграмме адиабата будет идти круче, чем изотерма (см. рис. 1.22,а).

Связь параметров  $p$  и  $\nu$  для адиабаты устанавливается уравнением (1.123), которое можно записать следующим образом:

$$p_1 \nu_1^k = p_2 \nu_2^k,$$

откуда

$$p_2 / p_1 = (\nu_1 / \nu_2)^k \text{ или } (p_2 / p_1)^{1/k} = \nu_1 / \nu_2$$

Связь параметров  $\nu$  и  $T$  найдем, используя уравнение состояния; подставляя выражение  $p = RT/\nu$  в уравнение адиабаты (1.123), получим

$$T\nu^{k-1} = \text{const} \text{ или } T_1\nu_1^{k-1} = T_2\nu_2^{k-1},$$

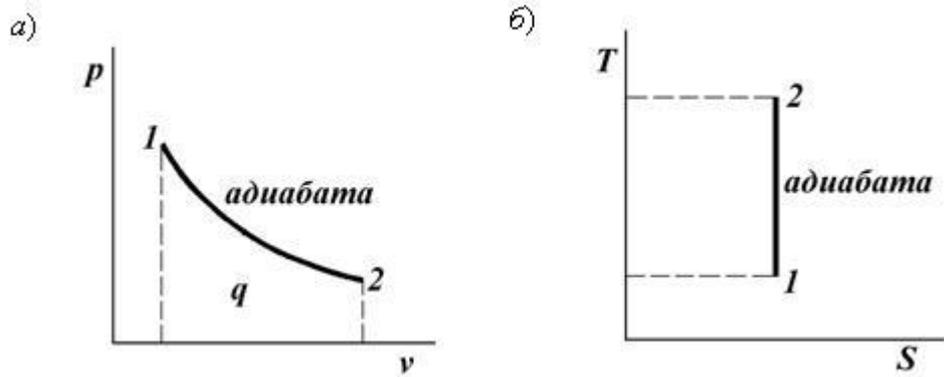


Рис. 1.22 а)  $p$ - $\nu$ -диаграмма; б)  $T$ - $s$ -диаграмма

откуда

$$T_2 / T_1 = (\nu_1 / \nu_2)^{k-1} \text{ или } (T_2 / T_1)^{\frac{1}{k-1}} = \nu_1 / \nu_2.$$

Аналогичным путем определится связь параметров  $p$  и  $T$ :

$$p_2 / p_1 = (T_2 / T_1)^{k/(k-1)} \text{ или } (p_2 / p_1)^{(k-1)/k} = T_2 / T_1.$$

Из уравнения первого закона термодинамики для адиабатного процесса ( $q=0$ ) получаем выражение для работы:

$$l = -\Delta u = -(u_2 - u_1) = u_1 - u_2. \quad (1.124)$$

Из выражения (1.124) видно, что работа расширения газа в адиабатном процессе совершается в результате убывания его внутренней энергии. Очевидно, что работа при адиабатном сжатии газа равна увеличению его внутренней энергии. Подставляя в уравнение (1.124) значение  $\Delta u = c_v(T_2 - T_1)$ , получим

$$l = -c_v(T_2 - T_1) = c_v(T_1 - T_2). \quad (1.125)$$

Так как  $c_v = R/(k-1)$ , то уравнение (1.125) примет вид:

$$l = \frac{R}{k-1}(T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{k-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \quad (1.125a)$$

Далее, учитывая уравнение состояния, имеем

$$l = \frac{R}{k-1}(p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{p_1 v_1}{k-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \quad (1.1256)$$

В адиабатном процессе  $dq = 0$ , поэтому энтропия системы не изменяется:

$$ds = dq/T = 0; \quad s = \text{const.}$$

Следовательно, на  $T$ — $s$ -диаграмме адиабатный процесс изображается вертикальной прямой  $1-2$  или  $1-2'$  на рис. 1.22,б, при этом падение температуры происходит при расширении рабочего тела, а увеличение температуры — при его сжатии.

Рассмотренные выше процессы не охватывают все многообразие возможных изменений состояния идеального газа. Между тем рабочее тело многих реальных технических устройств, в том числе в системах теплогазоснабжения, отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха, можно условно считать идеальным газом, получая при этом приемлемую точность расчетов. Стремление описать разнообразные процессы единой простой математической формулой приводит к понятию *политропного процесса*. Поставим следующую задачу: получить уравнение произвольного процесса изменения состояния идеального газа с одним параметром  $n$ ; вид процесса должен определяться числовым значением  $n$  и индивидуальными свойствами газа. Полученный процесс назовем политропным.

В уравнении первого закона термодинамики  $dq = du + pdv$  представим теплоту процесса в виде  $dq = cdT$ , где  $c$  — теплоемкость политропного процесса, равная

$$cdT = du + pdv = c_v dT + pdv$$

или

$$(c - c_v)dT = pdv.$$

Подставляя сюда  $dT = (pdv + vdp)/R$  и используя формулу Манера, можем написать

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} pdv + vdp = 0. \quad (1.126)$$

Обозначим

$$(c - c_p)/(c - c_v) = n \quad (1.127)$$

где  $n$  — *показатель политропы*. Тогда выражение (1.126) после деления на  $pv$  примет вид:

$$n \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (1.128)$$

Дифференциальное уравнение политропы (1.128) просто интегрируется при  $n = \text{const}$ . Это условие, согласно выражению (1.127), влечет за собой три условия:  $c = \text{const}$ ;  $c_v = \text{const}$ ;  $c_p = \text{const}$ . Два последних условия частично использовались ранее: при выводе уравнения адиабаты (1.123) предполагалось, что  $k = c_p/c_v = \text{const}$ . Из законов идеального газа, однако, не вытекает требование о постоянстве теплоемкости: согласно закону Джоуля, внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, при этом в принципе допускается зависимость  $c_v = c_v(T)$ , т.е. калорическое уравнение состояния может быть записано в виде  $du = c_v(T)dT$ . Для учета зависимости теплоемкости от температуры в расчетах используется средняя теплоемкость  $\bar{c}_v$  или  $\bar{c}_p$ . Таким образом, как условие  $k = \text{const}$ , так и условие  $n = \text{const}$  являются приближенными.

В результате интегрирования при  $n = \text{const}$  будем иметь  $\ln(pv^n) = \text{const}$ , откуда

$$pv^n = \text{const} \quad (1.129)$$

Выражение (1.129) и есть уравнение политропы.

При некоторых частных значениях  $n$  уравнение  $pv^n = \text{const}$  превращается в уравнения рассмотренных выше четырех основных термодинамических процессов.

Действительно, представим уравнение (1.129) в виде  $p^{1/n}v = \text{const}$ . При  $n \rightarrow \pm\infty$  уравнение политропы принимает вид  $v = \text{const}$ , т.е. политропный процесс становится изохорным. При  $n = 0$  уравнение (1.129) будет иметь вид:

$p = \text{const}$  и политропный процесс становится изобарным. Нетрудно показать, что при  $n = 1$  политропный процесс будет изотермическим, а при  $n = k$  — адиабатным.

Соотношения, вытекающие из уравнения политропы  $p v^n = \text{const}$ , с математической точки зрения аналогичны соотношениям, вытекающим из уравнения адиабаты  $p v^k = \text{const}$ , так как они получаются путем замены показателя адиабаты  $k$  показателем политропы  $n$ . Таким образом, связь между параметрами газа в двух состояниях при политропном процессе выражается уравнениями:

$$\begin{aligned} p_2 / p_1 &= (v_1 / v_2)^n; \\ T_2 / T_1 &= (v_1 / v_2)^{n-1}; \\ p_2 / p_1 &= (T_2 / T_1)^{n/(n-1)}. \end{aligned}$$

Выражения для работы изменения объема газа в политропном процессе аналогичны формулам (1.125а) и (1.125б) и имеют вид:

$$l = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2); \quad (1.130)$$

$$l = \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2). \quad (1.131)$$

Теплота политропного процесса, согласно первому закону термодинамики, определяется выражением

$$q = u_2 - u_1 + l = c_v (T_2 - T_1) + \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2).$$

Сравнивая полученное выражение с формулой  $q = c(T_2 - T_1)$ , находим зависимость

$$c = c_v - \frac{R}{n-1} = \frac{n c_v - c_p}{n-1}$$

или, учитывая, что  $c_p / c_v = k$ , окончательно имеем

$$c = \frac{n-k}{n-1} c_v. \quad (1.132)$$

Таким образом, теплоемкость газа в политропном процессе зависит от показателя политропы  $n$  и индивидуальных свойств газа  $k, c_v$ .

Используя уравнение (1.132), можно проследить за изменением теплоемкости политропного процесса в зависимости от показателя политропы  $n$  (рис. 1.23). В частности, из этого рисунка видно, что  $c = c_v$  для изохорного процесса, когда  $n \rightarrow \infty$ ;  $c = c_p$  для изобарного процесса, когда  $n = 0$ ;  $c = 0$  для адиабатного процесса, когда  $n = k$ ;  $c = \pm \infty$  для изотермического процесса, когда  $n = 1$ .

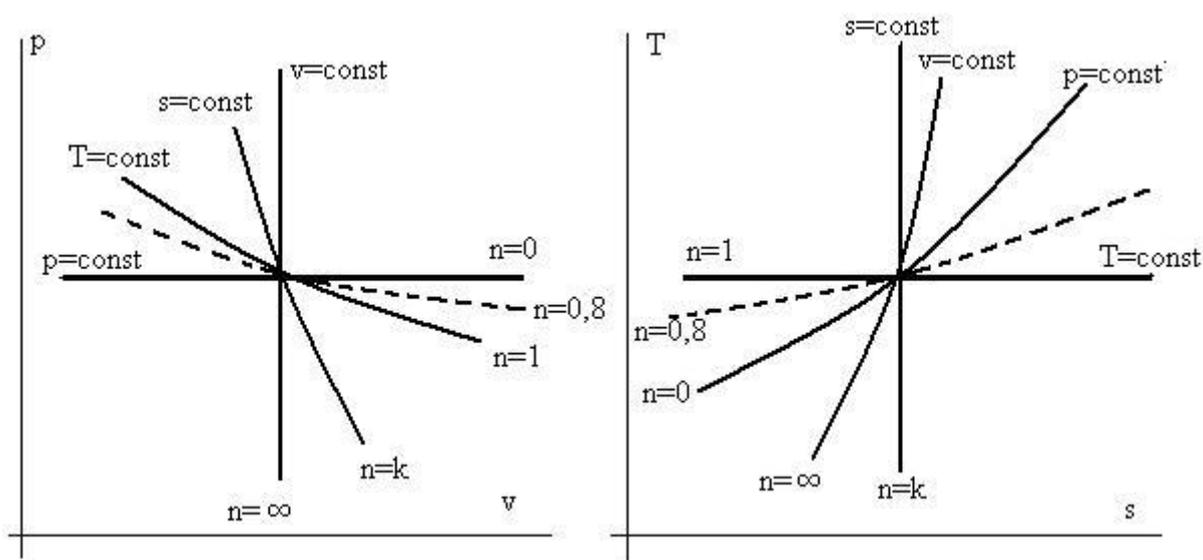


Рис. 1.23 Политропный процесс

Значение показателя политропы определяет расположение процесса на  $p$ - $v$ -диаграмме. На рис. 1.23 показаны рассмотренные выше частные случаи термодинамических процессов. Из рисунка видно, что любая политропа, расположенная правее изохоры, соответствует расширению, а левее — сжатию рабочего тела; любая политропа, расположенная выше изотермы, соответствует повышению температуры и увеличению внутренней энергии, а расположенная ниже ее — понижению температуры и уменьшению внутренней энергии. Любая политропа, расположенная выше адиабаты, характеризуется подводом

теплоты и падением температуры, а расположенная ниже ее — отводом теплоты и повышением температуры.

Все представленные на рис. 1.23 политропные процессы условно выделяют на  $p$ - $v$ -диаграмме шесть областей:

I — процессы расширения ( $\infty < n < 1$ ); теплота подводится и внутренняя энергия увеличивается;

II — процессы сжатия ( $\infty < n < 1$ ); теплота отводится и внутренняя энергия уменьшается;

III — процессы расширения ( $1 < n < k$ ); теплота подводится, но внутренняя энергия уменьшается, теплоемкость в этой области отрицательна;

IV — процессы сжатия ( $1 < n < k$ ); теплота отводится, но внутренняя энергия увеличивается; теплоемкость в этой области отрицательна;

V — процессы расширения ( $k < n < \infty$ ); теплота отводится и внутренняя энергия уменьшается;

VI — процессы сжатия ( $k < n < \infty$ ); теплота подводится и внутренняя энергия увеличивается.

Для политропного процесса изменение энтропии можно определить на основании равенства  $ds = dq/T = cdT/T$ , что для постоянной теплоемкости дает:

$$s_2 - s_1 = c \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Заменяя теплоемкость, получим

$$s_2 - s_1 = c_v \frac{n-k}{n-1} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (1.133)$$

Политропный процесс на  $T$ - $s$ -диаграмме согласно формуле (1.133) изображается некоторой экспоненциальной кривой, расположение которой зависит от показателя  $n$ . Только для двух случаев изотермы и адиабаты имеем прямые линии.

Следует отметить, что в *I* и *III* четвертях  $dq$  и  $dT$  имеют одинаковые знаки, поэтому теплоемкость  $c = -dq/dT$  положительна, т. е.  $c > 0$ ; во *II* и *IV* четвертях  $dq$  и  $dT$  имеют разные знаки, поэтому  $c < 0$ .

## 1.9 Водяной пар

### 1.9.1 Термодинамические процессы изменения состояния водяного пара.

Расчеты процессов для водяного пара осуществляются с помощью  $h$ - $s$ -диаграммы и таблиц термодинамических свойств.

Рассмотрим *изохорный* процесс в области перегретого пара. Если заданы значения  $p_1$  и  $t_1$ , то точка *I* (рис. 1.24) лежит на пересечении изотермы, соответствующей температуре  $t_1$ , с изобарой, соответствующей температуре  $t_1$  с изобарой, соответствующей давлению  $p_1$ . Если заданы значения  $v_1$  и  $t_1$ , то точка *I* будет лежать на пересечении соответствующей изохоры с изотермой  $t_1 = \text{const}$ . Понятно, что могут быть заданы и иные сочетания двух начальных параметров. Кроме того, считается известным один из конечных параметров процесса, например температура  $t_2$  (или давление  $p_2$ ).

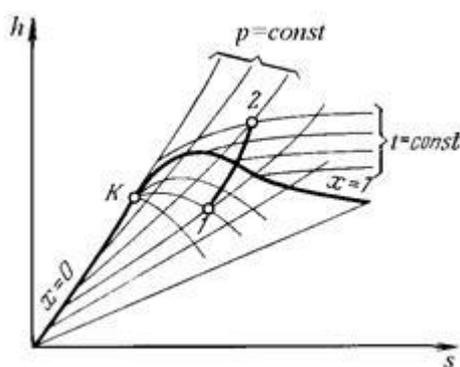


Рис. 1.24 Изохорный процесс в  $h$ - $s$ -диаграмме

Через точку *I* проходит изохора  $v = \text{const}$ . Точка пересечения изохоры с изотермой  $t_2 = \text{const}$  определяет конечную точку 2 рассматриваемого процесса.

По точкам 1 и 2 определяются соответствующие значения  $h_1$  и  $h_2$  (а также  $p_2$  или  $s_2$ ).

На рис. 1.24 показана также изохора 1—2 в области влажного пара. В двухфазной области изотерма совпадает с изобарой, поэтому параметры  $p$  и  $t$  уже не являются независимыми. Дополнительной величиной, определяющей состояние влажного пара, должна быть степень сухости  $x_1$ . Точка 1 процесса лежит на пересечении изобары  $p_1$  (являющейся одновременно изотермой) с кривой постоянной степени сухости пара  $x_1$ . Из параметров, соответствующих конечному состоянию (точка 2), известны или  $p_2$  или  $x_2$ . Дальнейшие построения понятны из рисунка.

Так как в изохорном процессе работа не совершается, то вся теплота расходуется на изменение *внутренней* энергии, поэтому

$$q_v = \Delta u = (h_2 - p_2 v_2) - (h_1 - p_1 v_1).$$

Если  $h_1$  и  $h_2$  выражены в кДж/кг,  $v$  — в м<sup>3</sup>/кг,  $p_1$  и  $p_2$  — в кПа, то  $q_v$  выразится в кДж/кг.

На рис. 1.25 показан изобарный процесс. Аналогично изложенному по двум заданным начальным параметрам и по одному конечному параметру определяют точки 1 и 2 процесса, лежащие на изобаре. В результате считаются известными все необходимые для расчета параметры начала и конца процесса.

Следует отметить, что на  $h$ — $s$ -диаграмме изохора и изобара пересекаются под острым углом, это затрудняет точное определение объемов  $v_1$  и  $v_2$ . Поэтому целесообразно определять объемы перегретого пара в зависимости от  $p$  и  $t$  по таблице перегретого пара, а в области влажных паров — по формуле (1.108).

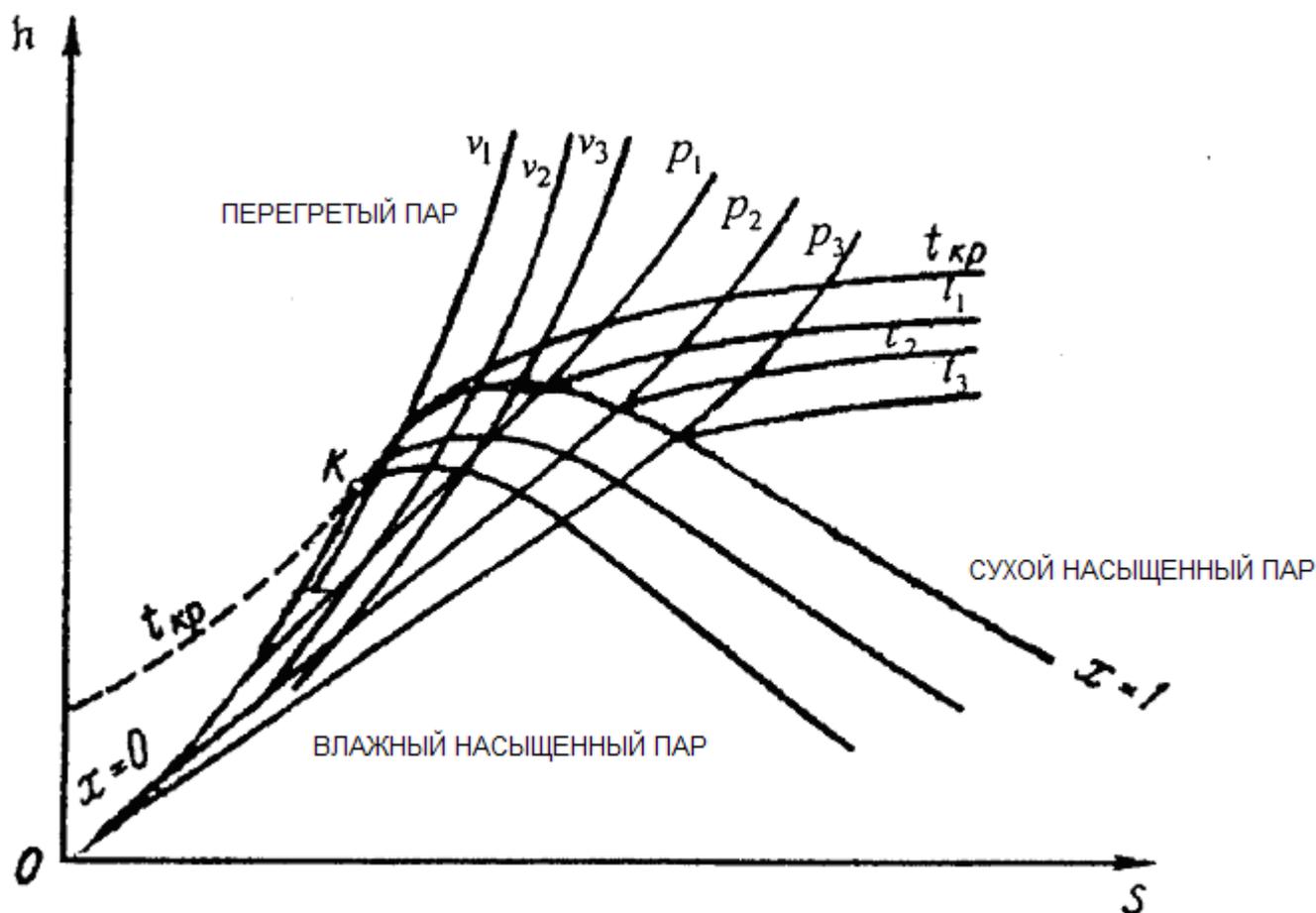


Рис. 1.25. Изобарный процесс в  $h$ - $s$ -диаграмме

Теплота процесса определяется уравнением  $q_p = h_2 - h_1$  изменение внутренней энергии равно  $u_2 - u_1 = (h_2 - pv_2) - (h_1 - pv_1)$ , работа расширения равна  $l = p(v_2 - v_1)$ .

На  $h$ - $s$ -диаграмме *изотерма* представлена линией 1—2 (рис. 1.26). Начальное состояние пара 1 находится на пересечении изобары  $p_1$  и линии постоянной сухости  $x_1$ , конечное состояние 2 — на пересечении заданной изотермы и изобары  $p_2$ .

В процессе изотермического расширения пара часть подводимой теплоты расходуется на изменение его внутренней энергии и в этом состоит его отличие от того же процесса для идеального газа.

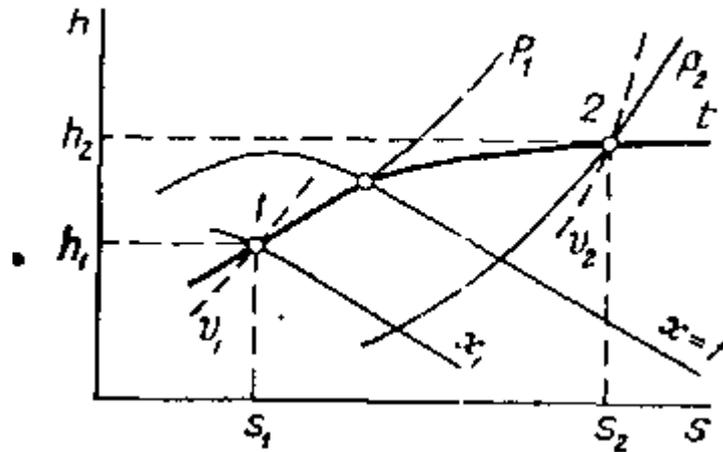


Рис. 1.26. Изотермический процесс в  $h-s$ -диаграмме

Теплота процесса определяется по уравнению  $q = T(s_2 - s_1)$ , изменение внутренней энергии — по уравнению  $\Delta u = \Delta(h - pv)$ , а работа расширения — из первого закона термодинамики  $l = q - \Delta u$ .

В области значительного перегрева пара изотермы располагаются на  $h-s$ -диаграмме практически горизонтально. В этой области  $h_1 = h_2$  и  $u_1 = u_2$ . Это говорит о том, что перегретый водяной пар приобретает свойства идеального газа.

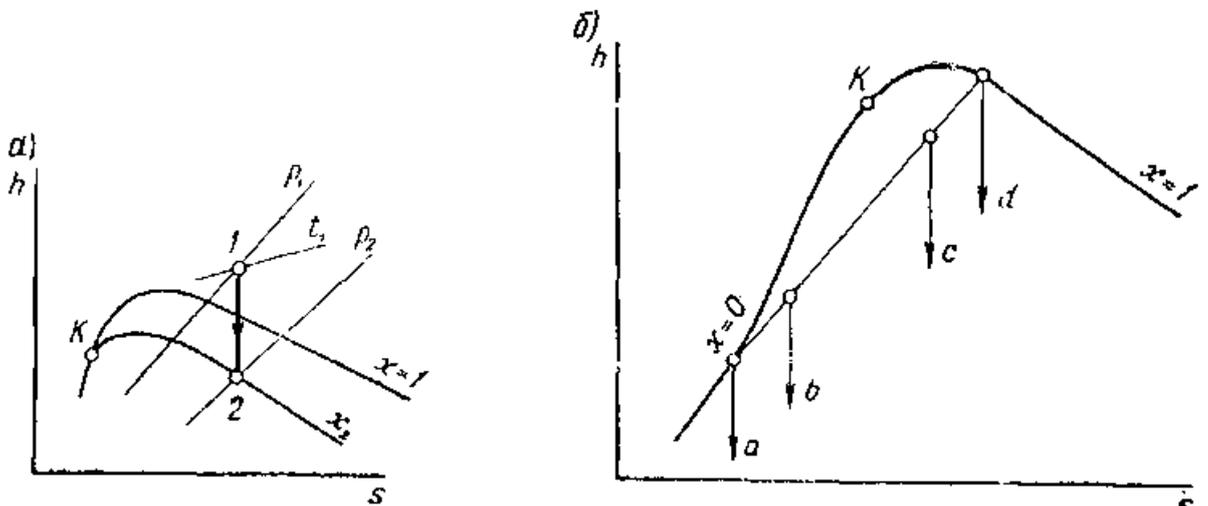


Рис. 1.27 Адиабатный процесс в  $h-s$ -диаграмме

а) обратимый процесс б) увеличение степени сухости

На рис. 1.27,а показан обратимый адиабатный процесс расширения пара.

Для адиабатного процесса  $dq = 0$  и работа расширения совершается за счет изменения внутренней энергии:

$$i = u_1 - u_2 = (h_1 - p_1 v_1) - (h_2 - p_2 v_2).$$

Адиабатный процесс изменения состояния пара может быть приближенно описан уравнением вида  $pv^{k^*} = \text{const}$ , где  $k^*$  — эмпирический коэффициент. В небольших пределах изменения давления коэффициент  $k^*$  принимается равным: для перегретого пара  $k^* = 1,3$ ; для сухого насыщенного пара  $k^* = 1,135$ ; для влажного насыщенного пара  $k^* = 1,035 + 0,1x$ , где  $x$  — начальная степень сухости пара.

На  $h$ — $s$ -диаграмме адиабата изображается линией 1—2, при этом начальное состояние пара, определяемое точкой 1, находится на пересечении изобары  $p_1$  и изотермы  $t_1$ . Опуская из точки 1 вертикальную линию  $s = \text{const}$  до пересечения с изобарой  $p_2$ , находим точку 2, которая определяет конечное состояние пара. В точках 1 и 2 находят недостающие параметры пара, необходимые для расчета. При адиабатном расширении 1—2 перегретого пара вначале уменьшается степень его перегрева, а затем при давлении  $p_n$  он переходит в насыщенный пар. Дальнейшее расширение пара будет сопровождаться увеличением его степени влажности.

Заметим, что с очень влажными парами при их адиабатном расширении происходит обратное явление, а именно — их степень сухости не уменьшается, а увеличивается. Так, в процессах  $a$  и  $b$  (рис. 1.27 б) степень сухости пара при адиабатном расширении увеличивается, в процессах  $c$  и  $d$  — уменьшается.

## 1.9.2 Термодинамические параметры влажного воздуха

Окружающий нас воздух представляет собой смесь сухого воздуха и водяного пара и называется *влажным воздухом*. Если воздух не содержит водяного пара, то его называют *сухим*.

Влажный воздух с достаточной точностью можно рассматривать как смесь идеальных газов. Поэтому к влажному воздуху можно применить закон Дальтона, согласно которому давление влажного воздуха  $p$  равно:

$$p = p_e + p_n \quad (1.134)$$

где  $p_e$  и  $p_n$  — парциальные давления сухого воздуха и водяного пара.

Содержание водяного пара во влажном воздухе можно характеризовать массой пара, приходящейся на  $1 \text{ м}^3$  влажного воздуха. Эта величина называется *абсолютной влажностью воздуха* и представляет собой парциальную плотность водяного пара (т. е. его концентрацию) во влажном воздухе  $\rho_n = m_n / V$ , где  $m_n$  — масса пара, кг;  $V$  — объем влажного воздуха,  $\text{м}^3$ . Очевидно, что плотность влажного воздуха  $\rho$  определяется формулой  $\rho = \rho_n + \rho_e$ .

Рассмотрим на  $p$ - $v$ -диаграмме состояния пара во влажном воздухе с давлением  $p$  (рис. 1.27). Предположим, что состояние пара характеризуется точкой 1. В этом случае температура влажного воздуха  $t_1$  меньше, чем температура насыщения при давлении  $p$ , т. е. меньше, чем  $t_n(p)$ , а парциальное давление пара в воздухе  $p_n$  меньше, чем давление насыщения  $p_{n,n}$  при температуре  $t_1$ . Очевидно, что водяной пар во влажном воздухе в этом случае будет перегретым; при этом абсолютная влажность воздуха  $\rho_n = 1/v_n$ , где  $v_n$  — удельный объем пара, показанный на диаграмме (объем  $v_n = V/m_n$  не следует путать с объемом  $v_i$ ). Влажный воздух в таком состоянии, когда содержащийся в нем пар перегрет, называется *ненасыщенным*, потому что количество пара в нем при заданной температуре  $t_1$  может быть и больше, чем  $\rho_n$ . В этом легко убедиться, перемещая точку 1 вверх по изотерме  $t_1$ . Величина  $v_n$  при этом будет уменьшаться, следовательно, величина  $\rho_n$  — увеличиваться.



В соответствии с изложенным высшим пределом парциального давления пара во влажном воздухе является давление насыщения при заданной температуре воздуха. Это означает, что если воздух насыщен, то его абсолютная влажность зависит только от температуры и остается постоянной при любом давлении  $p > p_{n,n}$ . Например, если насыщенный влажный воздух сжать изотермически до пятикратного

уменьшения объема (при этом его давление также увеличится в 5 раз), то 80% содержащегося в нем водяного пара сконденсируется, а абсолютная влажность воздуха останется той же, а именно  $\rho$  " .

Отношение массы пара во влажном воздухе к максимально возможному ее значению в том же объеме влажного воздуха при той же температуре называется *относительной влажностью воздуха* и обозначается  $\varphi$ . Для  $V = 1$  м<sup>3</sup> имеем:  $\varphi = \rho_n / \rho_{n,n}$

Величина  $\rho_{n,n}$  представляет собой плотность сухого насыщенного пара при данной температуре.

С достаточной для практики точностью можно считать, что водяной пар во влажном воздухе подчиняется законам идеальных газов, т. е.  $p_n / \rho_n = R_n T$ . Для состояния насыщения при данной температуре  $T$  уравнение Клапейрона имеет вид:  $p_{n,n} / \rho_{n,n} = R_n T$ . Из двух последних уравнений видно, что  $\rho_n / \rho_{n,n} = p_n / p_{n,n}$ , поэтому справедлива еще одна формула:

$$\varphi = p_n / p_{n,n}. \quad (1.135)$$

При увеличении  $T$  растет и  $p_{n,n}$ , поэтому при  $p_n = \text{const}$  величина  $\varphi$  уменьшится. Для сухого воздуха  $p_n = 0$  и  $\varphi = 0$ , для насыщенного воздуха  $p_n = p_{n,n}$  и  $\varphi = 1$ .

Одним из параметров влажного воздуха является его *влажносодержание*: отношение массы водяного пара к массе сухого воздуха или, что то же самое, отношение парциальных плотностей пара и сухого воздуха:

$$d = \rho_n / \rho_e. \quad (1.136)$$

По уравнению Клапейрона для компонентов  $\rho_n = p_n / R_n T$  и  $\rho_e = p_e / R_e T$ ; поэтому  $d = R_e p_n / R_n p_e = 0,622(p_n / p_e)$ , имеем:

$$d = 0,622 \frac{p_n}{p - p_n}. \quad (1.137)$$

При изменении состояния влажного воздуха количество сухого воздуха в нем остается неизменным, количество же водяного пара может уменьшаться при его конденсации или увеличиваться при испарении воды. Поэтому все расчеты целесообразно проводить применительно к 1 кг сухого воздуха; влагосодержание  $d$  с единицей измерения 1 кг влаги на 1 кг сухого воздуха является, следовательно, весьма удобной характеристикой влажного воздуха.

Из уравнения (1.137) можно определить парциальные давления водяного пара и сухого воздуха, если известны влагосодержание и давление смеси:

$$p_n = pd / (0,622 + d); \quad (1.138)$$

$$p_e = 0,622p / (0,622 + d). \quad (1.139)$$

Влагосодержание влажного воздуха равно нулю, если в нем не содержится водяной пар. Максимальное значение влагосодержания при данных температуре и давлении влажного воздуха соответствует отношению давления насыщения при данной температуре к парциальному давлению воздуха в смеси. Если температура влажного воздуха выше или равна температуре насыщения водяного пара при давлении смеси, то максимальное влагосодержание не ограничено.

Состав влажного воздуха можно задать объемными долями воздуха и водяного пара:  $r_e = p_e / p; r_n = p_n / p$ . Тогда кажущаяся молекулярная масса влажного воздуха составит:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_e r_e + \mu_n r_n = 28,97 \cdot p_e / p + 18,02 p_n / p = \\ &= 28,97 - 10,95(p_n / p). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Эта формула показывает, что влажный воздух всегда легче сухого воздуха при том же давлении и температуре, так как молекулярная масса пара меньше молекулярной массы сухого воздуха.

Газовая постоянная для влажного воздуха определяется по формуле:

$$R = \frac{8314,2}{28,97 - 10,95(p_n / p)} \quad (1.141)$$

Удельная теплоемкость влажного воздуха, как и влагосодержание, относится к единице массы сухой части воздуха

$$c_p = c_{pв} + c_{pв} d, \quad (1.142)$$

где  $c_{pв}$  — средняя теплоемкость сухого воздуха [для температур в интервале  $0—100^\circ\text{C}$   $c_{pв} = 1,005 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ];  $c_{pn}$  — средняя удельная теплоемкость водяного пара;  $c_{pn} = 1,97 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

Энтальпия влажного воздуха  $H$  также относится к 1 кг сухого воздуха и определяется выражением  $H = h_в + h_n d$ .

Удельная энтальпия сухого воздуха равна

$$h_в = c_{pв} t. \quad (1.143)$$

Энтальпия водяного пара, который в общем случае находится в воздухе в перегретом состоянии, равна

$$h_n = c_{pж} t_в + r + c_{pn} (t - t_n),$$

где  $c_{pж}$  — теплоемкость воды;  $c_{pж} = 4,19 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $t_n$  — температура насыщения, соответствующая парциальному давлению пара в смеси;  $r$  — теплота парообразования, которую с достаточной степенью точности можно определить по формуле:  $r = 2490 - 2,3t_n$ .

Следовательно,

$$h_n = 4,19 \cdot t_в + (2490 - 2,3t_n) + 1,97(t - t_n).$$

Произведя сокращения, получим приближенно

$$h_n = 2490 + 1,97t. \quad (1.144)$$

Таким образом, энтальпия влажного воздуха с учетом формул (1.143) и (1.144) составит:

$$H = 1,005t + (2490 + 1,97t)d. \quad (1.145)$$

Соотношение (1.145) справедливо лишь при условии, что влагосодержание равно или меньше влагосодержания насыщенного воздуха при той же температуре,  $d \leq d_n$ . Если же воздух содержит туман в виде частичек жидкости, т. е.  $d > d_n$ , то необходимо учитывать энтальпию воды в жидкой фазе. При этом используется следующее соотношение:

$$H = c_{pв}t + h_n d_n + (d - d_n)c_{pж}t, \quad (1.146)$$

где  $c_{pж}$  — теплоемкость воды.

Если влажный воздух содержит кристаллики льда, то необходимо ввести в рассмотрение теплоту плавления  $r_{nl} = 333$  кДж/кг, а также теплоемкость льда  $c_{л} = 2.095$  кДж/(кг·°С).

Энтальпия льда — отрицательная величина, так как энтальпия воды в жидкой фазе при 0°С считается равной нулю. В этом случае энтальпия воздуха с туманом из кристалликов льда

$$H = c_{pв}t + h_n d_n + (d - d_n)(-r_{nl} + c_{л}t). \quad (1.147)$$

### 1.9.3 Процессы изменения состояния влажного воздуха. $H-d$ -диаграмма

Определение параметров, характеризующих состояние влажного воздуха, и исследование процессов изменения его состояния, легко производятся с помощью  $H-d$ -диаграммы влажного воздуха,

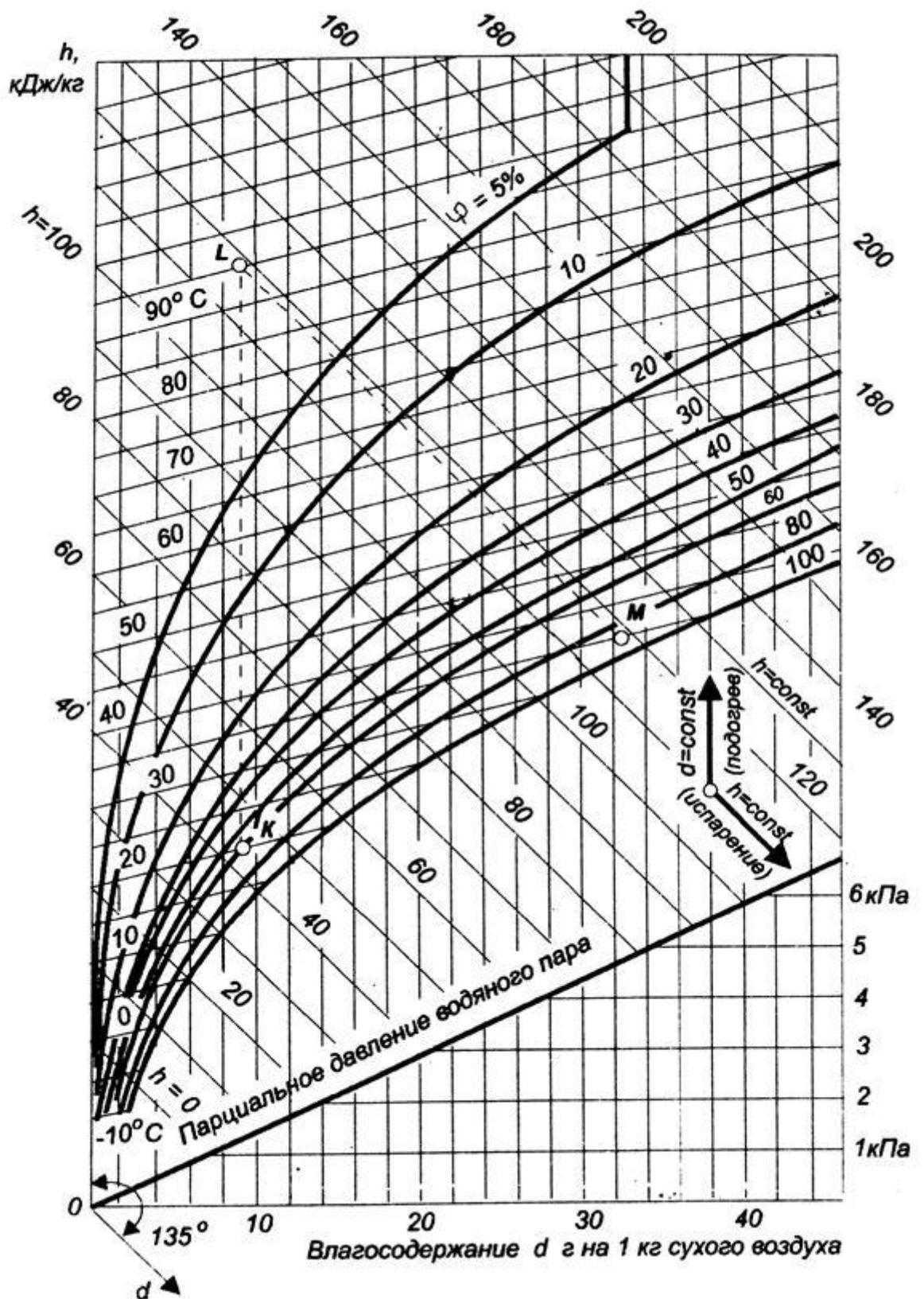


Рис. 1.29  $h-d$ -диаграмма влажного воздуха

предложенной проф. Л. К. Рамзиным в 1918 г. По оси абсцисс отложено влагосодержание влажного воздуха  $d$ , г/кг, а по оси ординат — энтальпия  $H$ ,

кДж/кг. Эти величины отнесены к 1 кг сухого воздуха. Координатные оси проведены под углом  $135^\circ$  и значения  $d$  снесены на горизонталь.

На  $H-d$ -диаграмме (рис. 1.29) нанесены линии  $t = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$  и в графической форме представлена зависимость  $p_n = f(d)$ .

Введем понятие температуры точки росы и температуры мокрого термометра. *Температурой точки росы* называется такая температура влажного воздуха, до которого его нужно охладить в условиях постоянного влагосодержания, чтобы он стал насыщенным. Таким образом, если влажный воздух, имеющий температуру  $t$  (точка  $C$  на рис. 1.30), охладить по линии постоянного влагосодержания  $d = \text{const}$  до кривой насыщения, то полученная при этом температура  $t_p$  является температурой точки росы (точка  $E$  на рис. 1.30).

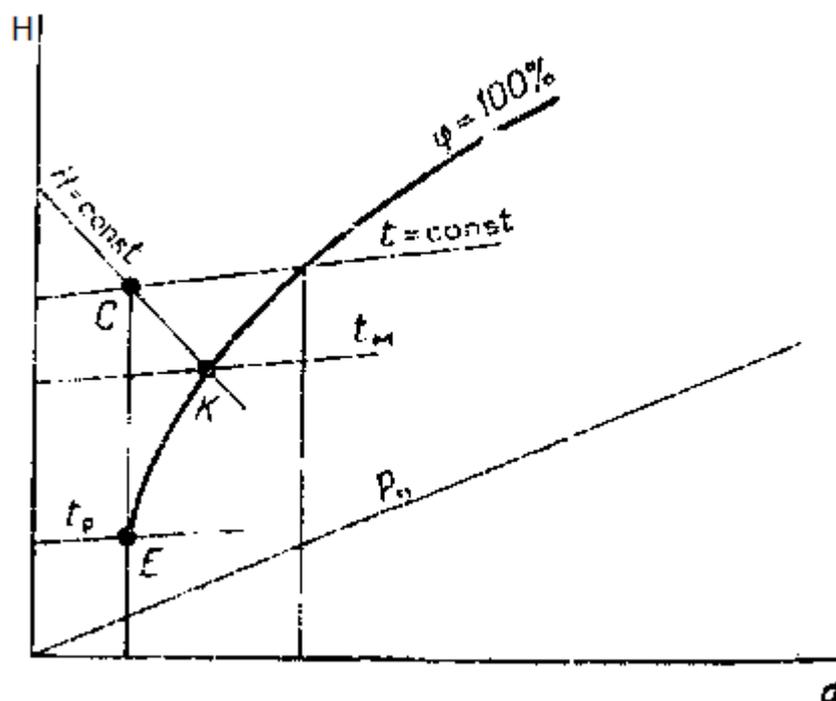


Рис. 1.30 Температура точки росы

Температурой мокрого термометра  $t_m$  называется такая температура, которую принимает влажный воздух в процессе его адиабатного увлажнения при условии полного насыщения.

Исходными для определения параметров состояния влажного воздуха по  $H-d$ -диаграмме служат показания мокрого и сухого термометров, которые в комплекте образуют прибор, называемый психрометром. В несколько упрощенном виде принцип действия психрометра можно представить так. У поверхности жидкости, куда опущена ткань, которой обернут шарик мокрого термометра, в процессе испарения воды образуется слой насыщенного воздуха, при этом  $\varphi = 1$ . В воздухе помещения  $\varphi < 1$ , это и является причиной испарения влаги. При стационарном процессе испарения устанавливаются два равных, но противоположных потока энтальпии: от воздуха помещения к мокрому термометру (поступление теплоты, необходимой для испарения) и от мокрого термометра в окружающий воздух (поток пара). Если бы объем помещения был мал, то его воздух быстро насыщался бы паром, при этом  $\varphi \rightarrow 1$  и испарение прекратилось бы при  $p_n = p_{n,n}$  в воздухе. Мокрый термометр при этом показывал бы неизменную температуру  $t_m$ , так как он находится в тепловом равновесии. Таким образом, одновременно выполняются оба условия:  $H = \text{const}$  и  $t_m = \text{const}$ . Это соответствует процессу  $CK$  на рис. 6.3. В точке  $K$  температуры сухого и мокрого термометра равны,  $t = t_m$ , так как испарения нет. Для определения  $t_m$  точки  $C$  из нее проводят линию  $H = \text{const}$  до пересечения с линией  $\varphi = 1$  ( $\varphi = 100\%$ ), где получают точку  $K$ . Изотерма, проходящая через эту точку, дает  $t_m$  для точки  $C$ .

Допустим, что психрометр показывает  $t_m = 28^\circ\text{C}$  и  $t = 54^\circ\text{C}$ . Необходимо определить параметры влажного воздуха. На линии  $\varphi = 100\%$  (см. рис. 1.30) соответственно  $t_m = 28^\circ\text{C}$  находим точку  $K$  и через нее проводим линию  $H = \text{const}$ , которая при пересечении с линией  $t = 54^\circ\text{C}$  дает точку  $C$ , соответствующую состоянию воздуха в помещении, где помещен психрометр. По этой точке определяем все параметры влажного воздуха:  $\varphi = 15\%$ ;  $p_n = 2,1$  кПа;  $d = 14$  г/кг и  $H = 90$  кДж/кг. Чтобы найти температуру точки росы,

проводим из точки С линию  $d = \text{const}$ , в месте ее пересечения с линией  $\varphi = 100\%$  (точка Е)  $t_p = 20^\circ\text{C}$ .

Процесс изменения состояния влажного воздуха изображается на  $H$ - $d$ -диаграмме прямой линией, проходящей через точки, соответствующие начальному и конечному состояниям влажного воздуха. Если параметры начального состояния воздуха  $H_1$  и  $d_1$ , а конечного  $H_2$  и  $d_2$ , то отношение  $(H_2 - H_1)/(d_2 - d_1) = \varepsilon$  называется *угловым коэффициентом луча*, характеризующего изменение состояния воздуха в косоугольной системе координат. Угловым коэффициентом  $\varepsilon$  измеряется в кДж/кг и показывает, какое количество теплоты получает или отдает воздух на 1 кг воспринятой или отданной влаги. Процессы изменения состояния влажного воздуха, протекающие при одинаковых значениях угловых коэффициентов, характеризуются параллельными лучами. Для нанесения на поле диаграммы луча процесса необходимо, чтобы были известны два параметра начального или конечного состояния воздуха и угловой коэффициент  $\varepsilon$ . Нанесение луча процесса на  $H$ - $d$ -диаграмму по существу сводится к проведению прямой в косоугольной системе координат по заданной точке и угловому коэффициенту.

Рассмотрим метод вычисления угловых коэффициентов и способ нанесения лучей на поле  $H$ - $d$ -диаграммы. Допустим, что к влажному воздуху в количестве  $m$  кг с параметрами  $H_1$  и  $d_1$  подмешали  $m_n$  кг водяного пара с энтальпией  $h_n$ . Требуется найти угловой коэффициент процесса изменения состояния влажного воздуха. Балансовые уравнения по теплоте и влаге с учетом приближенного соотношения  $m_g \approx m$  можно записать в виде:

$$H_1 + m_n h_n / m = H_2;$$

$$d_1 + m_n / m = d_2$$

Из этих уравнений получим

$$\varepsilon = (H_2 - H_1) / (d_2 - d_1) = h_n.$$

## 1.10 Истечение газов и паров

Основными проблемами для технической термодинамики традиционно считают изучение закономерностей превращения теплоты в работу. Типичный способ такого превращения включает два этапа: подвод теплоты к рабочему телу с целью увеличения его внутренней энергии и расширение рабочего тела (чаще всего адиабатное) с целью получения работы. Поскольку превращение теплоты в работу осуществляется непрерывно (циклически). Расширение рабочего тела (газа или пара) часто осуществляется при истечении из сопла — канала, в котором происходит увеличение скорости потока. Высокоскоростной поток газа взаимодействует затем с лопатками турбины, в результате чего от потока отводится техническая работа. Так работают паровые и газовые турбины. Кинетическая энергия выходящего из сопла потока может использоваться и для других целей, например для создания направленного движения воздуха в отапливаемой или вентилируемой зоне, для дробления воды или жидкого топлива в пневматических форсунках, для создания горючей смеси на выходе из газовой горелки и т. д. Речь идет о преобразовании внутренней энергии в кинетическую, поэтому представляет интерес определение скорости истечения газа из сопла по заданным параметрам неподвижного газа. Пусть в большом объеме параметры газа имеют значения  $p_1, v_1, T_1$  из этого объема происходит истечение газа через сопло в среду с параметрами  $p_2, v_2, T_2$  (рис. 1.32). Контрольное сечение 1 проведено в некотором отдалении от сопла, что позволяет считать среду неподвижной, т. е.  $w_1 = 0$ . Контрольное сечение 2 проведено на выходе из сопла.

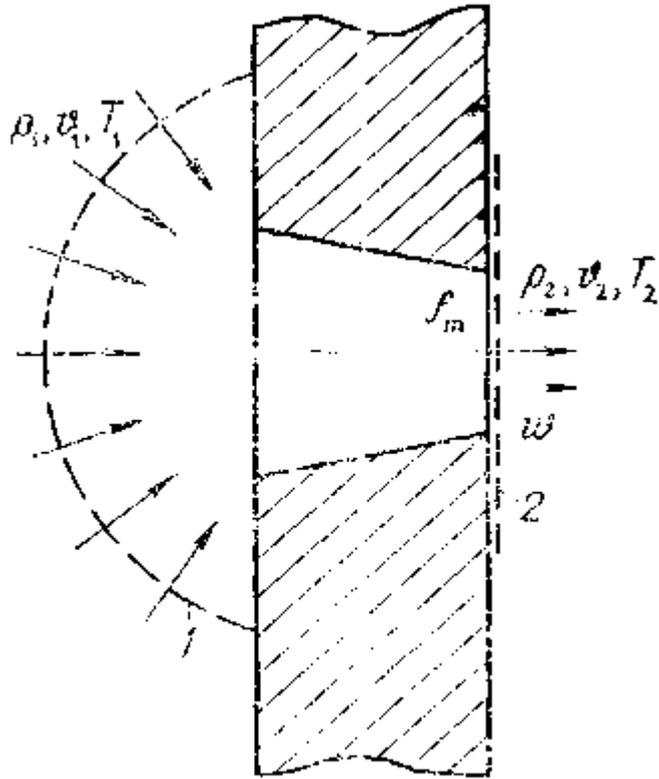


Рис. 1.31. Истечение газа через сопло в среду

Если параметры в сечениях 1 и 2 не изменяются во времени, то устанавливается стационарный режим истечения из сопла с неизменным во времени массовым расходом  $G = wf_m / v_2 = \rho_2 wf_m$ , где  $w = w_2$  и  $f_m$  — соответственно скорость и площадь поперечного сечения на выходе из сопла. Относительно закона изменения  $f$  вдоль оси сопла пока не будем делать никаких допущений, заметим лишь, что этот закон имеет важное значение для процесса преобразования внутренней энергии в кинетическую.

Процесс истечения будем считать изоэнтальпным:  $dq_{mo} = 0$ ,  $dq_{mp} = dl_{mp} = 0$ . Ясно также, что для рассматриваемого истечения газа можно полагать  $gdz = 0$  и  $dl_T = 0$ ; если бы рассматривалось истечение тяжелой жидкости (например, воды), то  $gdz \neq 0$ .

$$dh + wdw = 0; \quad (1.148)$$

$$vdp + wdw = 0; \quad (1.149)$$

из уравнения (1.148) и (1.149) получаем

$$dh - vdp = 0. \quad (1.150)$$

Эти уравнения, проинтегрированные для участка потока между сечениями 1 и 2, принимают следующий вид ( $w_1 = 0$ ):

$$h_2 - h_1 + w^2 / 2 = 0; \quad (1.151)$$

$$\int_1^2 vdp + w^2 / 2 = 0; \quad (1.152)$$

$$h_2 - h_1 - \int_1^2 vdp = 0. \quad (1.153)$$

Интеграл  $-\int_1^2 vdp$ , равный полезной работе  $l_n$  [см. формулу (1.20)], называют *располагаемой работой*. Совершив эту работу, силы давления обеспечивают повышение кинетической энергии потока от 0 до  $w^2/2$ , которой можно располагать по своему усмотрению: превратить в техническую работу турбины, использовать для пневматического распыла воды с целью увлажнения воздуха и т. п. Эту работу можно рассчитать, непосредственно вычислив интеграл [см. уравнение (1.152)] или определив уменьшение энтальпии [см. уравнение (1.153)].

Для обратимого адиабатного истечения идеального газа

$$l_n = -\int_1^2 vdp = -\int_1^2 v_1 (p_1 / p)^{1/k} dp = -k(p_2 v_2 - p_1 v_1) / (k-1) \quad (1.154)$$

или

$$l_n = -(h_2 - h_1) = -c_p(T_2 - T_1), \quad (1.155)$$

где при интегрировании использовано уравнение адиабаты  $pv^k = p_1 v_1^k$ .

Из формулы (1.154) следует, что располагаемая работа  $l_n$  при адиабатном расширении в  $k$  раз больше работы изменения объема  $l$ . Для двухатомного идеального газа, например воздуха,  $k = 1,4$  и кинетическая энергия потока при истечении примерно на 40% больше работы, затраченной на обратимое

адиабатное сжатие газа от давления  $p_1$  до давления  $p_2$ . Нет ли здесь нарушения первого закона термодинамики? Нарушения нет, ибо при накоплении сжатого до давления  $p_2$  газа в большом объеме, из которого происходит истечение, совершалась не только работа сжатия  $\int_1^2 p dv$ , но и работа проталкивания—  $(p_2 v_2 - p_1 v_1)$ , последняя как раз и составляет упомянутые 40 %.

Скорость истечения  $w$  определяется из уравнения (1.151):

$$w = \sqrt{2(h_1 - h_2)}, \quad (1.156)$$

при этом всегда  $h_1 > h_2$ . Формула (1.156) позволяет рассчитать скорость обратимого адиабатного истечения не только идеального, но и реального газа, например водяного пара, при использовании таблиц или  $h$ — $s$ -диаграммы.

Для идеального газа, кроме того, справедливы формулы, которые можно получить из уравнений (1.152), (1.154) и (1.155) с использованием других уравнений идеального газа: уравнения адиабаты, уравнения Клапейрона и др.:

$$w = \sqrt{2c_p(T - T_2)}; \quad (1.157)$$

$$w = \sqrt{(2k / (k - 1)) p_1 v_1 (1 - \beta^{(k-1)/k})}; \quad (1.158)$$

$$w = \sqrt{(2k / (k - 1)) RT_1 (1 - \beta^{(k-1)/k})}; \quad (1.159)$$

В наиболее общей из формул (1.156) — (1.159) — формуле (1.186) никаких ограничений на значение разности энтальпий  $h_1 - h_2$  не накладывается; например, для современной паротурбинной установки при  $p_1 = 24$  МПа,  $t_1 = 565^\circ\text{C}$  имеем  $h_1 \approx 3400$  кДж/кг, после обратимого адиабатного расширения до  $p_2 = 0,005$  МПа энтальпия  $h_2 \approx 1920$  кДж/кг. Формула (1.156) дает для этих условий скорость истечения примерно 1700 м/с. Действительную скорость истечения можно найти по уравнению расхода  $w = Gv_2 / f$ , где  $G$  определяется количеством сконденсировавшегося пара, а  $v_2$  — по значениям  $p_2$  и  $T_2$ . Найденная таким образом скорость (без учета потерь и технических

ограничений) была бы менее 600 м/с. Полученное расхождение — почти в 3 раза нельзя обосновать погрешностями измерений. Это расхождение важно и в практическом отношении: оно показывает, что в рассматриваемом процессе истечения пара удастся реализовать лишь 10 % располагаемой работы, остальная часть безвозвратно теряется, не превращаясь в кинетическую энергию.

Поставленную проблему рассмотрим, ограничившись идеальным газом. При постоянных параметрах  $p_1, v_1, T_1$  расход  $G$  зависит только от  $p_2$  и  $v_2$ . Действительно, используя формулу (1.158), имеем

$$G = (f_m / v_2) \sqrt{(2k / (k - 1)) p_1 v_1 (1 - \beta^{(k-1)/k})}.$$

Внесем под радикал  $v_2$  и используем отношение  $(v_1 / v_2)^2 = (p_2 / p_1)^{2/k} = \beta^{2/k}$ , вытекающее из уравнения адиабаты. Тогда получим уравнение, связывающее  $G$  и  $\beta$ :

$$G = f_m \sqrt{(2k / (k - 1)) p_1 v_1 \beta^{2/k} (1 - \beta^{(k-1)/k})}. \quad (1.160)$$

которое можно представить также в виде

$$G = \varphi(p_1, v_1) \beta^{1/k} \sqrt{1 - \beta^{(k-1)/k}}, \quad (1.161)$$

где  $\varphi(p_1, v_1) = f_m \sqrt{(2k / (k - 1)) p_1 v_1}$ .

Расследуем функцию (1.161). На интервале изменения  $\beta$  от 0 до 1 эта функция непрерывна и принимает нулевые значения на краях интервала, кроме того, она всюду положительна. Это значит, что на интервале  $0 \leq \beta \leq 1$  функция имеет нечетное число экстремумов, например один максимум или два максимума и минимум между ними и т. д. Стандартное исследование функции (1.161) на экстремум путем приравнивания нулю первой производной  $dG / d\beta = 0$  показывает, что на интервале имеется только один максимум в точке с координатой  $\beta$ :

$$\beta = \beta_{кр} = [(k + 1) / 2]^{k(1-k)}. \quad (1.162)$$

Функция (1.162) изображена в виде кривой  $ABC$  на рис. 1.33. В точке  $A$   $\beta = 1$ , т. е.  $p_2 = p_1$  и истечения нет. В точке  $A_1$   $\beta < 1$  и под влиянием возникшей разности давлений устанавливается определенное значение расхода  $G_1$ . В точке  $A_2$  разность давлений больше и соответственно  $G_2 > G_1$ . Под влиянием уменьшения  $p_2$  (напомним, что  $p_1 = \text{const}$ ) устанавливаются режимы с возрастающим расходом вплоть до  $G_{кр}$  в точке  $B$ . Ветвь кривой  $BC$  явно не имеет физического смысла: с уменьшением  $p_2$  расход должен по-прежнему увеличиваться. Однако измерение  $G$  показывает, что такого увеличения нет и расход изменяется вдоль прямой  $BD$  при  $\beta \leq \beta_{кр}$ . Значению  $\beta_{кр}$  соответствует определенная скорость истечения  $w_{кр}$ , которую можно найти, подставив выражение (1.162) в уравнение (1.158):

$$w_{кр} = \sqrt{(2k / (k + 1)) p_1 v_1}. \quad (1.163)$$

Заменим произведение  $p_1 v_1$  произведением  $p_{кр} v_{кр}$ , используя для этого уравнение адиабаты и обозначение  $\beta_{кр} = p_{кр} / p_1$ , этим имеем:

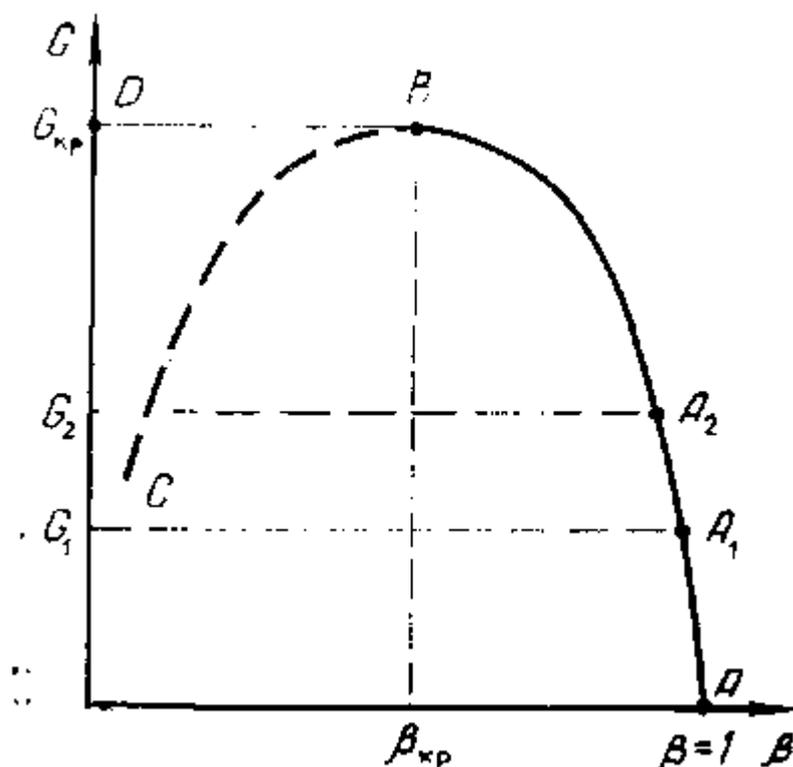


Рис. 1.32 Исследование функции на экстремум

$$w_{кр} = \sqrt{kp_{кр}v_{кр}} = \sqrt{kRT_{кр}}. \quad (1.164)$$

Известно, что величина  $kp v = kRT$  для идеального газа равна квадрату скорости звука  $a^2$ . Следовательно,

$$w_{кр} = a. \quad (1.165)$$

Кратко сформулируем результаты проведенного анализа. При увеличении разности давлений  $p_1 - p_2$ , которая играет в данном случае роль движущей силы, массовый расход через сопло возрастает лишь до определенного предела и затем остается постоянным вплоть до режима истечения в вакуум ( $\beta = 0$ ). При  $\beta \leq \beta_{кр}$  в выходном сечении сопла устанавливается скорость потока, равная скорости звука, определяемой термодинамическими параметрами газа в этом сечении сопла (ее называют *местной* скоростью звука).

Эти выводы ( $G \leq G_{кр}$ ,  $w \leq w_{кр} = a$ ) справедливы и для реального газа.

В результате анализа возникают по меньшей мере два вопроса. Во-первых, вопрос о физической сущности ограничения степени превращения внутренней энергии в кинетическую; этот вопрос рассмотрим позднее. Во-вторых, вопрос о правильности формулировки задачи об истечении газа. Ведь формула (1.156) выражает первый закон термодинамики и вдруг оказывается, что применение этого закона — закона сохранения энергии — ограничено условием  $w \leq a$ . Сомнения, связанные со вторым вопросом, действительно имеют основания. При формулировке задачи об истечении газа не был учтен второй фундаментальный закон — закон сохранения массы.

Закон сохранения массы для сплошной среды формулируется в виде уравнения неразрывности. Для процесса истечения это уравнение имеет вид:

$$G = w_f f / v = const, \quad (1.166)$$

где  $f$  — изменяющаяся вдоль оси потока площадь поперечного сечения сопла;  $w_f$  — скорость потока в данном сечении,  $0 \leq w_f \leq w$ .

Запишем уравнение (1.166) в дифференциальной форме, прологарифмировав его и взяв дифференциал от обеих частей:

$$dw_f / w_f + df / f - dv / v = 0. \quad (1.167)$$

Уравнение (1.149) с учетом обозначения скорости через  $w_f$  можно переписать следующим образом:

$$w_f dw_f = -v^2 (\partial p / \partial v)_s dv / v, \quad (1.168)$$

для чего его необходимо умножить на  $v/dv$  и учесть, что оно записано для адиабатного процесса.

Положительная величина  $-v^2 (\partial p / \partial v)_s$  равна квадрату скорости звука  $a^2$ . В правильности этого утверждения для идеального газа можно убедиться, определив производную по уравнению адиабаты  $p v^k = \text{const}$ , тогда получим  $a^2 = k p v$ . Для реального газа, капельной жидкости или твердого тела выражение

$$a = \sqrt{-v^2 (\partial p / \partial v)_s} \quad (1.169)$$

можно получить, применяя основные уравнения механики сплошной среды к процессу распространения слабого возмущения (звуковой волны).

Важной характеристикой потоков сжимаемого газа является *число Маха*  $M = w/a$ , равное отношению скорости потока к скорости звука. В данном случае

$$M = w_f / a. \quad (1.170)$$

При  $M < 1$  поток называют дозвуковым, при  $M > 1$  — сверхзвуковым. С учетом выражений (1.169) и (1.170) уравнение (1.168) можно записать так:

$$dv / v = M^2 dw_f / w_f. \quad (1.170)$$

Из уравнения (1.171) ясно видна роль числа  $M$  как критерия сжимаемости: чем меньше  $M$ , тем меньше влияние изменения скорости [и связанного с ним по уравнению (1.149) изменения давления] на относительное изменение объема  $dv/v$ . При этом по уравнению (1.149)  $dp$  и  $dw_f$  имеют противоположные знаки, что значит, что в направлении падения давления ( $dp < 0$ ) скорость возрастает

( $dw_j > 0$ ), а по уравнению (1.148) возрастает и объем ( $dv > 0$ ). Указанному ранее условию несжимаемости  $w < 0,3a$  соответствует  $M < 0,3$  или  $M^2 < 0,09$ , что, согласно уравнению (1.171), следует понимать так: если изменению скорости соответствует примерно в 10 раз меньшее изменение объема, то поток можно считать несжимаемым.

Подставив уравнение (1.171) в уравнение (1.167), получим выражение, связывающее скорость потока в данном сечении с площадью этого сечения:

$$df / f = (M^2 - 1)dw_f / w_f. \quad (1.172)$$

Назначение сопла состоит в разгоне потока, поэтому всегда  $dw_f > 0$ . Согласно уравнению (1.172) возрастание скорости вдоль оси сопла обеспечивается определенным законом изменения площади поперечного сечения  $f$ : в дозвуковом потоке ( $M < 1$ ) площадь поперечного сечения должна уменьшаться ( $df < 0$ ), при переходе через скорость звука ( $M = 1$ ) она должна быть минимальной ( $df = 0, f = f_m$ ) и в сверхзвуковом потоке ( $M > 1$ ) площадь сечения должна увеличиваться ( $df > 0$ ).

Сопло, для которого выполнены перечисленные условия, носит название *сопла Лавалья*. Рассмотренное ранее сопло с  $df < 0$  называют простым соплом (а также суживающимся, коноидальным).

Применение сопла Лавалья позволяет получить скорость, определяемую формулой (1.156). Для этого площадь выходного сечения  $f_2$  и площадь сечения горловины  $f_m$  должны быть рассчитаны в соответствии с заданными параметрами истечения. Значение  $f_2$  определяется заданным расходом  $G$ , скоростью истечения  $w$  и удельным объемом  $v_2$ , который находят по параметрам  $p_2, T_2$  среды за соплом. Площадь сечения горловины определяют аналогично:  $f_m = Gv_{кр} / w_{кр}$ , где  $v_{кр}$  — удельный объем газа при  $w_f = a$ . Величину  $v_{кр}$  для идеального газа можно определить по уравнению адиабаты для  $p_{кр} = \beta_{кр} p_1$ , где для  $k = 1,4$  по формуле (1.162) имеем  $\beta_{кр} = 0,528$ . Для реальных газов критическое давление может быть найдено по точке пересечения кривых

$w_f = w_f(p)$  и  $a = a(p)$ , первая из которых построена по формуле (1.156) с использованием, например, для водяного пара таблиц или  $h-s$ -диаграммы, а вторая — с использованием таблиц термодинамических свойств вещества.

Используются также приближенные расчеты по формулам идеального газа со значением показателя адиабаты  $k$  для данного реального газа.

Длина сопла Лавая выбирается по следующим рекомендациям: длина суживающейся части должна быть минимальной, а профиль сопла — плавным с целью уменьшения потерь на трение; длина расширяющейся части должна обеспечивать угол раствора  $11-12^\circ$  для безотрывного течения с минимальными потерями.

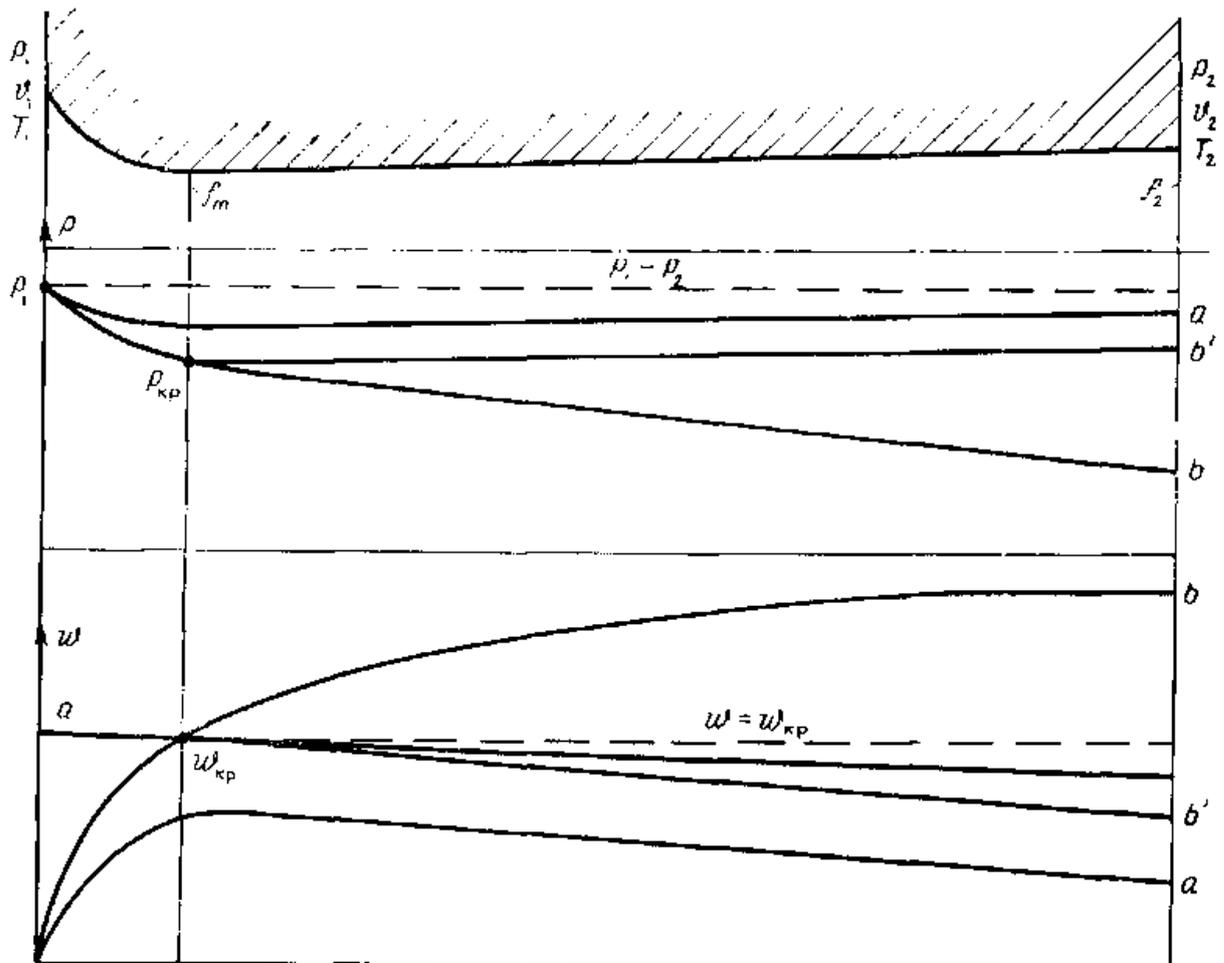


Рис. 1.33 Режимы работы сопла Лавая

Используются также приближенные расчеты по формулам идеального газа со значением показателя адиабаты  $k$  для данного реального газа.

Длина сопла Лавая выбирается по следующим рекомендациям: длина суживающейся части должна быть минимальной, а профиль сопла — плавным с целью уменьшения потерь на трение; длина расширяющейся части должна обеспечивать угол раствора  $11—12^\circ$  для безотрывного течения с минимальными потерями.

Физическую сущность явления «запирания» простого сопла, возникающего и при нерасчетных режимах работы сопла Лавая, рассмотрим, пользуясь рис. 1.33. Кривые изменения давления и скорости, заканчивающиеся в точке  $a$ , соответствует нерасчетному режиму с массовым расходом ниже номинального; скорость потока всюду дозвуковая. Некоторое снижение давления  $p_2$  передается против течения со скоростью  $a - w_f > 0$  в виде волны малого возмущения и вызывает изменение режима работы сопла, а именно некоторое увеличение скорости истечения  $w$ . Последовательные уменьшения  $p_2$  могут продолжаться до наступления режима, обозначенного точкой  $b'$ , который является предельным дозвуковым режимом. При дальнейшем снижении  $p_2$  наступает расчетный режим (обозначен точкой  $b$ ), при этом в сечении устанавливается скорость потока, равная местной скорости звука, а в сечении  $f_2$  — расчетная сверхзвуковая скорость истечения  $w$ . Дальнейшее снижение  $p_2$  не приводит к повышению скорости истечения и расхода, как и в простом сопле. В этом случае волна малого возмущения не может распространяться против течения, она сносится вниз по потоку со скоростью  $w_f - a > 0$ . Среда в потоке внутри сопла не воспринимает изменений давления среды за соплом.

Необратимость при истечении можно учесть, если записать уравнения с учетом трения:

$$w dw = -v dp - dl_{mp}; dh = v dp + dq_{mp}.$$

Из этих уравнений видно, что трение приводит к уменьшению располагаемой работы, идущей на увеличение кинетической энергии. При этом

на такую же величину снижается и приращение энтальпии, так что соблюдается равенство  $dh = -w dw$ , которое представляет собой уравнение, в котором трение учтено. Остается справедливой и основная расчетная формула (1.156). Здесь отметим лишь, что действительная скорость истечения  $w_d$  ниже скорости истечения, определяемой по формуле (1.156), и это снижение учитывается *скоростным коэффициентом*  $\varphi = w_d / w = 0,95—0,98$ .

### 1.11 Циклы двигателей внутреннего сгорания

Двигатель внутреннего сгорания (ДВС) – это тепловой двигатель, в котором химическая энергия топлива, сгорающего в рабочей полости, преобразуется в механическую работу. В ДВС процесс горения топлива происходит внутри рабочего цилиндра.

По роду применяемого топлива ДВС подразделяются на двигатели жидкого топлива и газовые.

По способу заполнения цилиндра свежим зарядом двигатели подразделяются на четырехтактные и двухтактные. В двухтактном ДВС рабочий процесс осуществляется за два хода поршня и один оборот коленвала, в четырехтактном ДВС рабочий цикл совершается за четыре хода поршня и за два оборота коленвала.

По способу приготовления рабочей смеси из топлива и воздуха ДВС подразделяют на двигатели с внутренним смесеобразованием – дизельные двигатели, где топливо воспламеняется при впрыскивании его в сжатый воздух, нагретый до высоких температур; и внешним – карбюраторные, где зажигание рабочей смеси производится электрической искрой.

Первый практически пригодный газовый ДВС был сконструирован французским механиком Ленуаром в 1860 г.. В 1876г. немецкий изобретатель Отто построил более совершенный четырехтактный газовый двигатель, в 1880 г. инженер Костович в России построил бензиновый карбюраторный двигатель,

а в 1897 г. немецкий инженер Дизель создал двухтактный ДВС с воспламенением от сжатого воздуха – дизельный двигатель.

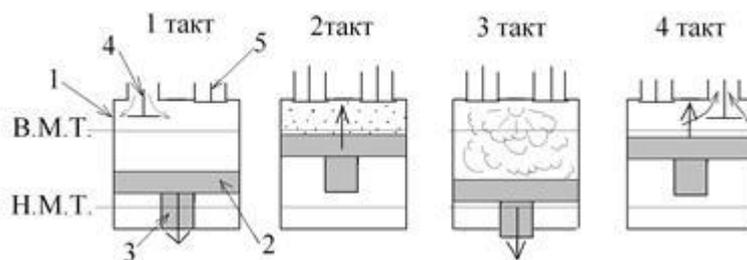


Рис. 1.34 Схема работы 4 – х тактного карбюраторного двигателя.

В цилиндре 1 расположен поршень 2, шатун 3 соединен с одной стороны с поршнем, а с другой с коленчатым валом. В верхней части цилиндра расположены впускной 4 и выпускной 5 клапаны. Крайние положения поршня называются верхней мертвой точкой (ВМТ) и нижней мертвой точкой (НМТ), расстояние между ВМТ и НМТ называется ходом поршня.

Двигатель работает следующим образом. При первом такте всасывании - поршень движется вниз и засасывает горючую смесь в цилиндр за счет создаваемого разрежения. При этом всасывающий клапан открыт, выпускной закрыт.

Второй такт - сжатие происходит при движении поршня вверх от НМТ. При этом оба клапана закрыты. При приближении к ВМТ горючая смесь зажигается от электрической искры.

Третий такт-рабочий ход осуществляется за счет давления газа. Действием давления поршень движется вниз от ВМТ до НМТ, создавая крутящий момент на коленчатом валу.

Четвертый этап – выпуск, при котором через открытый выпускной кран при движении поршня вытесняются из цилиндра продукты сгорания.

Таким образом, из четырех тактов только при третьем такте совершается полезная работа; во всех остальных происходит затрата работы.

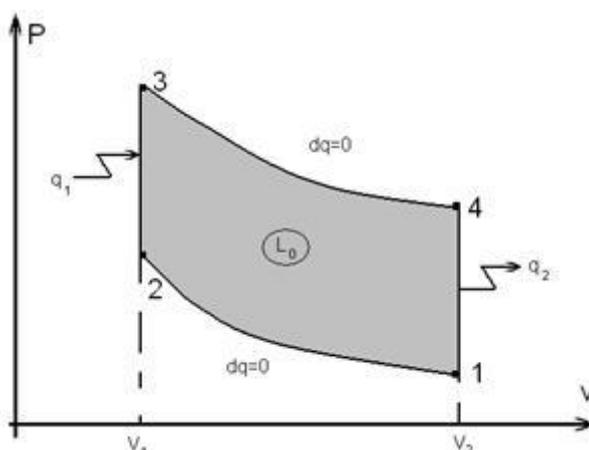
Рабочий процесс в двухтактном двигателе осуществляется следующим образом. После сгорания топлива начинается процесс расширения газа. В конце расширения поршень открывает выпускные окна, через которые удаляется часть отработанных газов. Далее, продолжая двигаться вниз, поршень открывает продувочные окна, при этом цилиндр продувается сжатым воздухом. В начале второго такта - сжатия продолжается процесс удаления отработанных газов и заполнения цилиндра свежим зарядом. После того, как поршень закроет окна, начинается сжатие горючей смеси. Типы двигателей:

- 1) с подводом тепла при постоянном объеме (идеальный цикл Отто) ;
- 2) с подводом тепла при постоянном давлении (цикл Дизеля);
- 3) цикл со смешанным подводом тепла – частично при  $v=\text{const}$  и  $p=\text{const}$  (идеальный цикл Тринклера).

Рассмотрим принцип действия различных ДВС с использованием теоретической диаграммы идеального двигателя. При этом в рассматриваемом термодинамическом процессе вводится ряд допущений:

- 1) рабочее тело – идеальный газ;
- 2) рабочее тело не покидает цилиндр;
- 3) свойства рабочего тела не меняются.

На рисунке 1.35 представлена теоретическая диаграмма четырехтактного двигателя с циклом подвода тепла при  $v=\text{const}$ . Этот способ подвода тепла имеет место в карбюраторном двигателе с использованием легкого топлива – бензин, газ, спирт и т.п.



*Рис. 1.35 –цикл Отто*

*а-1 – всасывание рабочей смеси; 1-2 – адиабатное сжатие рабочего тела; 2-3 – изохорный подвод тепла (сгорание топлива); 3-4 – адиабатное расширение рабочего тела (рабочий ход); 4-1 – изохорный отвод тепла; 1-а – выхлоп.*

При ходе поршня вниз (1 такт) в цилиндр двигателя 1 засасывается через впускной клапан 4 готовая рабочая смесь. Это смесь горючих газов или паров жидкого топлива с воздухом. В теоретической диаграмме предполагается, что всасывание происходит при постоянном давлении, равном атмосферному (линия а-1).

### **1.12 Циклы газотурбинных установок и реактивных двигателей.**

Газотурбинные установки относятся к числу двигателей внутреннего сгорания. Газ, получившийся в результате сгорания топлива в камере сгорания, направляется на турбину. Продукты сгорания, расширяясь в сопловом аппарате и на рабочих лопатках турбины, производят на колесе турбины механическую работу.

ГТУ по сравнению с поршневыми двигателями обладают целым рядом преимуществ:

- 1) простота силовой установки;
- 2) отсутствие поступательно движущихся частей, что позволяет повысить механический к.п.д.;
- 3) получение больших чисел оборотов, что позволяет существенно снизить вес и габариты установки;
- 4) осуществление цикла с полным расширением и тем самым большим термическим к.п.д.

Эти преимущества ГТУ способствовали ее распространению во многих отраслях техники и особенно в авиации.

В основе работы ГТУ лежат идеальные циклы, состоящие из простейших термодинамических процессов. Термодинамическое изучение этих циклов

базируется на предположениях аналогичных тем, которые были сделаны в предыдущем разделе (циклы ДВС), а именно: циклы обратимы, подвод теплоты происходит без изменения химического состава рабочего тела цикла, отвод теплоты предполагается обратимым, гидравлические и тепловые потери отсутствуют, рабочее тело представляет собой идеальный газ с постоянной теплоемкостью.

К числу возможных идеальных циклов ГТУ относят:

а) цикл с подводом теплоты при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ) - цикл Брайтона;

б) цикл с подводом теплоты при постоянном объеме ( $v = \text{const}$ );

в) цикл с регенерацией теплоты.

Во всех циклах ГТУ отвод теплоты при наличии полного расширения в турбине происходит при постоянном давлении.

Из-за сложной конструкции камеры сгорания цикл ГТУ с изохорным подводом теплоты применяется крайне редко даже несмотря на то, что имеет повышенный КПД по сравнению с циклом Брайтона. Из перечисленных циклов наибольшее применение получил цикл с подводом теплоты при  $p = \text{const}$ , поэтому далее подробно его рассмотрим.

Схема и цикл ГТУ с подводом теплоты при  $p = \text{const}$

(цикл Брайтона)

Обратимый цикл ГТУ при  $p = \text{const}$  называется циклом Брайтона. Схема ГТУ представлена на рис. 10. Компрессор (ВК), приводимый в движение газовой турбиной (ГТ), подает сжатый воздух в камеру сгорания (КС), в которую впрыскивается жидкое топливо, подаваемое насосом (ТН), находящимся на валу турбины. Продукты сгорания расширяются на рабочих лопатках турбины и выбрасываются в атмосферу.

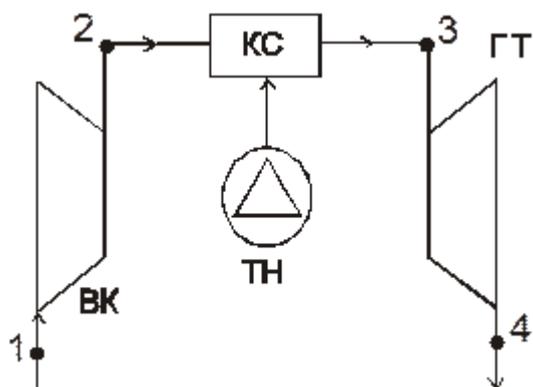


Рис. 1.36 Схема ГТУ

*ВК-воздушный компрессор; ТН-топливный насос; КС- камера сгорания; ГТ-газовая турбина; ЭГ - электрогенератор*

### 1.13 Цикл паросиловых установок.

Основным циклом современных паротурбинных установок (ПТУ) является *цикл Ренкина на перегретом паре*. Перегретый пар с давлением  $p_1$  и температурой  $t_1$  поступает в паровую турбину ПТ (рис. 1.37), где, адиабатически расширяясь, совершает работу. После турбины влажный пар с давлением  $p_2$  поступает в конденсатор К, где, отдавая теплоту охлаждающей воде, полностью конденсируется при  $p = \text{const}$  и  $t = \text{const}$ . Конденсат с помощью питательного насоса ПН, адиабатически повышающего его давление до  $p_1$ , вновь подается в парогенератор (паровой котел) ПГ, в котором получает теплоту от горячих продуктов сгорания топлива, нагревается при постоянном давлении  $p_1$  до температуры кипения, испаряется, а образовавшийся сухой насыщенный пар перегревается в пароперегревателе ПП до температуры  $t_1$ . Теоретический цикл, совершаемый в данной установке, представлен на рис. 1.38

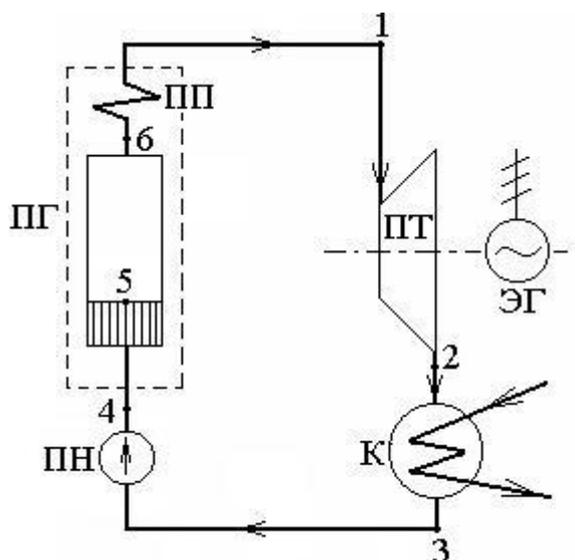


Рис. 1.37 Схема паротурбинной установки

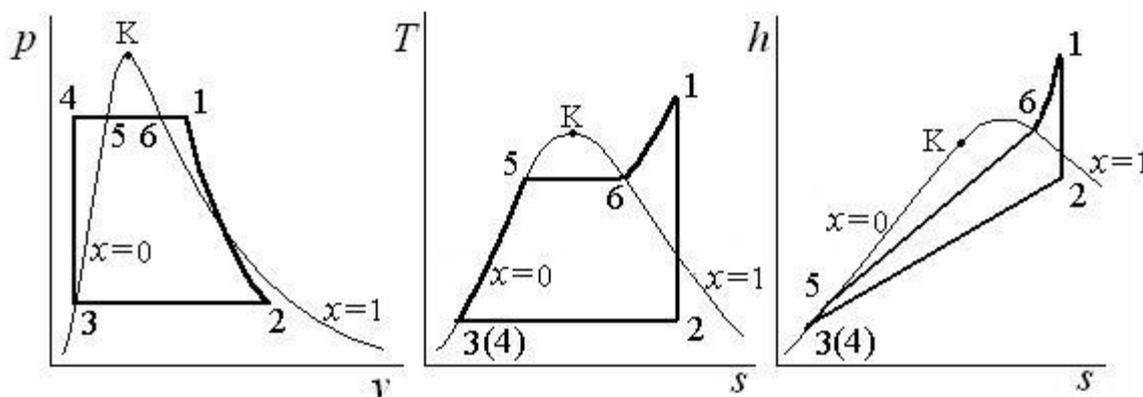


Рис. 1.38 Цикл Ренкина на перегретом паре:

1–2 – адиабатное расширение пара в ПТ; 2–3 – изобарно-изотермическая конденсация пара в К; 3–4 – адиабатно-изохорное повышение давления воды в ПН; 4–1 – изобарный подвод теплоты в ПГ с превращением воды в перегретый пар

### 1.13 Циклы холодильных установок.

Холодильные установки предназначены для понижения температуры тел ниже температуры окружающей среды и работают по обратному циклу. В обратном цикле телота передается от холодного источника к горячему.

На рис. 1.39 приведена принципиальная схема *воздушной холодильной установки*. Из холодильной камеры ХК воздух поступает в компрессор К, где его давление повышается от  $p_1$  до  $p_2$ , а температура – от  $T_1$  до  $T_2$ . Сжатый

компрессором воздух поступает в теплообменный аппарат (охладитель) ТА, где охлаждается при  $p_2 = p_3 = \text{const}$ , отдавая теплоту в окружающую среду. После этого воздух расширяется в детандере Д от давления  $p_3$  до  $p_4$ , совершая полезную работу. При расширении его температура понижается от  $T_3$  до  $T_4$ . Холодный воздух поступает в холодильную камеру, где он отбирает теплоту от охлаждаемого тела при постоянном давлении ( $p_4 = p_1 = \text{const}$ ).

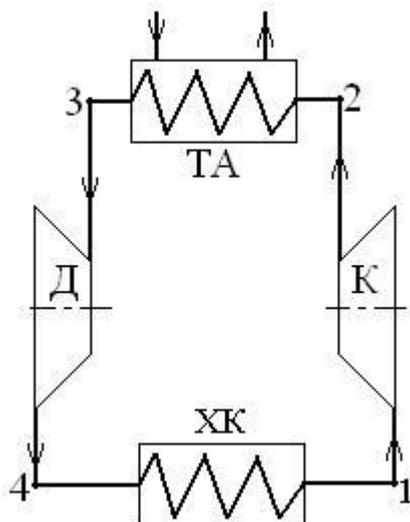


Рис. 1.39 Принципиальная схема воздушной холодильной установки

## ГЛАВА 2. Тепломассообмен.

### 2.1 Основные положения теплопроводности.

Теплопередача — это учение о процессах передачи теплоты. Самопроизвольный процесс распространения и передачи теплоты между телами в пространстве с неоднородным полем температуры называют *теплообменом*. Существуют три вида теплообмена: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение.

*Теплопроводность* — это перенос теплоты при неросредственном соприкосновении более и менее нагретых частиц посредством хаотического (теплого) движения микрочастиц (молекул, атомов).

*Конвекция* — это перенос теплоты, осуществляемый перемещаемися в пространстве объёмами среды. Совокупный процесс теплопроводности и конвекции называется *конвективным теплообменом*.

*Тепловое излучение* — перенос теплоты посредством электромагнитных волн между двумя взаимно излучающими поверхностями.

Совокупность всех трех видов теплообмена называется *сложным теплообменом*.

Большое практическое значение имеет конвективный теплообмен между движущейся жидкостью и поверхностью ее раздела с другой средой, например, конвективный теплообмен между жидкостью и поверхностью твердого тела, между газом и поверхностью капельной жидкости и т. п. Такой конвективный теплообмен называют *теплоотдачей*.

Различают два вида конвекции (т. е. движения жидкости)— *свободную* и *вынужденную*. В конвекции первого вида движущая сила обусловлена разностью плотностей жидкости в месте ее контакта с поверхностью тела, имеющей другую температуру, и вдали от этой поверхности. Из-за разности плотностей возникают подъемные (архимедовы) силы. Такая конвекция происходит, например, в сосуде с жидкостью, в которую погружена нагревательная спираль.

Вынужденная конвекция происходит под действием внешней движущей силы, здесь жидкость обтекает поверхность, имеющую более высокую или более низкую температуру, чем температура самой жидкости. Скорость движения жидкости при вынужденной конвекции больше, чем при свободной, поэтому в этом случае при заданном перепаде температур может быть передано больше теплоты. Возрастание теплового потока связано с необходимостью расхода энергии, затрачиваемой для приведения жидкости в движение.

Совокупность двух или трех видов теплообмена называют *сложным, теплообменом*. Изучение закономерностей сложного теплообмена представляет собой довольно трудную задачу. Поэтому каждый из трех видов теплообмена изучают отдельно, после чего становится возможным вести расчеты, относящиеся к сложному теплообмену.

Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества — *массообменом*. Совместное протекание процессов теплообмена и массообмена называется *тепломассообменом*.

## 2.2 Температурное поле

*Температурным полем* называется совокупность значений температуры в данный момент времени во всех точках изучаемого пространства. В общем случае уравнение температурного поля имеет вид

$$t = F(x, y, z, \tau), \quad (2.1)$$

где  $t$  — температура среды;  $x, y, z$  — координаты точки среды;  $\tau$  - время.

Температурное поле, изменяющееся во времени, называется *нестационарным*, температурное поле, не изменяющееся во времени — *стационарным*. Стационарное температурное поле описывается зависимостью

$$t = f(x, y, z); \partial t / \partial \tau = 0. \quad (2.2)$$

Температурное поле, описываемое выражениями (2.1) и (2.2), является трехмерным. Если температурное поле изменяется только по двум координатам, то оно называется *двухмерным* и описывается зависимостью:

$$t = \psi(x, y, \tau); \partial t / \partial z = 0.$$

Температурное поле, изменяющееся по одной координате, называется *одномерным* и имеет вид:

$$t = \varphi(x, \tau); \partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0.$$

Одномерное стационарное температурное поле имеет вид:

$$t = f(x); \partial t / \partial \tau = 0; \partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0.$$

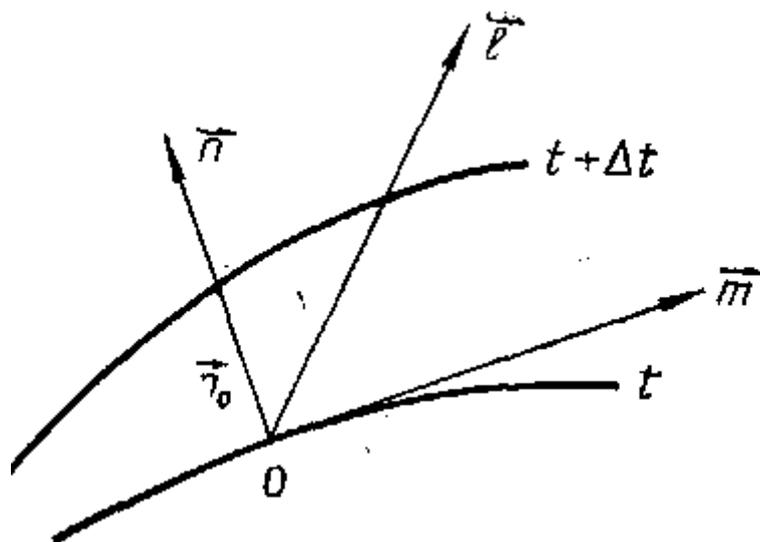


Рис. 2.1 Градиент температуры

Температурное поле можно охарактеризовать с помощью изотермических поверхностей. *Изотермической поверхностью* называется геометрическое место точек, имеющих в данный момент времени одинаковую температуру. Изотермические поверхности, соответствующие разным температурам, не могут пересекаться между собой. Они могут замыкаться сами на себя либо оканчиваться на поверхности тела.

При пересечении изотермических поверхностей с какой-либо плоскостью, например с плоскостью чертежа, они оставляют на этой плоскости следы в виде семейства кривых, называемых *изотермами*.

Рассмотрим две изотермы, температуры которых отличаются на малую величину  $\Delta t$  (рис. 2.1). Наибольшее изменение температуры будет происходить в направлении нормали  $\vec{n}$  к изотермической поверхности.

*Градиент температуры* есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры. Он определяется выражением:

$$\text{grad}t = \vec{n}_0(\partial t / \partial n),$$

где  $\vec{n}_0$  — единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры.

Производная температуры по направлению  $dt/dl$  зависит от направления, задаваемого вектором  $\vec{l}$ ; например, для направления  $\vec{m}$  (см. рис. 4.1) она равна нулю, а для направления  $\vec{n}$  — максимальна. Именно эта максимальная производная  $dt/dn$  и определяет длину вектора  $\text{grad} t$ . Эта длина (модуль вектора) равна:

$$|\text{grad} t| = \sqrt{\partial t / \partial x + \partial t / \partial y + \partial t / \partial z}.$$

Направление вектора  $\text{grad} t$  дается единичным вектором  $\vec{n}_o$ .

### 2.3 Теплопроводность

Связь между количеством теплоты  $dQ$ , Дж, которое за время  $d\tau$  проходит через элементарную площадку  $dF$ , расположенную на изотермической поверхности, и градиентом температуры  $dt/dn$  устанавливается законом Фурье:

Множитель пропорциональности  $\lambda$  в выражении (2.3)

$$dQ = -\lambda(\partial t / \partial n)dF d\tau. \quad (2.3)$$

определяется физическими свойствами среды, в которой происходит распространение теплоты, и называется *теплопроводностью*. Справедливость выражаемого уравнением (2.3) закона подтверждают полученные на его основе результаты расчетов, согласующиеся с экспериментальными данными.

Количество теплоты, переносимое в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности  $\vec{q}$ , Вт/м<sup>2</sup>, называется *плотностью теплового потока*:

$$\vec{q} = dQ / dF d\tau = -\lambda \text{grad} t = -\lambda \vec{n}(\partial t / \partial n). \quad (2.4)$$

Вектор  $\vec{q}$  направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением максимального убывания температуры, так как теплота передается от более нагретой области к менее нагретой в соответствии со вторым законом термодинамики. Следовательно, векторы  $\vec{q}$  и  $\text{grad} t$  лежат на одной прямой, но направлены в

противоположные стороны, поэтому в правой части уравнения (2.4) стоит знак «минус».

Если в каждой точке температурного поля провести элементы нормалей  $\Delta n$  к изотермическим поверхностям, то получится семейство Ломаных линий, которые при беспредельном уменьшении отрезков  $\Delta n$  превратятся в кривые, называемые *линиями теплового тока*. Модуль вектора  $\mathbf{q}$  равен  $|\vec{q}| = -\lambda(\partial t / \partial n)$ .

Количество теплоты, Вт, проходящей в единицу времени через изотермическую поверхность площадью  $F$ , называется *тепловым потоком* и определяется из выражения:

$$Q = \int_F \mathbf{q} dF = - \int_F \lambda (\partial t / \partial n) dF.$$

Полное количество теплоты, Дж, проходящей через изотермическую поверхность площадью  $F$  за время  $\tau$ , равно

$$Q_\tau = -\lambda \int_0^\tau \int_F (\partial t / \partial n) dF d\tau.$$

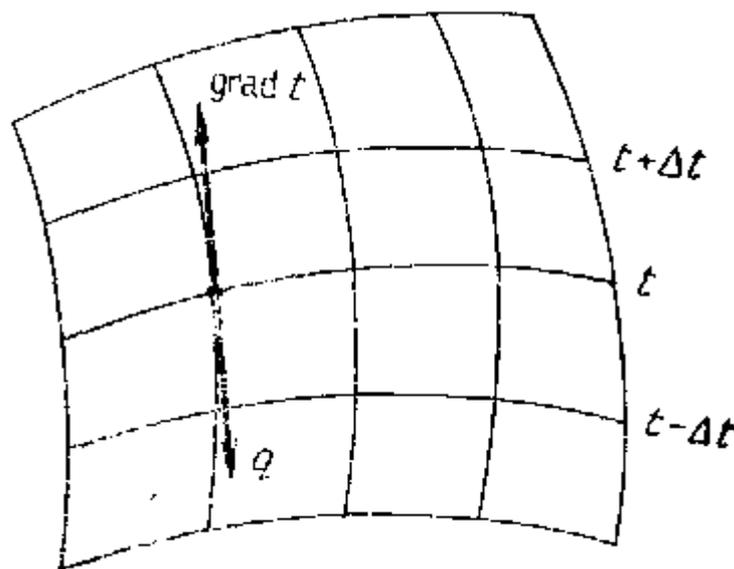


Рис. 2.2 Линии теплового тока ортогональны к изотермическим поверхностям

Из уравнения (2.4) следует, что теплопроводность

$$\lambda = |\vec{q}| / \text{grad} t.$$

Следовательно, теплопроводность численно равна количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при градиенте температуры, равном 1 К/м. Единица теплопроводности— Вт/(м·К).

Чем больше значение  $\lambda$ , тем большей способностью проводить теплоту обладает тело. В общем случае теплопроводность для данного тела не является величиной постоянной: для твердых тел  $\lambda$  зависит от температуры, а для жидких и газообразных и от давления. Для металлов (кроме алюминия) теплопроводность с увеличением температуры несколько убывает: это означает, что холодный металл проводит теплоту лучше, чем нагретый. Теплопроводность металлов колеблется в пределах 2,3—420 Вт/(м·К).

Для изоляционных и огнеупорных материалов  $\lambda$  при повышении температуры возрастает. Это объясняется тем, что большинство изоляционных материалов не представляет собой монолитной массы, а является пористым телом — конгломератом отдельных частиц с воздушными прослойками между ними, вследствие чего теплопроводность уменьшается. Однако при лучистом теплообмене, происходящем в этих прослойках, эффективная теплопроводность (с учетом излучения) увеличивается при повышении температуры пористого тела.

Для таких материалов  $\lambda$  зависит не только от свойств материала, но и от степени его уплотненности, что в свою очередь характеризуется плотностью. Кроме того, на теплопроводность указанных материалов большое влияние оказывает влажность, с увеличением которой теплопроводность возрастает. Для влажного материала  $\lambda$  выше, чем для сухого материала и воды, взятых в отдельности. Например, для сухого кирпича  $\lambda = 0,35$  Вт/(м·К), для воды  $\lambda = 0,58$  Вт/(м·К), а для влажного кирпича 1,05 Вт/(м·К). Это объясняется тем, что адсорбированная в капиллярно-пористых телах вода отличается по физическим свойствам от свободной воды. Поэтому по отношению к таким материалам правильнее величину  $\lambda$  называть эффективной теплопровод-

ностью. Теплопроводность теплоизоляционных материалов находится в пределах 0,02—3 Вт/(м·К).

Для газов с увеличением температуры теплопроводность также возрастает, но от давления она практически не зависит (кроме очень низкого <2,5 кПа и очень высокого >200 МПа). Для газов теплопроводность лежит в пределах 0,006—0,6 Вт/(м·К).

Для большинства капельных жидкостей теплопроводность находится в пределах 0,09—0,7 Вт/(м·К) и с повышением температуры уменьшается. Вода является исключением: с ростом температуры от 0 до 150°С теплопроводность возрастает, а при дальнейшем увеличении температуры уменьшается,

### **2.3.1 Теплопроводность при стационарном режиме и граничных условиях I рода (граничные условия I рода)**

Рассмотрим однородную плоскую стенку толщиной  $\delta$  (рис. 2.3). На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянные во времени и вдоль поверхности температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ . Теплопроводность материала стенки постоянна и равна  $\lambda$ .

При стационарном режиме  $\partial t / \partial \tau = 0$ , кроме того, температура изменяется только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки (ось  $Ox$ ):  $\partial^2 t / \partial y^2 = \partial^2 t / \partial z^2 = 0$ . Поэтому уравнение теплопроводности имеет вид

$$\partial^2 t / \partial x^2 = 0. \quad (2.5)$$

Интегрируя уравнение (2.5), находим

$$\partial t / \partial x = C_1. \quad (2.6)$$

После второго интегрирования получаем

$$t = C_1 x + C_2. \quad (2.7)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в уравнении (2.7) определим из граничных условий I рода:

при  $x=0: t=t_{c1}$  и  $C_2=t_{c1}$ ;

при  $x=\delta: t=t_{c2}$  и  $C_1=-(t_{c1}-t_{c2})/\delta$ .

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (2.7), получим уравнение распределения температуры по толщине стенки:

$$t = t_{c1} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x. \quad (2.8)$$

Определим плотность теплового потока через плоскую стенку. В соответствии с законом Фурье с учетом равенства (2.6) можно написать

$$q = -\lambda(dt/dx) = -\lambda C_1.$$

Следовательно,

$$q = \lambda/\delta(t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.9)$$

Разность значений температуры в уравнении (2.9) называется *температурным напором*. Из этого уравнения видно, что плотность теплового потока  $q$  изменяется прямо пропорционально теплопроводности  $\lambda$  и температурному напору  $\Delta t$  и обратно пропорционально толщине стенки  $\delta$ .

Отношение  $\lambda/\delta$  называется тепловой проводимостью стенки, а обратная ему величина  $\delta/\lambda$  — *термическим сопротивлением стенки*. Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты, которое передается через поверхность стенки площадью  $F$  за промежуток времени  $\tau$ :

$$Q = qF_\tau = (\lambda/\delta)(t_{c1} - t_{c2})F_\tau. \quad (2.10)$$

Поскольку величина  $\lambda$ , зависит от температуры, в уравнения (2.9) и (2.10) следует подставлять теплопроводность, взятую при средней температуре стенки.

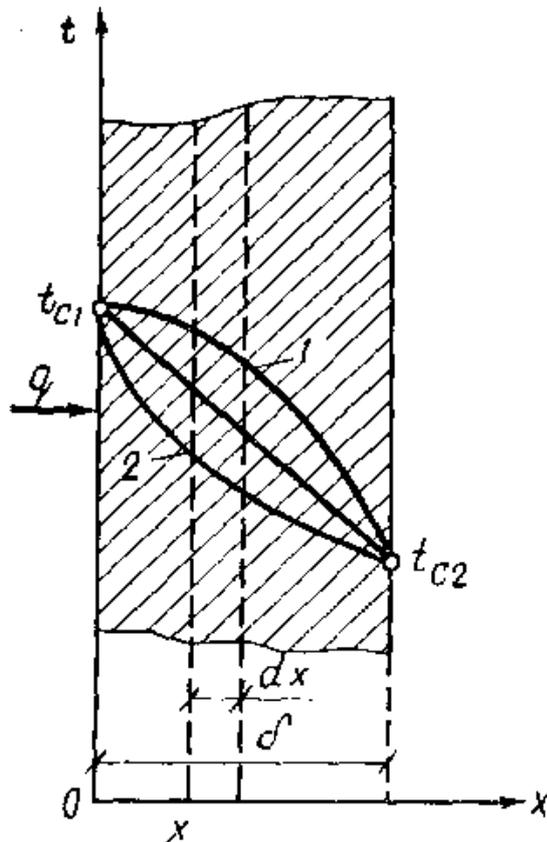


Рис. 2.3 Однородная плоская стенка

Рассмотрим процесс теплопроводности многослойной плоской стенки, состоящей из трех однородных слоев (рис. 2.4). Теплопроводность каждого слоя равна соответственно  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  толщина слоев —  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ . Принимаем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова. При стационарном режиме количество подведенной и отведенной от стенки теплоты должно быть одинаково. Отсюда вытекает равенство тепловых потоков, проходящих через каждый слой стенки. На основании выражения (2.9) запишем для каждого слоя:

$$\begin{aligned}
 q &= (\lambda_1 / \delta_1)(t_{c1} - t_{c2}); q = (\lambda_2 / \delta_2)(t_{c2} - t_{c3}); \\
 q &= (\lambda_3 / \delta_3)(t_{c3} - t_{c4}).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Из этих уравнений определяем температурные напоры:

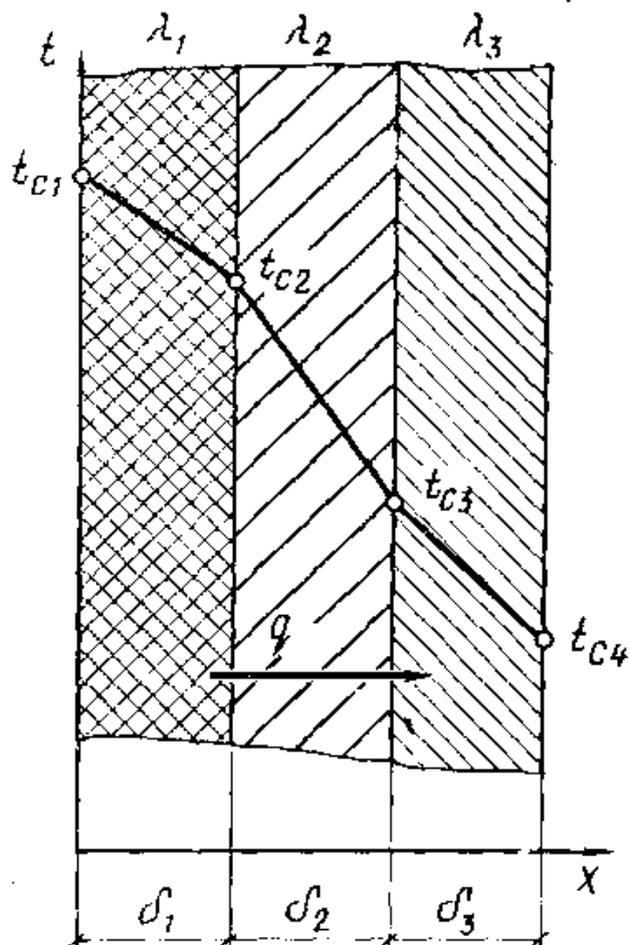


Рис. 2.4 Многослойная плоская стенка

$$t_{c1} - t_{c2} = q\delta_1 / \lambda_1;$$

$$t_{c2} - t_{c3} = q\delta_2 / \lambda_2;$$

$$t_{c3} - t_{c4} = q\delta_3 / \lambda_3.$$

(2.12)

Складывая левые и правые части, находим

$$t_{c1} - t_{c4} = q(\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3).$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = (t_{c1} - t_{c4}) / (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3).$$

(2.13)

Для многослойной стенки, состоящей можно написать:

$$q = (t_{c1} - t_{c(n+1)}) / \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i},$$

(2.14)

где  $i$  — номер слоя.

Зная величину  $q$ , с помощью равенства (2.12) можно вычислить температуры  $t_{c1}, t_{c2}, \dots, t_{cn}$ , после чего построить графики их изменения в слоях.

Из рис. 2.4 видно, что распределение температур внутри многослойной стенки представляет собой ломаную линию, наклон отрезков которой различен. Это объясняется тем, что для всех слоев  $q = -k(dt/dx) = \text{const}$ . Поэтому слои с меньшей теплопроводностью имеют больший температурный градиент и, следовательно, больший наклон температурной линии.

Если теплопроводность не является постоянной величиной, а зависит от температуры, то можно сделать качественное заключение о распределении температуры в плоской стенке. Разобьем стенку на большое число слоев толщиной  $dx$  так, чтобы в пределах каждого слоя теплопроводность можно было считать постоянной (см. рис. 2.3). Тогда для материалов, у которых с возрастанием температуры теплопроводность  $\lambda$  увеличивается (теплоизоляционные материалы), абсолютная величина  $\partial t / \partial x$  при  $q = \text{const}$  будет больше в тех слоях, где температура ниже. Поэтому с увеличением температуры температурная линия 1 отвечает увеличению  $\lambda$ , а линия 2 — уменьшению  $\lambda$  (такую зависимость  $\lambda$  от  $t$  имеет большинство металлов).

Для сравнения теплопроводящих свойств многослойной плоской стенки со свойствами однородных материалов вводят понятие *эквивалентной теплопроводности*. Это — теплопроводность однослойной стенки, толщина которой равна толщине рассматриваемой многослойной стенки, т. е.  $\sum_{i=1}^{i=n} \delta_i$  при условии, что разности температур на поверхностях однослойной и многослойной стенок и тепловые потоки одинаковы. Эквивалентная теплопроводность определяется из следующего выражения:

$$q = (t_{c1} - t_{c(n+1)}) / \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} = \lambda_{\text{экр}} (t_{c1} - t_{c(n+1)}) / \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i. \quad (2.15)$$

Отсюда имеем:

$$\lambda_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i / \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) видно, что эквивалентная теплопроводность зависит не только от термических сопротивлений отдельных слоев, но и от толщины этих слоев.

При расчете плотности теплового потока в многослойной стенке принималось условие идеального теплового контакта между отдельными слоями. Термическое сопротивление, которое возникает вследствие недостаточной плотности между поверхностями твердых материалов, называется *контактным термическим сопротивлением*.

Контактное термическое сопротивление зависит от шероховатости поверхностей, давления, прижимающего две поверхности одна к другой, и свойств среды в зазорах с учетом температуры в зоне контакта. Механизм передачи теплоты в зоне контакта довольно сложен. В местах непосредственного контакта твердых поверхностей теплота переносится путем теплопроводности, а в зазорах, заполненных газом или жидкостью, — путем конвекции и излучения. Если пренебречь излучением между поверхностями, разделенными газовой прослойкой, то термическое сопротивление в зоне контакта равно сумме термических сопротивлений фактического контакта  $R_\phi$  и газовой прослойки  $R_r$ :  $R_k = R_\phi + R_r$ .

Во многих задачах не учитывается термическое сопротивление на поверхности раздела, хотя оно всегда возникает при механическом соединении твердых тел.

Поэтому следует иметь в виду существование этого сопротивления и соответствующего ему скачка температур в зоне контакта, который для сильно шероховатых поверхностей и при небольших сжимающих усилиях может быть значительным. Проблема контактного термического сопротивления достаточно сложна, и пока нет единой теории или экспериментальных данных, которые

позволили бы достаточно точно рассчитать это сопротивление в инженерных задачах.

### 2.3.2 Теплопроводность в цилиндрической стенке (граничные условия I рода)

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности через однородную цилиндрическую стенку (трубу) длиной  $l$  с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным  $r_2$  (рис. 2.5). Теплопроводность материала стенки  $\lambda$  — величина постоянная. На поверхности стенки заданы постоянные температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ .

В случае ( $l \gg r$ ) изотермические поверхности будут цилиндрическими, а температурное поле одномерным, т. е.  $t = f(r)$ , где  $r$  - текущая координата цилиндрической системы,  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Тогда уравнение теплопроводности, которое для плоской стенки имело вид (2.5), для цилиндрической стенки (т. е. при переходе к цилиндрической системе координат) примет следующую форму:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2.17)$$

Введение новой переменной  $u = dt/dr$  позволяет привести уравнение (2.17) к виду

$$du/dr + u/r = 0.$$

После разделения переменных и интегрирования получим

$$\ln u + \ln r = \ln C_1.$$

Потенцируя это выражение и переходя к первоначальным переменным, имеем:

$$dt = C_1 (dr / r). \quad (2.18)$$

После интегрирования получим:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (2.19)$$

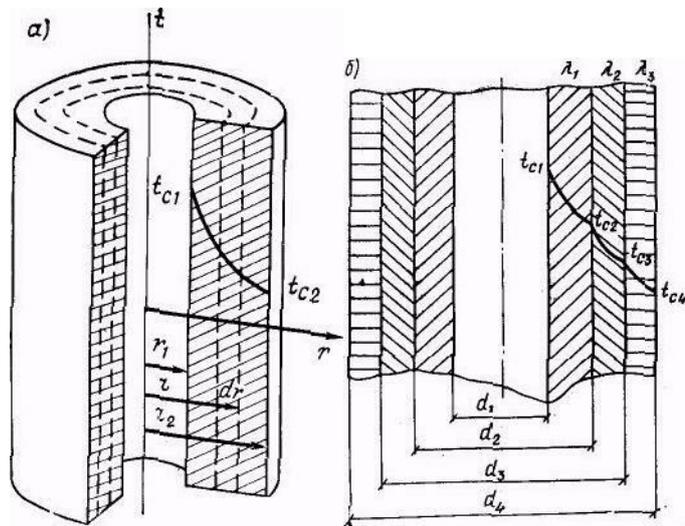


Рис. 2.5 Однородная цилиндрическая стенка

Граничные условия I рода записываются равенствами:

при  $r = r_1 : t = t_{c1}$ ;

при  $r = r_2 : t = t_{c2}$ .

Подставляя эти выражения в равенство (2.19), имеем:

$$C_1 = (t_{c1} - t_{c2}) / \ln r_1 / r_2;$$

$$C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})(\ln r_1 / \ln r_1 / r_2).$$

Подставляя значения  $C$  и в уравнение (2.19), получим

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})(\ln r / r_1) / (\ln r_2 / r_1),$$

или

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})(\ln d / d_1) / (\ln d_2 / d_1), \quad (2.20)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — внутренний и наружный диаметры цилиндра;  $d$  — переменный диаметр,  $d_1 \leq d \leq d_2$ .

Выражение (2.20) представляет собой уравнение логарифмической кривой. Следовательно, внутри однородной цилиндрической стенки при постоянном значении теплопроводности температура изменяется по логарифмическому закону (рис. 2.5,а).

Для нахождения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность площадью  $F$  в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

$$dQ = -\lambda(dt/dr)F = -\lambda(dt/dr)2\pi rl.$$

Подставляя в уравнение закона Фурье значение градиента температуры согласно уравнению (2.18), получим

$$Q = \frac{\pi l(t_{c1} - t_{c2})}{(1/2\lambda)\ln(d_2/d_1)}. \quad (2.21)$$

Из выражения (2.21) видно, что величина  $Q$  зависит не от толщины стенки, а от отношения ее наружного диаметра к внутреннему.

Если отнести тепловой поток к единице длины цилиндрической стенки, то уравнение (2.21) можно записать в виде

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{(1/2\lambda)\ln(d_2/d_1)}. \quad (2.22)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, измеряется в Вт/м и называется *линейной плотностью теплового потока*. Величина  $(1/2\lambda)\ln(d_2/d_1)$  есть термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической стенки.

Тепловой поток  $Q$  может быть отнесен к единице внутренней или внешней поверхности трубы. При этом расчетные формулы принимают вид:

$$q_{d1} = Q/\pi d_1 l = 2\lambda(t_{c1} - t_{c2})/d_1 \ln(d_2/d_1); \quad (2.23)$$

$$q_{d2} = Q/\pi d_2 l = 2\lambda(t_{c1} - t_{c2})/d_2 \ln(d_2/d_1). \quad (2.24)$$

Величины  $q_{d1}$  и  $q_{d2}$ , Вт/м<sup>2</sup>, представляют собой плотности теплового потока, отнесенные к площади внутренней или внешней поверхности трубы.

Из выражений (2.22)—(2.24) можно установить связь между величинами  $q_l$ ,  $q_{d1}$  и  $q_{d2}$

$$q_l = \pi d_1 q_{d1} = \pi d_2 q_{d2}. \quad (2.25)$$

Если  $d_2/d_1 < 2$ , то кривизна стенки слабо влияет на величину теплового потока. В этом случае (с точностью до 4 %) при определении теплового потока можно воспользоваться выражением для плоской стенки

$$q_l = 2\lambda\pi d_{cp}(t_{c1} - t_{c2})/(d_2 - d_1).$$

где  $d_{cp}$  — средний диаметр цилиндрической стенки.  $d_{cp} = 0,5(d_1 + d_2)$ .

В случае многослойной цилиндрической стенки (рис. 2.5,б) линейная плотность теплового потока  $q_l$  одинакова для каждого слоя. Воспользовавшись методом решения задачи теплопроводности через плоскую многослойную стенку, находим

$$q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (2.26)$$

Величина  $(1/2\lambda_i) \ln d_{i+1}/d_i$  представляет собой термическое сопротивление теплопроводности отдельного слоя, а величина  $\sum_1^n (1/2\lambda_i) \ln d_{i+1}/d_i$  — полное термическое сопротивление теплопроводности многослойной цилиндрической стенки. Температура на границе двух любых слоев равна:

$$t_{c(k+1)} = t_{c1} - \frac{q_l}{\pi} \left( \sum_1^k \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \quad (2.27)$$

### 2.3.3 Теплопроводность в шаровой стенке (граничные условия I рода)

Пусть имеется шар с радиусами внутренней и внешней поверхностей  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 2.6), постоянной теплопроводностью и с заданными равномерно распределенными температурами поверхностей  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ . При этих условиях температура зависит только от радиуса  $r$ . По закону Фурье тепловой поток сквозь шаровую стенку равен:

$$Q = -\lambda(dt/dr)4\pi r^2.$$

Разделив переменные, получим

$$-(Q/4\pi\lambda)(dr/r^2) = dt. \quad (2.28)$$

Интегрирование уравнения (2.28) дает следующее распределение температуры в шаровом слое

$$t = Q/4\pi\lambda r + C. \quad (2.29)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}r &= r_1 : t = t_{c1}; \\ r &= r_2 : t = t_{c2}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

При подстановке условий (2.30) в уравнение (2.29) имеем:

$$t_{c1} = Q / 4\pi\lambda r_1 + C;\tag{2.31}$$

$$t_{c2} = Q / 4\pi\lambda r_2 + C.\tag{2.32}$$

Вычитая из выражения (2.31) выражение (2.32), получим:

$$t_{c1} - t_{c2} = (Q / 4\pi\lambda)(1 / r_1 - 1 / r_2)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}Q &= \frac{4\pi\lambda}{1 / r_1 - 1 / r_2} (t_{c1} - t_{c2}) = \\ &= \frac{2\pi\lambda}{1 / d_1 - 1 / d_2} \times \\ &\times (t_{c1} - t_{c2}) = \pi\lambda(d_1 d_2 / \delta) \Delta t;\end{aligned}\tag{2.33}$$

где  $\delta$  — толщина стенки, равная  $(d_2 - d_1) / 2$ .

Уравнения (2.33) являются расчетными формулами теплопроводности шаровой стенки.

Решение уравнений (2.31) и (2.32) относительно величины  $C$  дает

$$C = (r_2 t_{c2} - r_1 t_{c1}) / (r_2 - r_1).\tag{2.34}$$

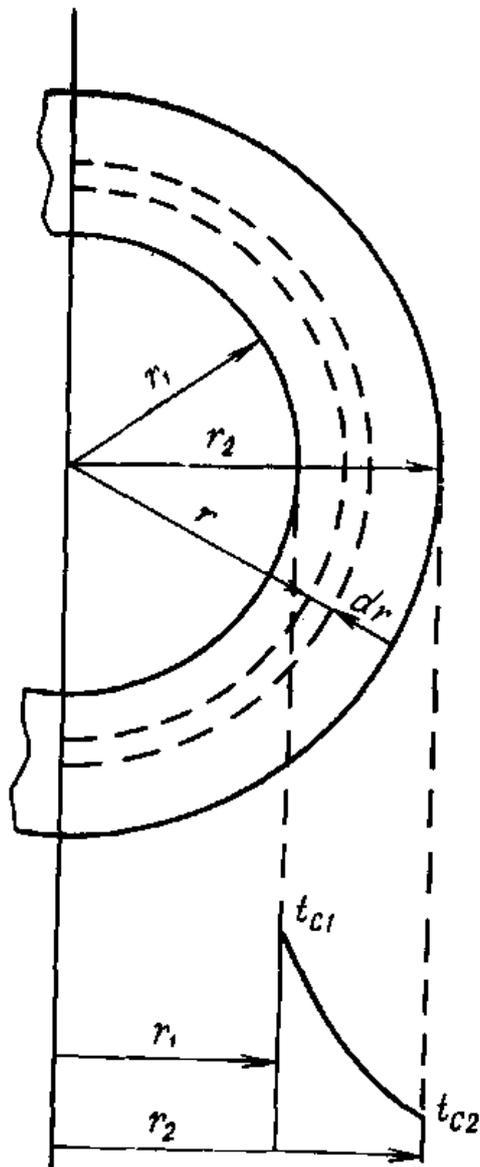


Рис. 2.6 Шаровая стенка

Подставив выражение (2.34) в уравнение (2.29), после преобразования получим выражение для распределения температуры

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})(1/r_1 - 1/r)/(1/r_1 - 1/r_2). \quad (2.35)$$

Из уравнения (2.35) следует, что при постоянной теплопроводности  $\lambda$  температура в шаровой стенке изменяется по закону гиперболы.

## 2.4 Теплопередача

### 2.4.1 Теплопередача через плоскую стенку

#### (граничные условия III рода)

Передача теплоты от одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их твердую стенку любой формы называется теплопередачей. Особенности протекания процесса на границах стенки при теплопередаче характеризуются граничными условиями III рода, которые задаются значениями температуры жидкости с одной и другой стороны стенки, а также соответствующими значениями коэффициентов теплоотдачи.

Рассмотрим стационарный процесс теплопередачи через бесконечную однородную плоскую стенку толщиной  $\delta$  (рис. 4.8). Задана теплопроводность стенки  $\lambda$ , температуры окружающей среды  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$  коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхностях стенки  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ . Плотность теплового потока от горячей среды к стенке определится уравнением:  $q = \alpha_1(t_{ж1} - t_{c1})$ . Этот же тепловой поток передается путем теплопроводности через твердую стенку:  $q = \lambda(t_{c1} - t_{c2}) / \delta$  и от второй поверхности стенки к холодной среде:  $q = \alpha_2(t_{ж2} - t_{c2})$ .

Перепишем приведенные уравнения в виде:

$$t_{ж1} - t_{c1} = q / \alpha_1; t_{c1} - t_{c2} = q\delta / \lambda; t_{c2} - t_{ж2} = q / \alpha_2. \quad (2.36)$$

Складывая их почленно, получаем

$$t_{ж1} - t_{ж2} = q(1 / \alpha_1 + \delta / \lambda + 1 / \alpha_2).$$

Отсюда

$$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.37)$$

где

$$k = \frac{1}{1 / \alpha_1 + \delta / \lambda + 1 / \alpha_2}. \quad (2.38)$$

Величина  $k$  называется *коэффициентом теплопередачи*, числовое значение  $k$  выражает количество теплоты, проходящей через единицу

поверхности стенки в единицу времени при разности температур между горячей и холодной средой 1 К и имеет ту же единицу измерения, что и коэффициент теплоотдачи, Дж/(с·м²К) или Вт/(м²·К).

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется *термическим сопротивлением теплопередаче*:

$$R = 1/k = 1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2 = R_{ж1} + R_c + R_{ж2}.$$

Единица измерения термического сопротивления (м²·К)/Вт.

Величины  $R_{ж1} = 1/\alpha_1$  и  $R_{ж2} = 1/\alpha_2$  — термические сопротивления теплоотдаче,  $R_c = \delta/\lambda$  — термическое сопротивление теплопроводности.

Значения температуры на поверхностях стенки определяются из уравнений  $t_{c1} = t_{ж1} - q/\alpha_1$ ;  $t_{c2} = t_{ж2} + q/\alpha_2$ .

В случае передачи теплоты через многослойную стенку

$$R_c = \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

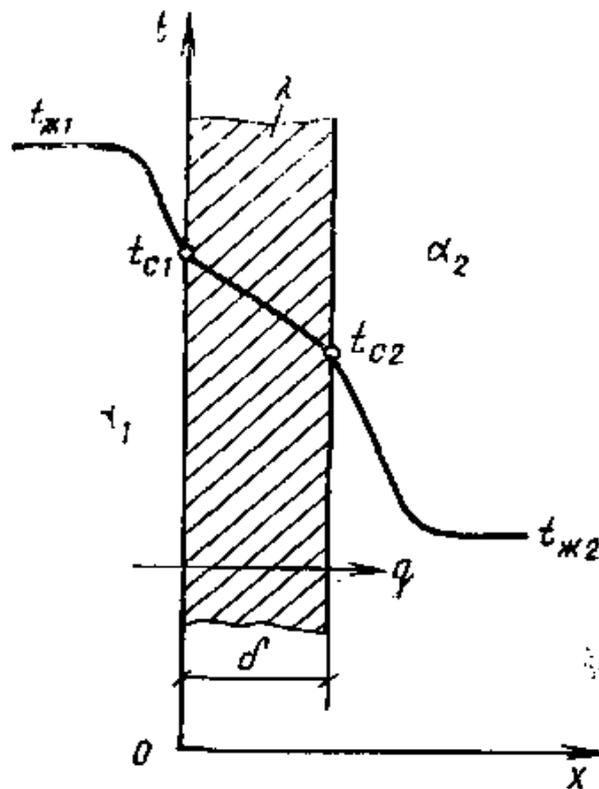


Рис.2.7 Стационарный процесс теплопередачи через бесконечную однородную плоскую стенку

Отсюда

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.39)$$

Плотность теплового потока через многослойную плоскую стенку, состоящую из  $n$  слоев, равна:

$$q = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k(t_{жс1} - t_{жс2}). \quad (2.40)$$

Выражение (2.40) для многослойной стенки подобно выражению (2.37) для однослойной плоской стенки. Различие заключается в коэффициентах  $k$ , которые отличаются термическими сопротивлениями теплопроводности  $\delta/\lambda$  и  $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ .

Тепловой поток  $Q$ , Вт, проходящий через плоскую стенку с площадью поверхности  $F$ , равен:

$$Q = qF = k\Delta tF.$$

Пользуясь равенствами (2.36), можно показать, что

$$\Delta t_1 / \Delta t = (1/\alpha_1) / (1/k); \Delta t_c / \Delta t = (\delta/\lambda) / (1/k);$$

$$\Delta t_2 / \Delta t = (1/\alpha_2) / (1/k),$$

где  $\Delta t = t_{жс1} - t_{жс2}$  — полный температурный напор:

$\Delta t_1 = t_{жс1} - t_{c1}; \Delta t_c = t_{c1} - t_{c2}; \Delta t_2 = \Delta t_{c2} - t_{жс2}$  — частичные температурные напоры.

Таким образом, отношение каждого из частичных температурных напоров  $\Delta t_1, \Delta t_c, \Delta t_2$  к полному напору равно отношению соответствующего термического сопротивления к полному термическому сопротивлению.

Из сопоставления выражений (2.14) и (2.40) следует, что передача теплоты через многослойную стенку при граничных условиях I рода является частным случаем передачи теплоты при граничных условиях III рода.

Из изложенного выше видно, что температура на границе любых двух слоев ( $k$  и  $k+1$ -го) при граничных условиях III рода может быть определена по уравнению

$$t_{c,(k+1)} = t_{жс1} - q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^k \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \quad (2.41)$$

Наряду с выражением (2.41) для расчета граничных температур применяются и графические методы. Рассмотрим графический метод определения температур на поверхности стенки. Пусть температуры наружных поверхностей условной стенки соответственно равны  $t_{жс1}$  и  $t_{жс2}$ , тогда толщина условной стенки  $\Delta$  определится из выражения:

$$\begin{aligned} q &= k(t_{жс1} - t_{жс2}) = \lambda(t_{жс1} - t_{жс2}) / \Delta, \text{ откуда} \\ \Delta &= \lambda / k = \lambda / (1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2) = \\ &= \lambda / \alpha_1 + \delta + \lambda / \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Величина  $\lambda\alpha_1$  и  $\lambda\alpha_2$ , измеряемые в метрах, определяют эквивалентные толщины.

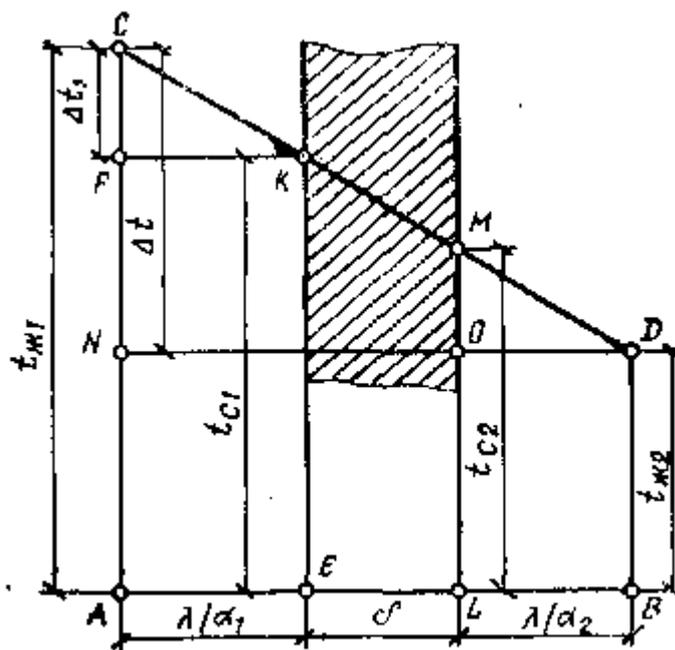


Рис. 2.8 Графическое построение стенки

При графическом построении в определенном масштабе изображается реальная стенка толщиной  $\delta$ . Затем в том же масштабе по одну сторону стенки откладывают значения  $\lambda/\alpha_1$ , а по другую — значения  $\lambda/\alpha_2$  (рис. 2.8). Из крайних точек  $A$  и  $B$  по вертикали вверх в масштабе откладывают температуры жидкостей  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$ . Полученные таким образом точки  $C$  и  $D$  соединяют прямой линией. Точки пересечения этой прямой с поверхностями действительной стенки дают значения искомых температур поверхностей стенок  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ .

Действительно, из подобия треугольников  $CFK$  и  $CND$  имеем  $CF/CN = FK/ND$  или  $CF/\Delta t = (\lambda/\alpha_1)/(\lambda/\alpha_1 + \delta + \lambda/\alpha_2)$ . Отсюда

$$CF = (\Delta t / \alpha_1) / (1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2) = k\Delta t / \alpha_1 = q / \alpha_1.$$

Согласно выражению (2.36)  $q/\alpha_1 = t_{ж1} - t_{c1}$ , следовательно,  $CF = \Delta t_1$ . Таким образом,  $FA = AC - FC = t_{ж1} - \Delta t_1 = t_{c1}$ . Таким же путем можно показать, что  $ML = t_{ж2} + \Delta t_2 = t_{c2}$ .

#### 2.4.2 Теплопередача через цилиндрическую и шаровую стенки (граничные условия III рода)

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку, большой длины с внутренним диаметром  $d_1$ , наружным  $d_2$  и постоянной теплопроводностью (рис. 2.9,а). Заданы значения температуры горячей  $t_{ж1}$  и холодной  $t_{ж2}$  среды и коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для стационарного режима можно записать:

$$\begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); q_l = \pi (t_{c1} - t_{c2}) / (1/2\lambda) \ln d_2 / d_1; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

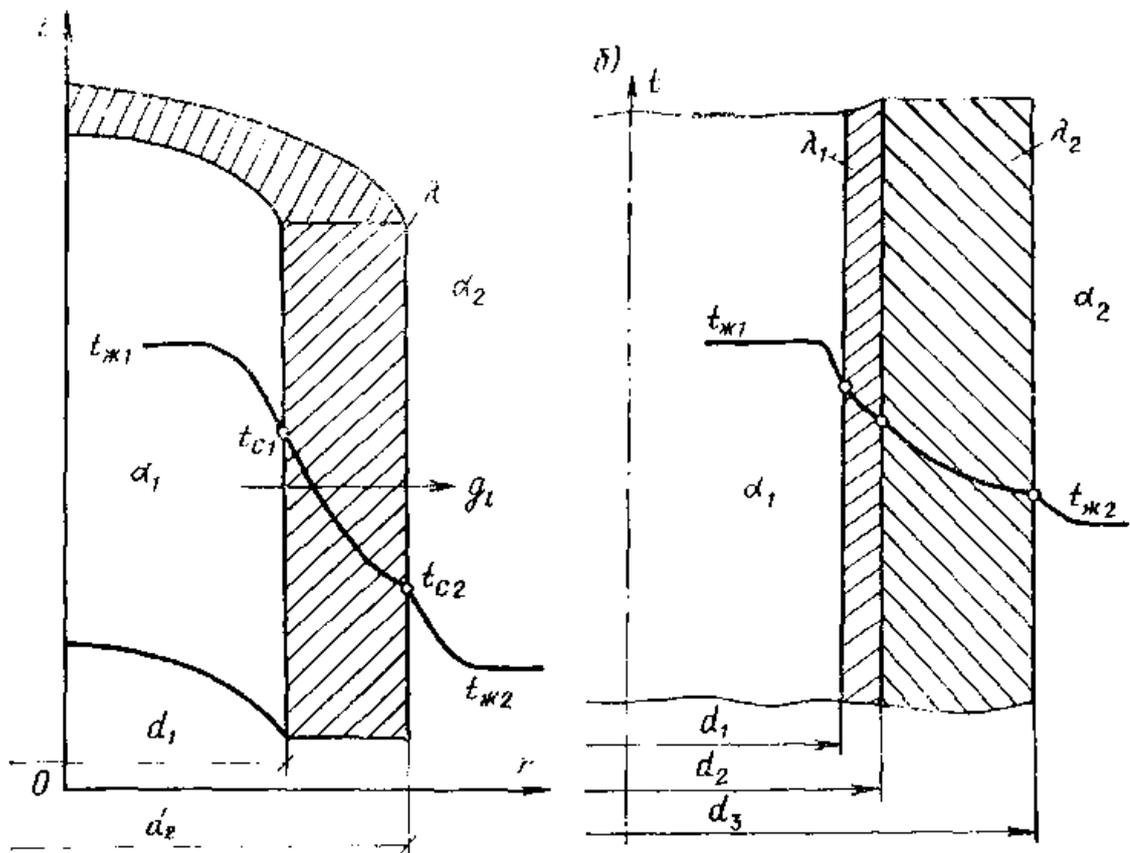


Рис. 2.9 Цилиндрическая стенка

Решая полученные уравнения относительно разности температур, а затем складывая их, получим

$$q_1 = k_i \pi (t_{ж1} - t_{ж2}),$$

где

$$k_i = \frac{1}{1/\alpha_1 d_1 + (1/2\lambda) \ln d_2/d_1 + 1/\alpha_2 d_2}.$$

Величина  $k_i$  называется *линейным коэффициентом теплопередачи*; он характеризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку. Величина  $k_i$  численно равна количеству теплоты, которое проходит от одной среды к другой через стенку трубы длиной 1 м в единицу времени при разности температур между ними 1 К; единица измерения  $k_i$  — Вт/(м·К).

Величина, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется *линейным термическим сопротивлением теплопередаче*:

$$\begin{aligned} R_l &= 1/k_l = 1/\alpha_1 d_1 + (1/2\lambda) \ln d_2 / d_1 + 1/\alpha_2 d_2 = \\ &= R_{ж1} + R_c + R_{ж2}; \end{aligned} \quad (2.44)$$

$R_l$  измеряется в (м·К)/Вт.

Линейное термическое сопротивление теплопередаче складывается из линейных сопротивлений теплоотдаче  $R_{ж1}$  и  $R_{ж2}$  и линейного термического сопротивления теплопроводности  $R_c$ . В случае многослойной цилиндрической стенки

$$R_c = \sum_1^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i},$$

тогда

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_1^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (2.45)$$

Линейное термическое сопротивление теплопередаче через многослойную цилиндрическую стенку равно

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_1^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (2.45)$$

Зная плотность теплового потока  $q_l$ , с помощью равенств (2.43) определяют температуру стенок цилиндрических поверхностей:  
 $t_{c1} = t_{ж1} - q_l / \pi \alpha_1 d_1; t_{c2} = t_{ж2} + q_l / \pi \alpha_2 d_2.$

В случае многослойной цилиндрической стенки температуру  $t_{c,k+1}$  на границе между слоями  $k$  и  $(k + 1)$  определяют из уравнения

$$t_{c,k+1} = t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_1^k \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right).$$

Для уменьшения тепловых потерь в окружающую среду поверхность нагретого тела покрывают тепловой изоляцией. Если увеличить толщину тепловой изоляции, покрывающей *плоскую* стенку, то термическое сопротивле-

ние возрастет, как это видно из выражения (2.39). Иначе обстоит дело в случае, если тепловой изоляцией- покрывается труба. Ограничимся рассмотрением случая, когда труба покрыта однослойной тепловой изоляцией с наружным диаметром  $d_3$  (рис. 2.9,6). Считая заданными и постоянными коэффициенты теплоотдачи  $a_1$  и  $a_2$ , температуры обеих жидкостей  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$ , теплопроводности трубы  $\lambda_1$  и изоляции  $\lambda_2$ , рассмотрим, как будет изменяться полное термическое сопротивление  $R_l$  при изменении диаметра изоляции  $d_3$ .

Согласно уравнению (2.45), выражение для линейного термического сопротивления теплопередаче через двухслойную цилиндрическую стенку имеет вид:

$$R_l = 1/\alpha_1 d_1 + (1/2\lambda_1) \ln d_2/d_1 + (1/2\lambda_2) \ln d_3/d_2 + 1/\alpha_2 d_3. \quad (2.46)$$

При возрастании диаметра изоляции член  $1/2\lambda_2 \ln d_3/d_2$  будет возрастать, а член  $1/\alpha_2 d_3$  — уменьшаться. Иными словами, увеличение диаметра  $d_3$  влечет за собой увеличение термического сопротивления теплопроводности изоляции и уменьшение термического сопротивления теплоотдаче на ее наружной поверхности. Последнее обусловлено увеличением площади поверхности изоляции вследствие возрастания  $d_3$ . Чтобы выяснить, как будет изменяться величина  $R_l$  при увеличении толщины изоляции, исследуем  $R_l$  как функцию  $d_3$  на экстремум. С этой целью возьмем производную от  $R_l$  по  $d_3$  и приравняем ее нулю:  $R_l' = 1/2\lambda_2 d_3 - 1/\alpha_2 d_3^2 = 0$ . Отсюда следует:

$$d_3^* = 2\lambda_2 / \alpha_2. \quad (2.47)$$

Диаметр  $d_3^*$  из выражения (2.47), который соответствует экстремальному значению  $R_l$ , называется *критическим диаметром* и обозначается  $d_{кр}$ . Величина  $d_{кр}$ , как видно из равенства (2.47), не зависит от значений  $\alpha_1, d_1, d_2, \lambda_1$  и определяется только значениями  $\alpha_2$  и  $\lambda_2$ . Критический диаметр  $d_{кр}$  служит показателем пригодности материала к использованию его в качестве тепловой

изоляции для трубы с заданным наружным диаметром  $d_2$  при заданном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_2$ .

Выбрав теплоизоляционный материал с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_2$ , следует по формуле (2.47) вычислить  $d_{кр}$ . Если  $d_{кр}$  больше наружного диаметра трубы  $d_2$ , то применение выбранного материала в качестве тепловой изоляции нецелесообразно. Действительно, при увеличении толщины изоляции в области  $d_2 < d_3 < d_{кр}$  будет наблюдаться увеличение тепловых потерь  $q_l$  (рис. 2.10), а затем при  $d_3 > d_{кр}$  — их уменьшение. И только при  $d_3 = d'_3 > d_{кр}$  тепловые потери трубы, покрытой слоем изоляции, будут равными тепловым потерям неизолированной трубы. Таким образом, если  $d_{кр} > d_2$ , то во всей области  $d_2 < d_3 < d'_3$  тепловые потери неизолированной трубы будут больше тепловых потерь изолированной трубы. Следовательно, слой тепловой изоляции толщиной  $0,5(d'_3 - d_2)$  не оправдывает своего назначения. Очевидно, целесообразно выбрать материал с меньшим коэффициентом теплопроводности  $\lambda_2$  с тем, чтобы при заданных  $\alpha_2$  и  $d_2$  величина  $d_{кр}$  была меньше или равна  $d_2$ . В этом случае применение изоляции любой толщины обеспечит уменьшение тепловых потерь.

Принципы расчета теплопередачи через шаровую стенку те же, что и через цилиндрическую. Пусть внутренний диаметр шара равен  $d_1$ , внешний —  $d_2$ , теплопроводность  $\lambda$ , температура горячей жидкости внутри шара  $t_{ж1}$ , температура холодной жидкости снаружи шара  $t_{ж2}$ , коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

При стационарном режиме количество теплоты, переданное от горячей жидкости к холодной, равно:  $Q = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{ж1} - t_{c1})$ ;  $Q = 2\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2}) / (1/d_1 - 1/d_2)$ ;  $Q = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{ж2} - t_{c2})$ .

Из этих уравнений получаем:

$$Q = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{1/\alpha_1 d_1^2 + (1/2\lambda)(1/d_1 - 1/d_2) + 1/\alpha_2 d_2^2} = \quad (2.48)$$

$$= k_u \pi(t_{ж1} - t_{ж2}).$$

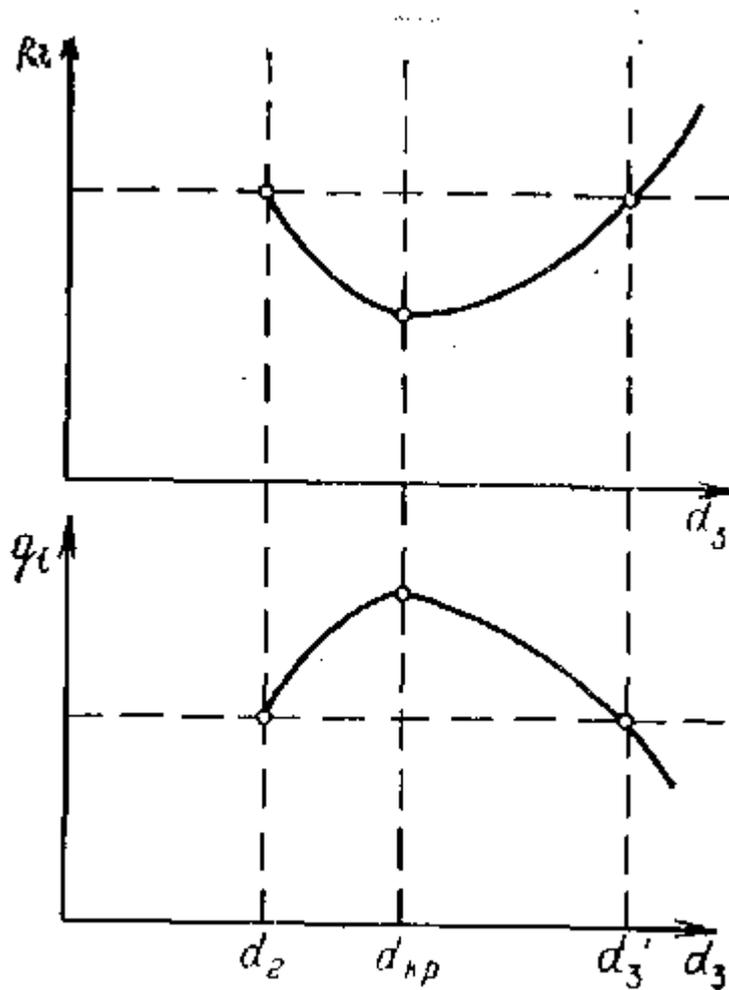


Рис. 2.10 Увеличение тепловых потерь

Следовательно, коэффициент теплопередачи для шаровой стенки определяется следующим соотношением:

$$k_u = \frac{1}{1/\alpha_1 d_1^2 + (1/2\lambda)(1/d_1 - 1/d_2) + 1/\alpha_2 d_2^2}$$

и измеряется в Вт/К.

Обратная величина  $1/k_u = R_u$  называется термическим сопротивлением теплопередаче шаровой стенки:

$$1/k_u = R_u = 1/\alpha_1 d_1^2 + (1/2\lambda)(1/d_1 - 1/d_2) + 1/\alpha_2 d_2^2$$

и измеряется в К/Вт.

### 2.4.3 Теплопередача через оребренную стенку

При теплопередаче через плоскую стенку термические сопротивления теплоотдаче определяются только значениями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и равны  $1/\alpha_1$  и  $1/\alpha_2$ . Иначе обстоит дело в случае цилиндрической стенки. Термические сопротивления  $1/\alpha_1 d_1$  и  $1/\alpha_2 d_2$  здесь определяются значениями не только  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , но и диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ . При теплопередаче через шаровую стенку влияние диаметров сказывается еще сильнее, здесь термические сопротивления теплоотдаче соответственно равны  $1/\alpha_1 d_1^2$  и  $1/\alpha_2 d_2^2$ . Из этого следует, что если один из коэффициентов теплоотдачи мал, то термическое сопротивление теплоотдаче может быть уменьшено путем увеличения диаметра; на этом же принципе основано применение оребренных поверхностей нагрева.

Рассмотрим оребренную стенку с толщиной  $\delta$  и теплопроводностью  $\lambda$  (рис. 2.11). С гладкой стороны площадь поверхности равна  $F_1$  а с оребренной —  $F_2$  (она состоит из площади поверхностей ребер и самой стенки). Заданы постоянные во времени температуры  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$ , а также коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Обозначим температуру гладкой поверхности  $t_{c1}$ . Предположим, что температура поверхностей ребер и самой стенки одинакова и равна  $t_{c2}$ . Такое предположение, вообще говоря, не соответствует действительности, но упрощает расчеты и им часто пользуются.

При  $t_{ж1} > t_{ж2}$  для теплового потока  $Q$  можно написать следующие выражения:

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_{ж1} - t_{c1}); Q = \lambda F_1 (t_{c1} - t_{c2}) / \delta; Q = \alpha_2 F_2 (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Определим отсюда частные температурные напоры

$$t_{ж1} - t_{c1} = Q / \alpha_1 F_1; t_{c1} - t_{c2} = Q \delta / \lambda F_1; t_{c2} - t_{ж2} = Q / \alpha_2 F_2. \quad (2.49)$$

Складывая уравнения системы (2.49), получим полный температурный напор:

$$t_{ж1} = t_{ж2} = Q(1/\alpha_1 F_1 + \delta/\lambda F_1 + 1/\alpha_2 F_2).$$

Из этого равенства имеем:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{1/\alpha_1 F_1 + \delta/\lambda F_1 + 1/\alpha_2 F_2} = k_p (t_{ж1} - t_{ж2}),$$

где  $k_p$  — коэффициент теплопередачи оребренной стенки, равный

$$k_p = \frac{1}{1/\alpha_1 F_1 + \delta/\lambda F_1 + 1/\alpha_2 F_2}.$$

При расчете плотности теплового потока на единицу неоребренной поверхности стенки получим

$$\begin{aligned} q_1 = Q/F_1 &= \frac{\Delta t}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2 (F_2/F_1)} = \\ &= k_1 \Delta t, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где  $k_1$  — коэффициент теплопередачи, отнесенный к неоребренной поверхности стенки. Отношение площади оребренной поверхности к площади гладкой поверхности  $F_2/F_1$  называется *коэффициентом оребрения*.

Выражение (2.50) показывает, что применение ребер целесообразно, когда коэффициент  $\alpha_2$  значительно меньше коэффициента  $\alpha_1$ . В этом случае при повышении коэффициента оребрения  $F_2/F_1$  увеличивается коэффициент теплопередачи  $k_1$ , а следовательно, и тепловой поток  $Q = k_1 \Delta t F_1$ . Необходимость установки ребер со стороны малого коэффициента теплоотдачи особенно ясна в случае  $\delta/\lambda \approx 0$ ; при этом

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2/\alpha_1}.$$

Если  $\alpha_1/\alpha_2 \approx 100$  (примерное соотношение для некоторых отопительных приборов), то  $k \approx \alpha_2/1,01 \approx \alpha_2$ . Используя оребрение, имеем  $\alpha_2(F_2/F_1)$  вместо  $\alpha_2$  [см. формулу (2.50)] и, следовательно,  $k \approx \alpha_2(F_2/F_1)$ .

Ребристые поверхности нашли широкое применение в отопительной технике в виде ребристых труб, радиаторов и конвекторов. Водяные экономайзеры некоторых котлоагрегатов выполняются в виде ребристых труб с

плоскими или игольчатыми ребрами, расположенными со стороны продуктов сгорания. Во всех перечисленных примерах ребристые поверхности расположены на стороне теплообменной поверхности с газовым теплоносителем, где коэффициент теплоотдачи меньше. В тех случаях, когда требуется уменьшить размеры теплообменника, а значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  малы, оребрение производится с обеих сторон.

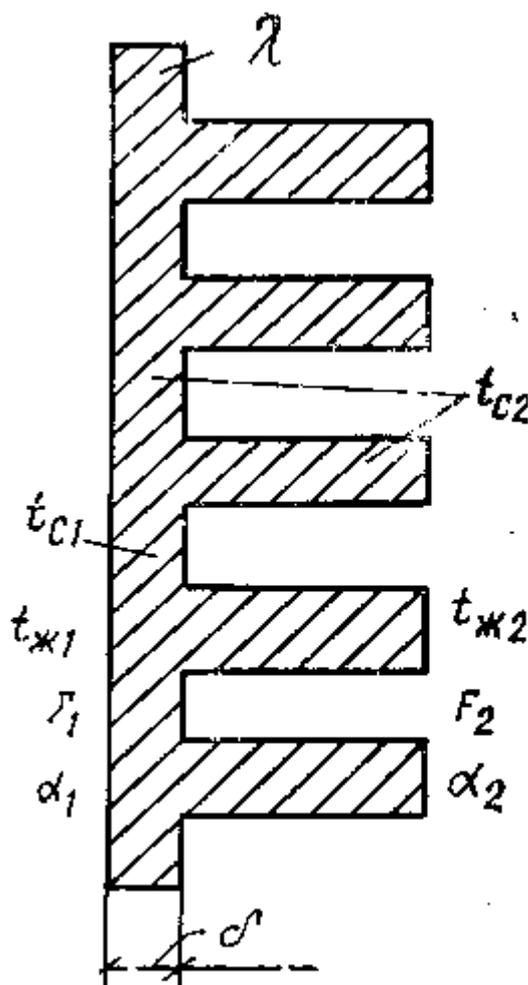


Рис. 2.11 Оребренная стенка

## 2.5 Тепловое излучение.

Теплообмен, обусловленный превращением внутренней энергии тела в энергию электромагнитных волн, переносом этой энергии и поглощением ее другими телами, называется *теплообменом и излучением*.

Для объяснения теплового излучения используется как волновая, так и корпускулярная теория. Согласно волновой теории, излучение можно представить волновыми колебаниями, с частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ . Произведение частоты и длины волны есть скорость распространения, равная скорости света  $c = \lambda\nu \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. Согласно корпускулярной теории, энергия излучения передается в виде порций энергий — фотонов. Каждый фотон движется со скоростью света и имеет определенную энергию, заданную соотношением:  $e = h\nu$ , где  $h$  — постоянная Планка,  $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж-с.

Тепловое излучение сосредоточено между длинами волн от  $10^{-3}$  до  $0,7 \cdot 10^{-6}$  м. Большинство твердых и жидких тел имеет сплошной (непрерывный) спектр излучения, т. е. излучает энергию всех длин волн от 0 до  $\infty$ . Газы и пары характеризуются селективным (прерывистым) спектром излучения.

Количество лучистой энергии, испускаемой с единицы площади поверхности тела в единицу времени, называется *поверхностной плотностью излучения*:

$$E = dQ / dF$$

и измеряется в Вт/м<sup>2</sup>. Лучистый поток с площади поверхности  $F$  определяется выражением:

$$Q = \int_F E dF.$$

В общем случае плотность потока излучения может неравномерно распределяться по поверхности тела. Она может изменяться по определенным направлениям излучения. Поэтому вводится понятие интенсивности излучения.

*Интенсивностью излучения* называется количество лучистой энергии, излучаемое в определенном направлении элементарной площадкой, расположенной перпендикулярно направлению излучения, в единице телесного угла за единицу времени. Для пояснения этого понятия выделим на поверхности излучающего тела элементарную площадку  $dF$  и рассмотрим излучение по направлению  $\vec{s}$ , составляющему угол  $\varphi$  с нормалью  $n$  к площадке в элементарном телесном угле  $dw$  (рис. 2.12). Энергия этого излучения равна

$d'Q$ . Проекция площадки  $dF$  на плоскости, перпендикулярной направлению излучения, равна  $dF \cos \varphi$ .

По определению интенсивность излучения может, быть представлена отношением:

$$I_s = d'Q / dF \cos \varphi d\omega.$$

Эту величину иногда называют яркостью излучения и измеряют в Вт/(м<sup>2</sup>·ср).

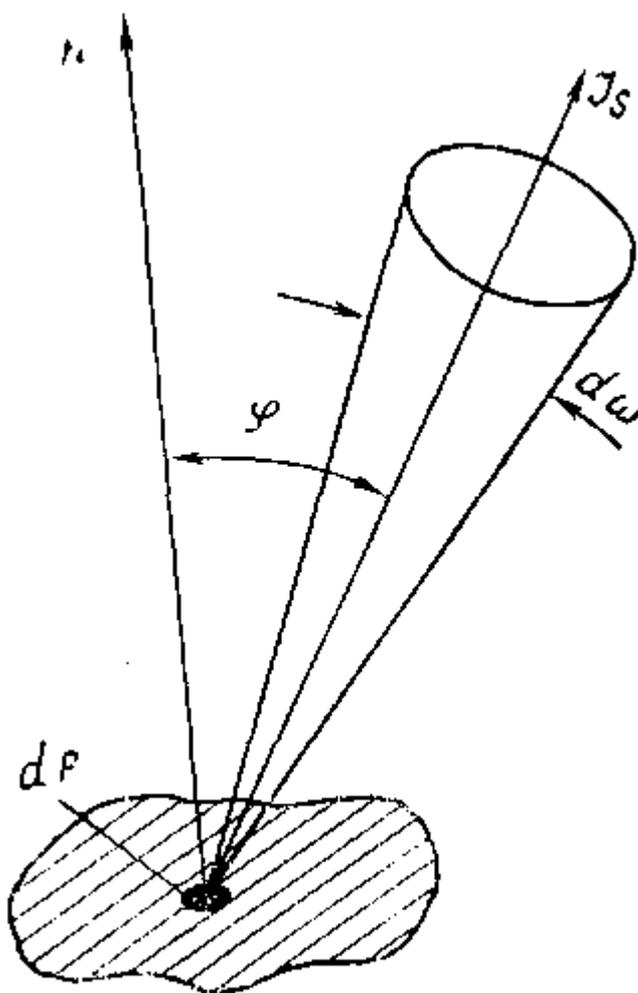


Рис.2.12 Поверхность излучающегося тела

Интенсивность излучения для определенной точки на поверхности тела может быть неодинаковой по различным направлениям. Если  $I_s$  по всем направлениям будет одинаковой и излучение исходит с поверхности твердого тела, то оно называется *диффузным*. Интенсивность излучения зависит от

природы тела, его температуры, длины волны, состояния поверхности, а для газов — еще от толщины слоя и давления.

Введенные понятия — плотность лучистого потока  $E$  и интенсивность излучения  $I_s$  — относятся к интегральному (полному) излучению. Эти же понятия относятся и к *монохромическому* излучению, т. е. к излучению, происходящему в узком интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ . Для этого излучения вводятся индексы:  $E_\lambda, I_{s,\lambda}$

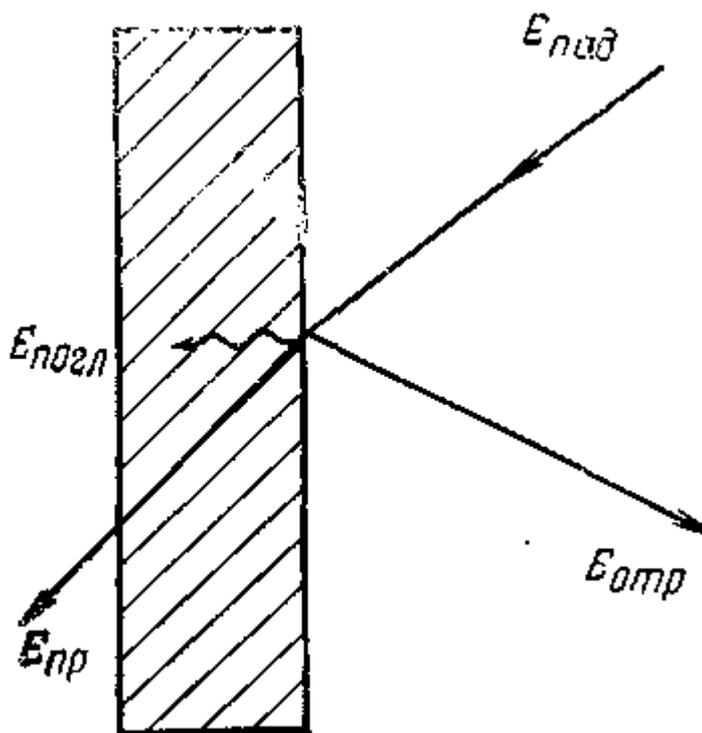


Рис. 2.13. Тепловое излучение

Если на пути теплового излучения  $E_{над}$  встречается тело (рис. 2.13), то тепловая энергия частично поглощается  $E_{погл}$ , частично отражается  $E_{отр}$  и частично проходит сквозь тело  $E_{пр}$ . На основании принципа сохранения энергии можно записать:

$$E_{над} = E_{погл} + E_{отр} + E_{пр}.$$

Введем обозначения:  $E_{погл} / E_{над} = A$  — поглощательная способность поверхности тела (или коэффициент поглощения);  $E_{отр} / E_{над} = R$  — отражательная способность поверхности тела (или коэффициент отражения);

$E_{np} / E_{над} = D$  — пропускательная способность тела (или коэффициент пропускания).

Коэффициенты  $A$ ,  $R$ ,  $D$  связываются между собой равенством:

$$A + R + D = 1.$$

Для конкретных тел они определяются опытным путем. Если  $R = D = 0$ , то  $A = 1$ , поверхность тела поглощает все падающее на нее излучение, следовательно, это абсолютно черное тело. Если  $D = A = 0$ , то  $R = 1$ , поверхность тела отражает все падающее на нее излучение, следовательно, это абсолютное белое тело. Если  $R = A = 0$ , то  $D = 1$ , тело пропускает все падающее на нее излучение, следовательно, это абсолютно прозрачное тело.

Участвующее в лучистом обмене тело, помимо *собственного* излучения  $E$ , определяемого свойствами самого тела и температурой, отдает часть падающей на него энергии:

$$E_{отр} = RE_{над}.$$

Сумма энергий собственного и отраженного излучения составляет *эффективное излучение* тела:

$$E_{эф} = E + RE_{над} = E + (1 - A)E_{над}. \quad (2.51)$$

Следует отметить, что эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств и температуры окружающих его тел, а также от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве.

Разность между собственным и поглощенным излучением называется *результатирующим излучением*:

$$E_{рез} = E - AE_{над}. \quad (2.52)$$

### 2.5.1 Законы теплового излучения

Тепловое излучение подчиняется общим для электромагнитных волн законам. Однако существуют специфические для теплового излучения законы,

которые получены применительно к абсолютно черному телу, находящемуся в термодинамическом равновесии.

*Термодинамическим равновесием* называют состояние, при котором все тела, входящие в данную излучающую систему, имеют одинаковую температуру, а интенсивность излучения в любой точке объема не зависит от направления и имеет одну и ту же величину.

Планк установил закон распределения энергии по длинам поля во всей области спектра теплового излучения абсолютно черного тела. Он показал, что энергия излучения с длиной волны  $\lambda$ , испускаемого черным телом с температурой  $T$ , равна:

$$E_{\lambda,0} = C_1 \lambda^{-5} / (e^{C_2/\lambda T} - 1), \quad (2.53)$$

где  $E_{\lambda,0}$  — плотность потока монохроматического (спектрального) излучения черного тела, Вт/м<sup>2</sup>;  $C_1 = 3,7413 \cdot 10^{-16}$  Вт·м<sup>2</sup>—первая постоянная излучения;  $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$  м·К — вторая постоянная излучения.

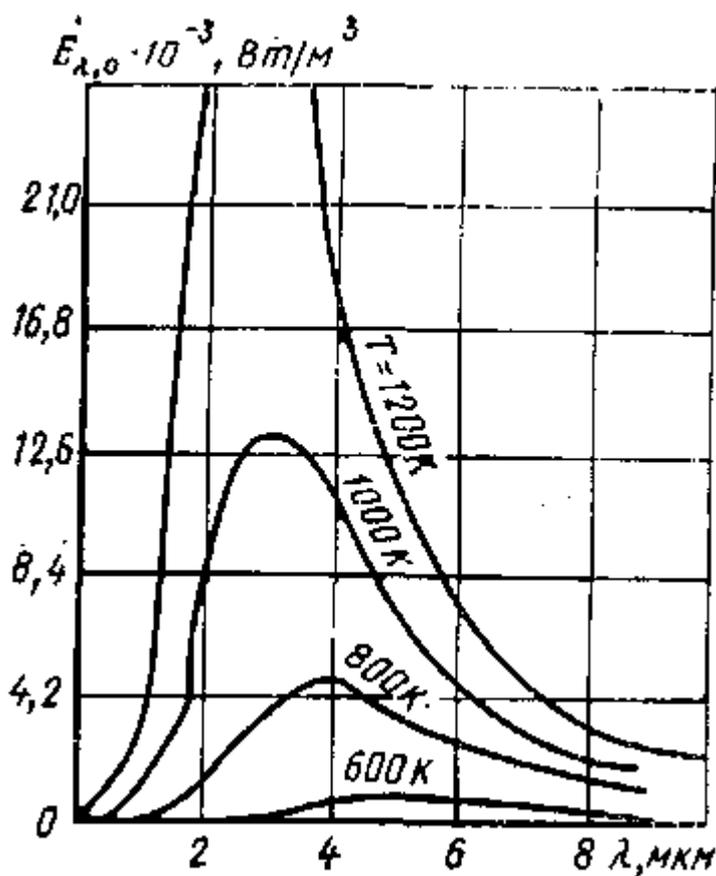


Рис. 2.14 Графическое представление уравнения, выражающего закон Планка.

На рис. 2.14 дано графическое представление уравнения (2.53), выражающего закон Планка. Видно, что энергия излучения, испускаемого черным телом, возрастает с температурой. Кривые имеют максимум с резким спадом в сторону коротких волн и более пологим спадом в сторону длинных волн. При  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  плотность потока излучения стремится к нулю.

Закон Планка имеет два предельных случая. Первый предельный случай относится к области больших длин волн при высоких значениях температур. В этом случае

$$\lambda T \gg C_2 \text{ или } C_2 / \lambda T \ll 1, \quad (2.54)$$

что позволяет экспоненциальную функцию в уравнении (2.53) представить в виде ряда:

$$e^{C_2/\lambda T} = 1 + \left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)^2 + \dots$$

Условие (2.54) позволяет ограничиться двумя членами этого ряда. Подставляя эти члены в формулу (2.53) вместо экспоненциальной функции, получим:

$$E_{\lambda,0} = C_1 T / C_2 \lambda^4. \quad (2.55)$$

Зависимость (2.55) выражает закон Релея — Джинса, являющийся частным случаем закона Планка.

Второй предельный случай закона Планка соответствует коротковолновой области спектра при высоких температурах, где  $\lambda T \ll C_2$ .

Тогда в уравнении (2.53) можно пренебречь единицей по сравнению с членом  $C_2 / \lambda T$  и получить следующую приближенную формулу:

$$E_{\lambda,0} = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T}. \quad (2.56)$$

Зависимость (2.56) известна как закон Вина.

Положения максимумов излучения (см. рис. 2.14) можно получить из выражения (2.53), исследуя функцию на экстремум. Приравнявая производную

нулю и находя значение  $\lambda = \lambda_{\max}$ , при котором  $E_{\lambda,0}$  достигает экстремального значения, получаем:

$$\lambda_{\max} = 2,898 \cdot 10^{-3} / T, \quad (2.57)$$

где  $\lambda_{\max}$  — длина волны, м, которой соответствует максимальная плотность излучения.

Зависимость (2.57) выражает закон смещения Вина для абсолютно черного тела. Согласно этому закону максимальное значение спектральной плотности потока излучения с повышением температуры сдвигается в сторону более коротких волн.

Закон Стефана — Больцмана устанавливает зависимость плотности интегрального полусферического излучения от температуры абсолютно черного тела и может быть получен из формулы Планка. Интегрируя выражение (2.53) во всем интервале длин волн, получим:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{\lambda,0} d\lambda = C_1 \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{-5} d\lambda}{e^{c_2/\lambda T} - 1} = \sigma T^4, \quad (2.58)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) — постоянная Стефана — Больцмана.

Согласно уравнению (2.58), плотность интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела зависит только от температуры и изменяется пропорционально четвертой степени абсолютной температуры. При высоких температурах величина  $T^4$  достигает больших значений, поэтому для удобства практических расчетов формулу (2.58) записывают в виде:

$$E_0 = C_0 (T / 100)^4, \quad (2.59)$$

где  $C_0 = \sigma \cdot 10^8 = 5,67$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) — коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Зависимость (2.59) впервые экспериментально была установлена Стефаном задолго до появления квантовой теории Планка, позднее Больцман получил эту зависимость теоретически, исходя из первого и второго законов термодинамики.

Закон Стефана — Больдмана позволяет определить суммарное излучение поверхности тела по всем направлениям в пределах полусферы.

Энергия излучения, испускаемая телом по отдельным направлениям, устанавливается законом *Ламберта*. Согласно закону Ламберта, поток излучения абсолютно черного тела в данном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к поверхности и косинусу угла между ними. Для интенсивности излучения закон Ламберта имеет вид:

$$I_{\varphi} = I_n \cos \varphi, \quad (2.60)$$

где  $I_{\varphi}$  и  $I_n$  — интенсивности интегрального излучения в направлении, определяемом углом  $\varphi$  (см. рис. 2.12), и в направлении нормали к поверхности.

Закон Ламберта строго справедлив для абсолютно черного тела. Для шероховатых поверхностей этот закон подтверждается опытом лишь для  $\varphi = 0 \div 60^\circ$ ; резкое отклонение от закона Ламберта наблюдается для полированных металлических поверхностей.

Все реальные тела имеют поглощательную способность, меньшую единицы, и называются нечерными телами. Для количественной характеристики реальных тел введено понятие степени черноты тела. *Степенью черноты тела* называется отношение энергии излучения данного тела к энергии излучения абсолютно черного тела при той же температуре:

$$\varepsilon = E / E_0 \leq 1. \quad (2.61)$$

Значение  $\varepsilon$  изменяется от нуля до единицы. Степень черноты характеризует излучательную способность реального тела по сравнению с абсолютно черным телом. Степень черноты может зависеть от длины волны излучения. Различают спектральную  $\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon_{\lambda}(T)$  и интегральную  $\varepsilon(T)$  степень черноты. Спектральная степень черноты для длины волны  $\lambda$  и температуры  $T$  определяется отношением интенсивности излучения реального тела  $I_{\lambda}(T)$  к интенсивности излучения  $I_{\lambda 0}(T)$  абсолютно черного тела при той же температуре. Твердые диэлектрики, имеющие шероховатую поверхность,

обладают небольшой степенью селективности. Спектр их излучения является сплошным и по своему характеру мало отличается от спектра излучения абсолютно черного тела.

Если тело обладает непрерывным спектром излучения, а кривые зависимости интенсивности излучения  $I_\lambda$  от длины волны реального и абсолютно черного тел подобны, то такое тело называют *серым*. Для серых тел степени черноты и коэффициенты поглощения неизменны во всем спектре излучения:  $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$  и  $A_\lambda = A$ .

Строго говоря, серых тел, так же, как и абсолютно черных, в природе не существует. Однако с некоторым приближением многие тела (диэлектрики, окиси металлов с шероховатыми поверхностями и др.) могут быть отнесены к серым, при этом чем уже рассматриваемый интервал длин волн, тем с большей степенью точности тело может считаться серым.

Для решения практических задач лучистого теплообмена преимущественно используют интегральную степень черноты. При известной  $\varepsilon(T)$  плотность интегрального излучения  $E(T)$  при температуре поверхности  $T$  может быть найдена из уравнений (2.59) и (2.61):

$$E(T) = \varepsilon(T)E_0(T) = \varepsilon C_0(T/100)^4. \quad (2.62)$$

Из-за сложности теоретического анализа надежные значения интегральной степени черноты могут быть получены лишь опытным путем.

*Закон Кирхгофа* устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностями тела. Отношение излучательной способности к поглощательной для всех тел (1, 2, 3, ...) одинаково, равно излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре и зависит только от температуры:

$$E_1 / A_1 = E_2 / A_2 = \dots = E_i / A_i = \dots = E_0 / A_0 = E_0 = f(T). \quad (2.63)$$

Из равенства (2.63) следует, что при любой температуре излучательная способность абсолютно черного тела является максимальной: чем больше излучательная способность тел, тем больше их поглощательная способность.

Для спектрального излучения закон Кирхгофа формулируется следующим образом: отношение излучательной способности при определенной длине волны к поглощательной способности при той же длине волны для всех тел одно и то же и является функцией длины волны и температуры, т. е.

$$E_{1\lambda} / A_{1\lambda} = E_{2\lambda} / A_{2\lambda} = \dots = E_{i\lambda} / A_{i\lambda} = \dots = E_{0\lambda} = f(\lambda, T).$$

Из определения степени черноты и закона Кирхгофа следует:

для всех тел:

$$\varepsilon_{\lambda}(T) = A_{\lambda}(T),$$

для серых тел:

$$\varepsilon(T) = A(T). \quad (2.64)$$

Закон Кирхгофа базируется на втором законе термодинамики и является одним из основных законов теории теплового излучения.

*Закон Бугера* описывает поглощение энергии прозрачными средами. Пусть поверхностью некоторой среды поглощается лучистый поток, спектральная интенсивность которого  $I_{0\lambda}$ . При прохождении его через среду интенсивность уменьшается и на расстоянии  $x$  от поверхности составляет  $I_{\lambda}$ . Как следует из закона Бугера, между  $I_{0\lambda}$  и  $I_{\lambda}$  справедлива зависимость:

$$I_{\lambda} = I_{0\lambda} e^{-k_{\lambda} x},$$

где  $k_{\lambda}$  — коэффициент ослабления луча при данной длине волны.

Коэффициент ослабления  $k_{\lambda}$  зависит от физических свойств среды и температуры. Введем обозначение:

$$L = \int_0^l k_{\lambda} dx$$

и перепишем закон Бугера в виде:

$$I_{\lambda} = I_{0\lambda} e^{-L}.$$

Поглощательная способность вещества в слое толщиной  $l$ :

$$A_{\lambda} = (I_{\lambda,0} - I_{\lambda}) / I_{\lambda,0} = 1 - e^{-L}.$$

Полная поглощательная способность среды определяется суммой значений  $A_{\lambda_i}$  отдельных участков  $i$  спектра:

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} A_{\lambda_i}.$$

## 2.5.2 Особенности излучения газов и паров. Сложный теплообмен

Одноатомные и двухатомные газы не обладают заметной излучательной способностью и являются практически прозрачными (диатермичными) для излучения. Трехатомные газы ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$  и др.) обладают значительной излучательной и поглощательной способностью, которая носит резко выраженный селективный характер. В отличие от твердых и жидких тел излучение газов носит объемный характер.

Количество поглощаемой газом энергии зависит от толщины газового слоя и концентрации поглощающих (или излучающих) молекул. Концентрацию молекул удобно оценить парциальным давлением газа  $p$ . Так как толщина газового слоя и парциальное давление газа в одинаковой мере влияют на число молекул, то степень черноты газа и его поглощательную способность можно выбирать в зависимости от параметра  $pl$ , где  $l$  — средняя длина луча в пределах газового слоя, которая может быть определена из формулы  $l = 3,6V/F$  (здесь  $V$  — газовый объем;  $F$  — площадь поверхности оболочки).

Наиболее хорошо изучен теплообмен излучением для  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}_2$ , которые содержатся в продуктах сгорания органических топлив. Плотность их собственного интегрального излучения по экспериментальным данным определяется из выражений:

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5(pl)^{0,33}(T/100)^{3,5}; \quad (2.65)$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5(pl)^{0,8}l^{0,6}(T/100)^3. \quad (2.66)$$

Из уравнений (2.65) и (2.66) видно, что парциальное давление  $p$  и толщина слоя  $l$  оказывают большее влияние на излучение  $H_2O$ , чем на излучение  $CO_2$ . Поэтому при малых толщинах слоя преобладает излучение  $CO_2$ , а при больших — излучение  $H_2O$ .

Выражения (2.65) и (2.66) показывают, что излучение газов не подчиняется закону Стефана — Больцмана. Плотность теплового потока, передаваемая газом, содержащим  $CO_2$  и  $H_2O$ , определяется из эмпирической формулы:

$$q = \varepsilon_{эф} C_0 [\varepsilon_p (T_{ж} / 100)^4 - A_c (T_c / 100)^4], \quad (2.67)$$

где  $\varepsilon_{эф}$  — эффективная степень черноты стенки;  $A_c$  — поглощательная способность газа при температуре стенки;  $T_c$  — температура стенки;  $T_{ж}$  — температура газов.

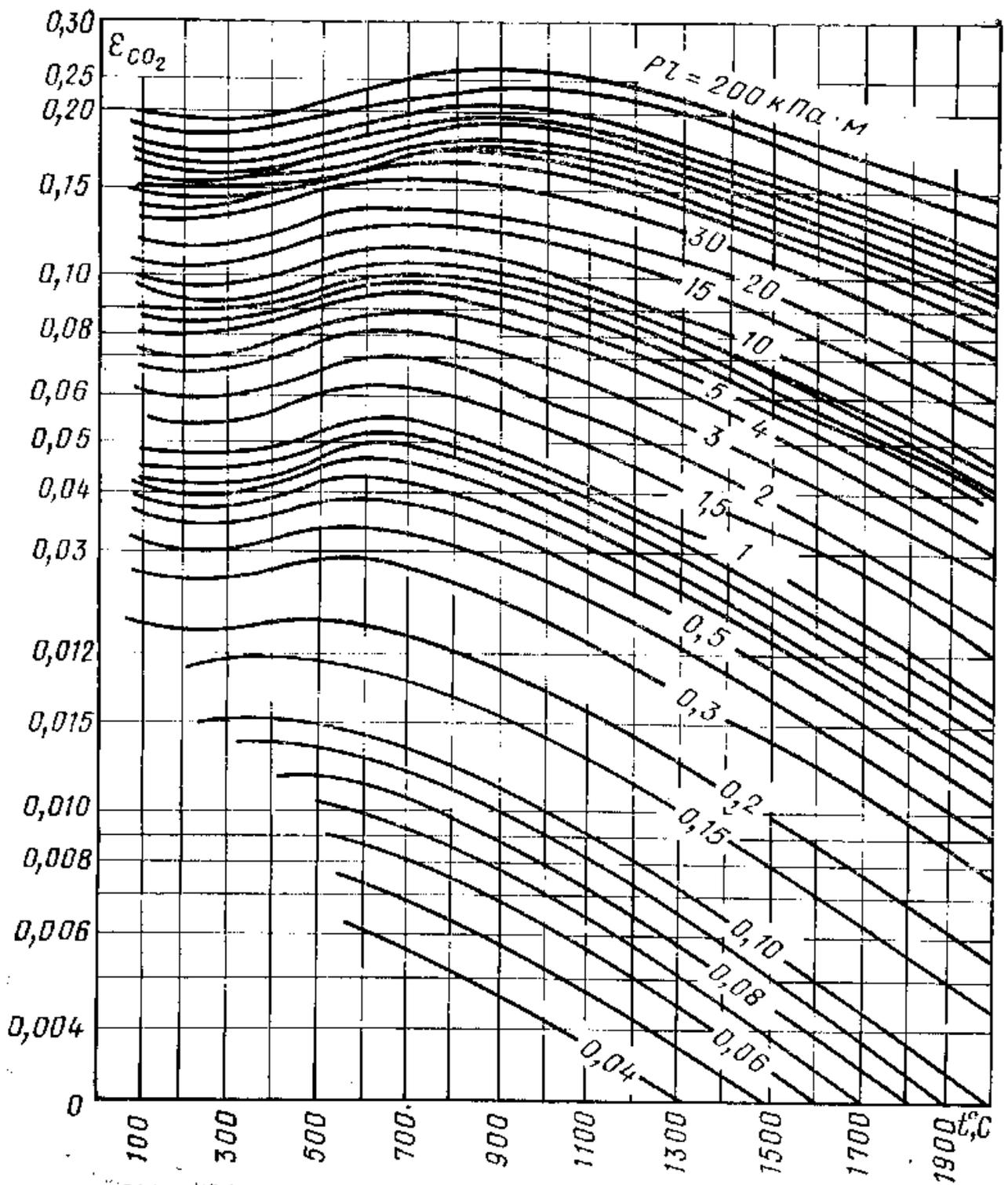


Рис. 2.153 значения степени черноты  $\varepsilon_{CO_2}$

Степень черноты газа при температуре газа  $T_{ж}$  подсчитывается по формуле

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{CO_2} + \beta \varepsilon_{H_2O}$$

Значения степени черноты  $\varepsilon_{CO_2}$  и  $\varepsilon_{H_2O}$  в зависимости от температуры и параметра  $pl$  приведены на рис. 2.15 и 2.16. Поправочный коэффициент  $\beta$  определяют по графику на рис. 2.17.

*Сложным теплообменом* называют процесс переноса теплоты, при котором теплообмен излучением протекает совместно с теплопроводностью и конвекцией. В сложном теплообмене излучение является важной составной

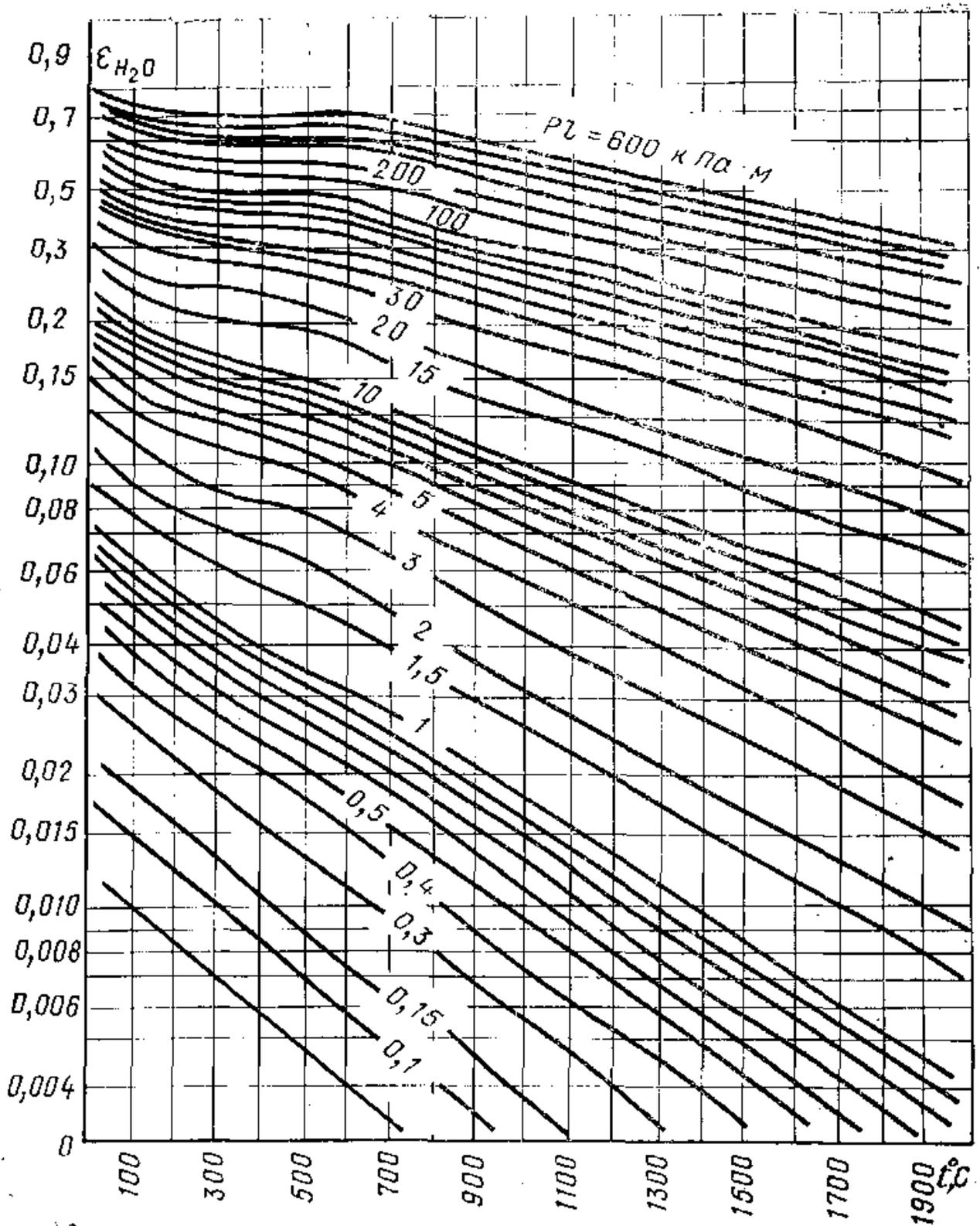


Рис. 2.16 Значения степени черноты  $\epsilon_{H_2O}$

частью. Сложный теплообмен можно разбить на три разновидности: теплообмен излучением между потоком излучающего газ и стенками канала,

радиационно-кондуктивный теплообмен и радиационно-конвективный теплообмен.

При теплообмене излучением между потоком излучающего газа и стенками канала обычно пренебрегают теплопроводностью и считают, что теплота переносится только конвекцией в направлении движения потока.

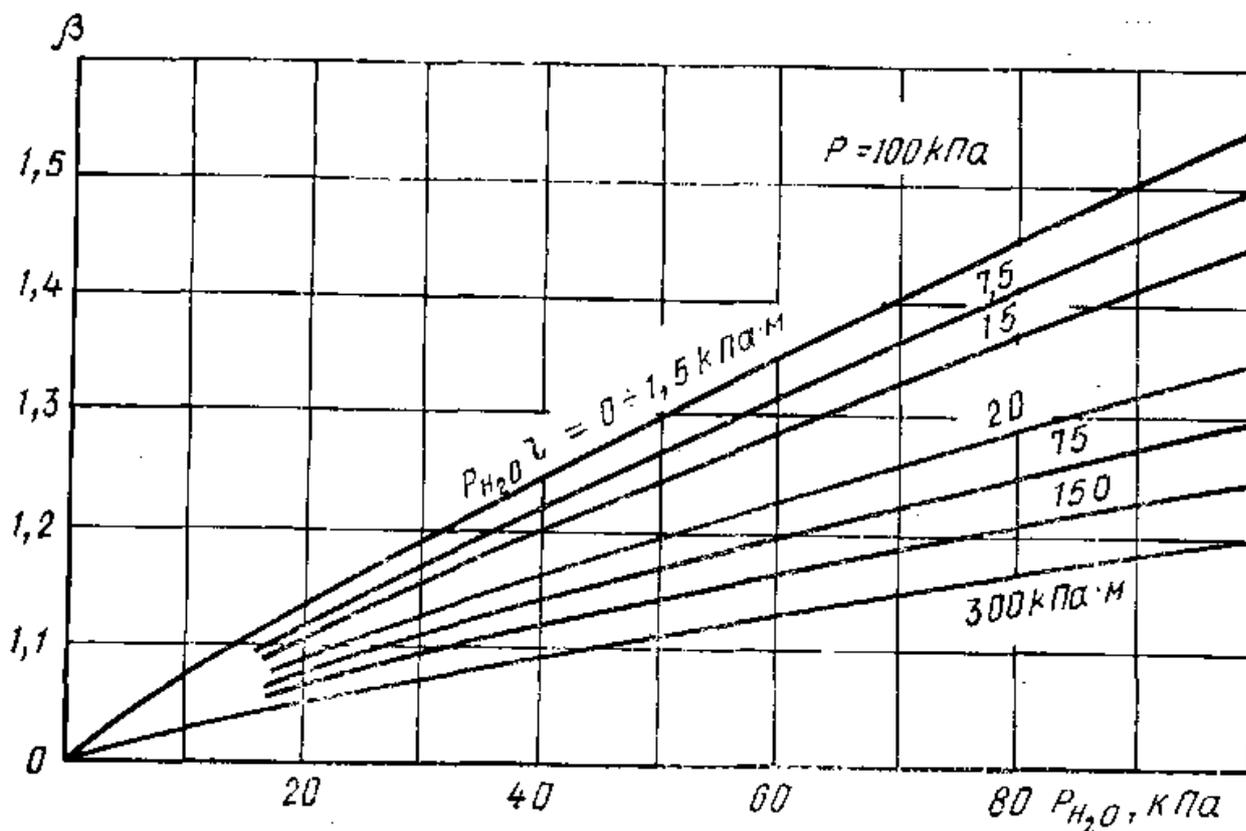


Рис. 2.17 Поправочный коэффициент  $\beta$

Здесь учитывается неравномерное распределение температуры газа по сечению канала и его длине, возникающее из-за теплообмена. Оказывается, что теплота, переданная излучением, не растет монотонно с ростом степени черноты газового объема, а имеет максимальное значение при некотором ее значении. Уменьшение количества передаваемой теплоты при большой поглощательной способности среды объясняется тем, что охладившиеся пристенные слои малопрозрачного газа выполняют роль экрана, не пропуская на стенку излучение от удаленных слоев излучающего газа.

При радиационно-кондуктивном теплообмене происходит перенос теплоты в неподвижной ослабляющей и теплопроводящей среде путем

излучения и теплопроводности. В случае нерассеивающей среды этот вид теплообмена характеризуется оптической толщиной слоя среды  $kl$ , степенью черноты тепловоспринимающих поверхностей  $\varepsilon_{cs1}; \varepsilon_{cs2}$ , относительной температурой поверхности, имеющей низкую температуру  $\theta = T_2/T_1$  и параметром  $N = 1/Ki = \lambda k / 4\sigma_0 T_1^3$ , характеризующим взаимную интенсивность переноса теплоты теплопроводностью и излучением. Если  $N \rightarrow \infty$ , то теплота переносится только теплопроводностью,  $N \rightarrow 0$  — только излучением. Радиационно-кондуктивный теплообмен является весьма сложным видом теплообмена. Сравнительно простые решения задачи получаются лишь для некоторых частных случаев.

При оптически тонком слое ( $kl=0$ ) излучение не поглощается в среде, а переносится от одной поверхности к другой, как в случае диатермичной среды. Полный тепловой поток определяется простым суммированием лучистого и кондуктивного потоков

$$q = [(\varepsilon_{cm1}\varepsilon_{cm2}) / (\varepsilon_{cm1} + \varepsilon_{cm2} - \varepsilon_{cm1}\varepsilon_{cm2})] \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) + (\lambda / \delta)(T_1 - T_2). \quad (2.68)$$

При оптически толстом слое ( $kl \rightarrow \infty$ ) влияние радиационных свойств поверхностей простирается в глубь объема, а характеристики излучения в любой точке объема зависят лишь от условий в непосредственной близости от этой точки. В этом случае полный тепловой поток складывается иначе, чем в уравнении (2.68), радиационный поток несколько видоизменен:

$$q = (4/3)(\sigma_0 / k\delta)(T_1^4 - T_2^4) + (\lambda / \delta)(T_1 - T_2).$$

Радиационно-конвективный теплообмен весьма сложен в физическом отношении и описывается довольно сложной системой уравнений. Эти два обстоятельства затрудняют как аналитические, так и экспериментальные исследования сложного теплообмена, в связи с чем задача его инженерного расчета еще далека от своего решения. Для практических расчетов обычно используют принцип независимости конвективного и лучистого потоков, что оказывается достаточно верным, если один из них значительно меньше другого.

Так, для учета теплоотдачи излучением к коэффициенту теплоотдачи конвекцией, подсчитанному обычным образом, т. е. без учета влияния радиационного теплообмена на профили скорости и температуры, рекомендуется прибавлять условный коэффициент теплоотдачи излучением  $a_{л}$ , поэтому суммарный коэффициент теплоотдачи равен  $a = a_{к} + a_{л}$ .

Для сложных процессов теплообмена используют ряд чисел подобия, в частности числа Больцмана—  $Bo$  и Кирпичева —  $Ki$ , имеющие вид:

$$Bo = \rho c_p w / \sigma_0 T^3; Ki = \sigma_0 T^3 / k \lambda.$$

Число Больцмана  $Bo$  характеризует радиационноконвективный теплообмен: чем оно меньше, тем большую роль играет лучистый теплообмен в среде по сравнению с конвективным. Число Кирпичева  $Ki$  характеризует радиационно-кондуктивный теплообмен. Число Бугера  $Bu = kl_0$  характеризует оптическую плотность среды, т. е. прохождение через нее лучистой энергии.

## 2.6. Конвективный теплообмен

### 2.6.1 Исходные положения

Конвективный теплообмен обусловлен совместным действием конвективного и молекулярного переносов теплоты. В каждой точке движущейся среды можно рассматривать вектор плотности теплового потока, равный в соответствии с двумя указанными видами переноса сумме двух векторов:

$$\vec{q} = \vec{q}_{mn} + \vec{q}_{к},$$

где  $\vec{q}_{mn} = -\lambda \text{grad } t$  — вектор плотности молекулярного переноса (теплопроводность), обусловленный неоднородностью поля температуры в рассматриваемой точке пространства;  $\vec{q}_{к} = \vec{\rho}wh$  — вектор плотности конвективного (молярного) переноса, обусловленный существованием движения среды. В первом случае носителями являются микрочастицы, во втором — макрочастицы (моли); микрочастицы осуществляют хаотическое

тепловое движение; движение молей — «видимое» движение жидкости (т. е. доступное визуальному наблюдению).

Во многих случаях поток среды частично или полностью ограничен поверхностями твердых тел (стенками). Чаще всего передачу теплоты от горячего теплоносителя к холодному нельзя осуществлять путем их непосредственного контакта (смешения), поэтому приходится разделять теплоносители стенкой. Наличие разделяющей теплоносители стенки вносит дополнительное термическое сопротивление, которое зависит от механизма теплового и динамического взаимодействия среды со стенкой. *Конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью ее раздела с другой средой называют теплоотдачей.* Именно процесс теплоотдачи и является предметом изучения в данной главе.

Интенсивность процесса теплоотдачи принято характеризовать коэффициентом теплоотдачи, который равен

$$\alpha = q / (t_{ж} - t_c), \quad (3.1)$$

где  $q$  — плотность теплового потока на стенке;  $t_{ж}$  — температура жидкости (например, температура среды вдали от стенки, где исчезает тепловое возмущение, обусловленное поверхностью теплообмена);  $t_c$  — температура стенки.

Коэффициент теплоотдачи численно равен плотности теплового потока при температурном напоре 1 К, его единица измерения Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Исторически понятие коэффициента теплоотдачи связано с законом Ньютона — Рихмана, выражением которого является равенство (3.1). Однако следует иметь в виду, что выражение (3.1) не является простой физической закономерностью, выражающей сущность процесса теплоотдачи. Роль коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  отнюдь не аналогична роли, например, теплопроводности  $\lambda$ , в законе Фурье. В то время как величина  $\lambda$  есть теплофизический параметр среды (вещества), который может быть взят из

справочных таблиц, коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  представляет собой сложную функцию тепловых и динамических процессов, развивающихся в среде в непосредственной близости от поверхности теплообмена.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  определяют три группы факторов. Во-первых, геометрические факторы, связанные с конфигурацией системы конвективного теплообмена: течение жидкости вдоль плоской поверхности, поток в трубе (или в продольных межтрубных каналах), поперечное обтекание труб и трубных пучков и т. д. Во-вторых, гидродинамические факторы, обусловленные прежде всего наличием двух режимов течения — ламинарного (при малых значениях числа  $Re$ ) и турбулентного (при больших значениях числа  $Re$ ). Механизм теплообмена в двух этих случаях существенно различен. Кроме того, в пределах каждого режима течения имеется связь коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  со скоростью потока, качественно одинаковая для обоих режимов — при возрастании скорости потока коэффициент  $\alpha$  увеличивается. Однако количественные характеристики для ламинарного и турбулентного режимов различны.

Наконец, третью группу факторов составляют тепло-физические свойства среды — плотность, изобарная теплоемкость, вязкость и теплопроводность. Они сложным образом влияют на коэффициент теплоотдачи. При прочих равных условиях для среды с более высокой теплопроводностью характерны более высокие значения коэффициента теплоотдачи. Вязкость оказывает косвенное влияние на интенсивность теплоотдачи: при меньшей вязкости в потоке формируется более благоприятный для повышения теплоотдачи профиль скорости.

Особый случай представляет собой так называемая гравитационная свободная конвекция, которая происходит под действием сил тяжести в среде с неоднородным распределением плотности жидкости. Неоднородность плотности может явиться следствием неоднородности температурного поля. В данном случае проявляется существенное влияние теплообмена на поле

скорости в жидкости. Обычно поле скорости формируется под влиянием внешних причин, вызывающих движение среды, — работа насоса, вентилятора и т. п. В таких случаях происходит вынужденная конвекция. Как правило, при прочих равных условиях интенсивность теплоотдачи при вынужденной конвекции выше, чем при свободной.

Численные значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К), изменяются в широких пределах: при свободной конвекции воздуха — 5—25, воды — 20—100; при вынужденной конвекции воздуха — 10—200, воды — 50—10 000; для кипящей воды — 3000—100 000; для конденсирующего водяного пара — 5000—100 000.

Процессы конвективного теплообмена весьма часто встречаются в технике, как составная часть они входят также в природные процессы, происходящие в результате воздействия технических устройств на окружающую среду. Поэтому задача определения коэффициента теплоотдачи очень важна. Особенности движения вязкой жидкости в непосредственной близости от стенки позволяют установить связь коэффициента теплоотдачи с температурным полем в жидкости, которое, как было показано в гл. 12, может быть найдено в результате решения уравнения энергии и уравнений гидромеханики.

На рис. 3.1 показано температурное поле вблизи холодной стенки, вдоль которой течет нагретая жидкость. Благодаря выполнению условия прилипания частицы жидкости, находящиеся в непосредственной близости к твердой поверхности тела, образуют тонкий неподвижный слой. В неподвижной среде, как известно, перенос теплоты осуществляется только путем теплопроводности, поэтому можно записать:

$$q = -\lambda(\partial t / \partial n)_{n=0},$$

где индекс  $n = 0$  означает, что берется значение градиента температуры на стенке;  $\lambda$  — теплопроводность жидкости.

С другой стороны, плотность теплового потока на стенке может быть выражена по закону Ньютона — Рихмана:

$$q = \alpha(t_{жс} - t_c).$$

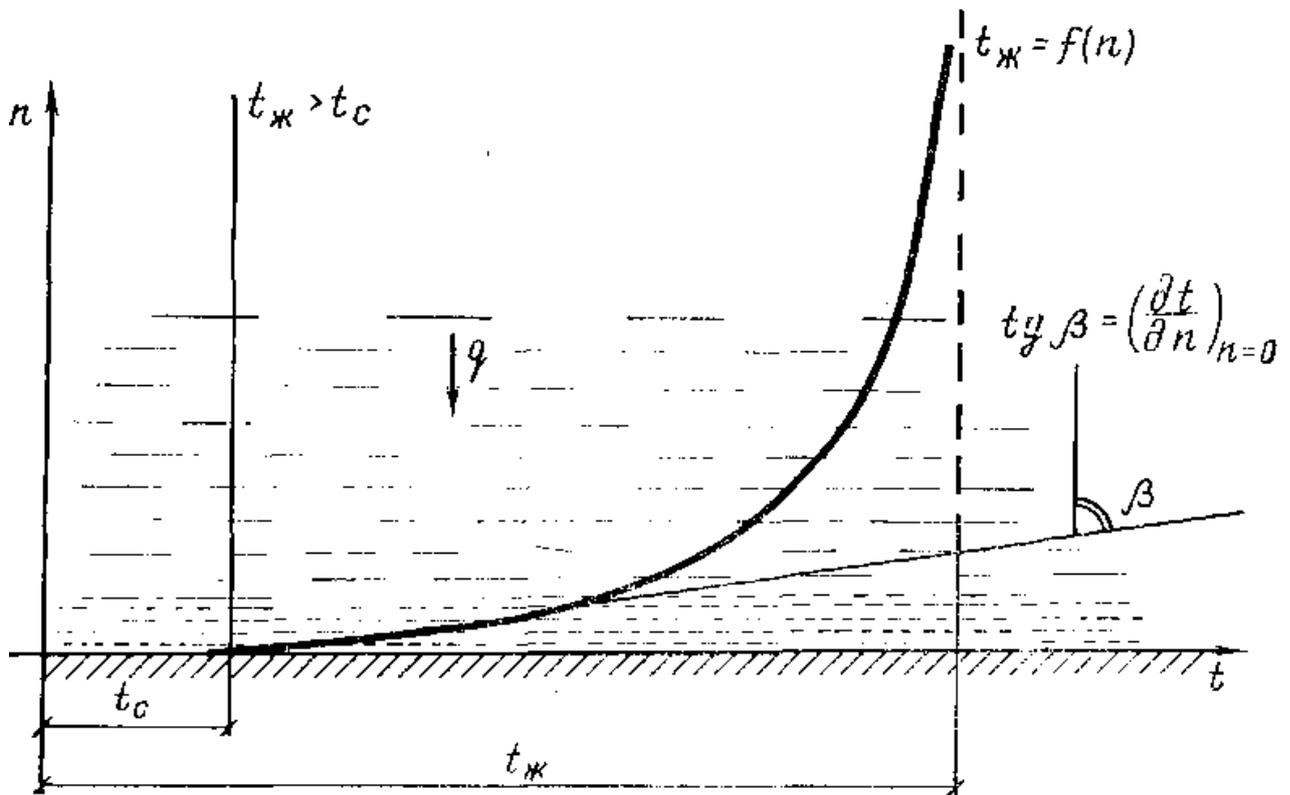


Рис. 3.1 Температурное поле вблизи холодной стенки

Из двух приведенных выражений получаем уравнение

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_{жс} - t_c} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (3.2)$$

которое устанавливает связь между коэффициентом теплоотдачи и температурным полем в жидкости.

Уравнение (3.2) сводит задачу нахождения коэффициента теплоотдачи к основной задаче теории теплообмена — определению температурного поля.

## 2.6.2 Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Безразмерные переменные

Рассмотрим задачу конвективного теплообмена для простых геометрических условий: поток жидкости движется в направлении оси  $Ox$  вдоль плоской поверхности (рис. 3.2). Заданы скорость  $w_0$  и температура  $t_{жс}$  не-

возмущенного потока, температура стенки  $t_c$  на участке длиной  $l_0$ , а также теплофизические свойства жидкости —  $\rho, c_p, \lambda$  и  $\mu$ .

В результате теплового и динамического взаимодействия стенки с потоком температура и скорость последнего в пристенной области меняются. Формируются поле температуры  $t(x, y)$  и поле скорости  $\vec{w}(x, y)$ ; в направлении

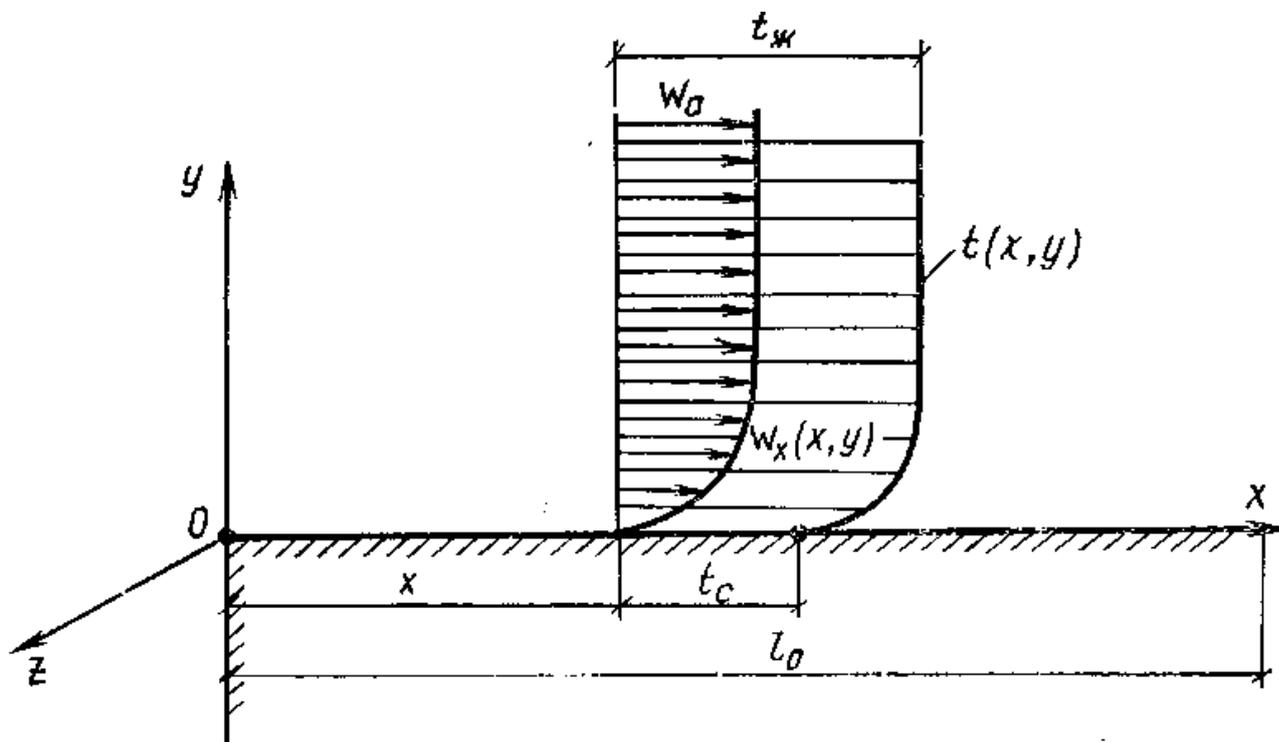


Рис. 3.2 Конвективный теплообмен для простых геометрических условий

оси  $Oz$  по условию задачи никаких изменений не происходит. Рассматриваемый процесс является стационарным.

Для данного случая запишем систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена — уравнения энергии, движения и сплошности; из уравнений исключаются члены, связанные с изменением величин во времени и по оси  $Oz$ . Уравнение энергии будет иметь следующий вид:

$$\rho c_p (w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y}) = \lambda (\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + w_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}). \quad (3.3)$$

Две проекции уравнения движения могут быть представлены следующим образом:

$$\rho(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}); \quad (3.4)$$

$$\rho(w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} - w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}). \quad (3.5)$$

Уравнение сплошности имеет вид:

$$dw_x / dx + dw_y / dy = 0. \quad (3.6)$$

Пространственная область, в которой рассматривается процесс конвективного теплообмена задана следующими геометрическими условиями:

$$0 \leq x \leq l_0; 0 \leq y \leq +\infty; -\infty \leq z \leq +\infty. \quad (3.7)$$

Поскольку процесс стационарен, начальные условия отпадают. Граничные условия для искомых функций  $t$ ,  $w_x$ ,  $w_y$  и  $p$  могут быть записаны следующим образом:

на поверхности стенки ( $y=0$ ,  $0 \leq x \leq l_0$ ):

$$t = t_c; w_x = w_y = 0 \quad (3.8)$$

на бесконечном удалении от стенки ( $y \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq x \leq l_0$ ):

$$t = t_{\infty}; w_x = w_0; w_y = 0. \quad (3.9)$$

Давление следует задать в начальном сечении:  $x=0$ ,  $0 \leq y \leq +\infty$ . Более детальное рассмотрение вопроса о задании давления на других участках границы рассматриваемой области будет сделано ниже применительно к конкретным случаям.

Система дифференциальных уравнений (3.3) — (3.6) совместно с условиями однозначности (3.7) — (3.9) представляет собой формулировку краевой задачи конвективного теплообмена. Следует отметить, что вследствие больших математических трудностей общее решение системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена получить не удастся. Поэтому с целью поиска возможных путей решения поставленной

задачи проанализируем структуру предполагаемой функциональной зависимости для температурного поля. На основе постановки краевой задачи можно утверждать, что поле скорости и поле давления есть результат решения уравнений гидродинамики — уравнений (3.4) — (3.6), ибо рассматривается несжимаемая жидкость, физические свойства которой не зависят от температуры. Например, значение вектора скорости в какой-либо точке рассматриваемой области определяется координатами этой точки, коэффициентами дифференциальных уравнений и параметрами, входящими в граничные условия:

$$\vec{w} = \vec{w}(x, y, \rho, \mu, g, l_0, \vec{w}_0). \quad (3.10)$$

Давление можно отсчитывать от заданного значения  $p_0$  в начальном сечении, т. е. в уравнениях движения можно заменить производные  $\partial p / \partial x_i$  равными им производными  $\partial(p - p_0) / \partial x_i$ . Тогда для поля давления имеем выражение:

$$p - p_0 = p(x, y, \rho, \mu, \vec{g}, l_0, w_0). \quad (3.11)$$

Поскольку поле температуры зависит от функций  $w_x$  и  $w_y$ , в правую часть функциональной зависимости для температуры, кроме коэффициента  $a = \lambda / \rho c_p$  из уравнения энергии и соответствующих параметров из условий однозначности, войдут величины из правой части уравнения (6.10). Температуру допустимо отсчитывать от уровня температуры стенки  $t_c$ , так как при замене величины  $t$  в уравнении энергии (3.3) величиной  $t - t_c$  оно не изменяется. Для температурного поля имеем следующую функциональную зависимость:

$$t - t_c = t(x, y, a, \rho, \mu, \vec{g}, t_{жс} - t_c, w_0, l_0). \quad (3.12)$$

В уравнении (3.12) можно выделить три группы величин: координаты (аргументы функции  $t$ )  $x$  и  $y$ ; постоянные коэффициенты дифференциальных уравнений — заданные величины, не относящиеся ни к искомым функциям, ни

к аргументам, —  $a$ ,  $\rho, \mu$  и  $\bar{g}$ , при этом в данном случае можно использовать модуль вектора ускорения свободного падения  $g$ ; параметры условий однозначности, представляющие собой значения искомых функций при определенных значениях координат —  $t_{жс} - t_c, w_0$  и  $l_0$ .

Конкретный вид функциональной зависимости (3.12) для температуры не известен, поэтому единственный способ упрощения этой зависимости состоит в уменьшении *количества* переменных, от которых зависит температура. Произведем эту операцию, опираясь на приведенную выше классификацию величин в правой части уравнения (3.12). По понятным причинам количество координат уменьшить нельзя. В уравнении энергии (3.3) имеем один постоянный коэффициент и эту ситуацию также изменить невозможно. В уравнении движения (3.4) или (3.5) имеем три постоянных коэффициента; можно разделить уравнение движения на один из них, тогда получим два коэффициента, что приведет к уменьшению величин второй группы с четырех до трех. Кроме того, параметры условий однозначности можно выбрать в качестве масштабов измерения искомых функций  $t, w_x, w_y, p$  и координат  $x, y$ . Эта операция имеет наибольшую ценность: замена обычных единиц измерения параметрами граничных условий позволяет полностью исключить эти параметры из правой части зависимости (3.12).

Таким образом, после указанных преобразований (так называемых масштабных преобразований) число переменных в правой части уравнения (3.12) должно уменьшиться с девяти до пяти.

В качестве масштаба для координаты  $x$  выберем величину  $l_0$ . Тогда размерному значению координаты в метрах соответствует безразмерное значение  $X = x/l_0$  в то время как размерное значение координаты изменялось в интервале  $0 \leq x \leq l_0$ , безразмерное — в интервале  $0 \leq X \leq 1$ . Масштабом для координаты  $y$  также служит  $l_0$ , для температуры —  $t_{жс} - t_c$ , для скорости —  $w_0$ , для давления — динамическое давление  $\rho w_0^2$ . С использованием указанных масштабов имеем следующие безразмерные величины:

$$X = x/l_0; Y = y/l_0; \theta = (t - t_c)/(t_{жс} - t_c);$$

$$W_x = w_x/w_0; W_y = w_y/w_0; p = (p - p_0)\rho w_0^2. \quad (3.13)$$

Заменим размерные переменные в уравнениях (3.3) — (3.6) безразмерными переменными, согласно выражениям (3.13). При этом постоянные масштабы необходимо выносить за знак производной. Например, первое слагаемое в левой части уравнения энергии преобразуется следующим образом:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = w_0 W_x \frac{\partial[(t_{жс} - t_c)\theta]}{\partial(l_0 X)} = \frac{w_0(t_{жс} - t_c)}{l_0} W_x \frac{\partial \theta}{\partial X}.$$

Первое слагаемое в правой части уравнения энергии преобразуется так:

$$a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) = a \frac{\partial}{\partial(l_0 X)} \left( \frac{\partial[(t_{жс} - t_c)\theta]}{\partial(l_0 X)} \right) =$$

$$= \frac{a(t_{жс} - t_c)}{l_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}.$$

Окончательно уравнение энергии в безразмерном виде представляется следующим образом:

$$\frac{w_0 l_0}{a} \left( W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}.$$

Безразмерный комплекс в левой части уравнения составлен из величин, входящих в условия однозначности и, следовательно, выражающих характерные особенности рассматриваемого процесса. Физический смысл этого комплекса можно раскрыть, если разделить конвективный член уравнения энергии на член, учитывающий перенос теплоты путем теплопроводности, и оценить значения производных:

$$\frac{\rho c_p w_x (\partial t / \partial x)}{\lambda (\partial^2 t / \partial x^2)} \square \frac{\rho c_p w_x (\Delta t / \Delta x)}{\lambda (\Delta t / \Delta x^2)} \square$$

$$\square \frac{\rho c_p w_x \Delta x}{\lambda} \square \frac{\rho c_p w_0 l_0}{\lambda} = \frac{w_0 l_0}{a}.$$

Таким образом, этот комплекс дает сравнительную оценку интенсивности конвективного переноса и переноса путем теплопроводности. В последующем будет показано, что существует ряд таких безразмерных комплексов, позволяющих оценивать и сопоставлять различные факторы одинаковой

физической природы. Эти безразмерные комплексы имеют важное значение для теплообмена и гидродинамики и им присваивают имена ученых, которые внесли значительный вклад в развитие этих наук. Так, рассматриваемый комплекс называют *числом Пекле*:

$$Pe = \rho c_p w_0 l_0 / \lambda = w_0 l_0 / a.$$

Уравнение движения в проекции на ось  $Ox$ , приведенное к безразмерной форме с использованием соотношений (3.13), имеет следующий вид:

$$\frac{\rho w_0^2}{l_0} (W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y}) = \rho g_x - \frac{\rho w_0^2}{l_0} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu w_0}{l_0^2} (\frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2})$$

или

$$\frac{\rho w_0 l_0}{\mu} (W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y}) = \frac{\rho g_x l_0^2}{\mu w_0} - \frac{\rho w_0 l_0}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}.$$

В этом уравнении имеется известное из основ гидродинамики *число Рейнольдса*

$$Re = \rho w_0 l_0 / \mu = w_0 l_0 / \nu,$$

выражающее соотношение между силами инерции и силами вязкости в потоке:

$$\frac{\rho w_x (\partial w_x / \partial x)}{\mu (\partial^2 w_x / \partial x^2)} \square \frac{\rho w_x (\Delta w_x / \Delta x)}{\mu (\Delta w_x / \Delta x^2)} \square \frac{\rho w_x \Delta x}{\mu} \square \frac{\rho w_0 l_0}{\mu} = \frac{w_0 l_0}{\nu}.$$

здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\nu = \mu / \rho$ , м<sup>2</sup>/с.

Первое слагаемое в правой части приведенного выше уравнения движения можно представить так:

$$\frac{\rho g_x l_0^2}{\mu w_0} = \frac{g_x l_0^2}{\nu w_0} = \frac{g_x l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0}.$$

Левый множитель этого выражения представляет собой *число Галилея*

$$Ga = g l_0^3 / \nu^2$$

и отражает соотношение сил тяжести и сил вязкого трения для медленно текущих потоков. Действительно, в общем случае соотношение указанных сил отражается комплексом  $Ga/Re$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho g}{\mu(\partial^2 w_x / \partial x^2)} \square \frac{\rho g}{\mu(\Delta w_x / \Delta x^2)} \square \frac{\rho g}{\mu(w_0 / l_0^2)} = \\ & = \frac{gl_0^2}{vw_0} = \frac{gl_0^3}{v^2} \frac{v}{w_0 l_0} = \frac{Ga}{Re}, \end{aligned}$$

однако в медленных потоках (например, пленка жидкости, стекающая вниз по вертикальной стенке), когда число  $Re$  мало и можно положить  $Re \sim 1$ , имеем:

$$Ga \sim Re \frac{F_g}{F_\tau} \square \frac{F_g}{F_\tau}.$$

Уравнение движения в проекции на ось  $Oy$  при приведении его к безразмерному виду даст те же безразмерные комплексы, уравнение сплошности никаких комплексов не дает.

Система уравнений в безразмерном виде может быть представлена следующим образом:

$$Pe(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y}) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}; \quad (3.3')$$

$$\begin{aligned} Re(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y}) = & \quad (3.4') \\ = \frac{Ga_x}{Re} - Re \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(W_x \frac{\partial W_y}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y}) = \frac{Ga_y}{Re} - Re \frac{\partial P}{\partial Y} + & \quad (3.5') \\ + \frac{\partial^2 W_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial Y^2}; \end{aligned}$$

$$\partial W_x / \partial X + \partial W_y / \partial Y = 0. \quad (3.6')$$

Граничные условия в безразмерном виде запишутся так:

на поверхности стенки ( $Y = 0, 0 \leq X \leq 1$ ):

$$\theta = 0; W_x = W_y = 0; \quad (3.8')$$

на бесконечном удалении от стенки ( $Y \rightarrow \infty, 0 \leq X \leq 1$ ):

$$\theta = 1; W_x = 1; W_y = 0. \quad (3.9')$$

В уравнениях движения (3.4') и (3.5') числа Галилея равны:

$$Ga_x = g_x l_0^3 / \nu^3; Ga_y = g_y l_0^3 / \nu^2.$$

Уравнения (3.3') — (3.6') с граничными условиями (3.8') и (3.9') представляют собой постановку краевой задачи конвективного теплообмена в безразмерном виде. Общий вид решения такой задачи для температурного поля дается выражением:

$$\theta = \theta(X, Y, Pe, Re, Ga). \quad (3.12')$$

В выражении (3.12') число величин в правой части равно пяти вместо девяти в размерном выражении (3.12): отпали один из коэффициентов уравнения движения и три параметра из граничных условий как масштабные величины, численно равные единице в безразмерной формулировке.

В зависимости от динамических условий, в которых протекает процесс конвективного теплообмена, одно из чисел —  $Re$  или  $Ga$  имеет преобладающую значимость. Так, если для определенной жидкости с плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$  скорость потока велика, то велико и число  $Re$ , а следовательно, комплекс  $Ga/Re$  мал и может быть отброшен из уравнения движения.

Такая ситуация обычно наблюдается в процессах вынужденной конвекции. Для таких процессов имеем следующую зависимость:

$$\theta = \theta(X, Y, Pe, Re).$$

Число  $Pe$  может быть представлено в виде двух сомножителей:

$$Pe = w_0 l_0 / a = \rho c_p w_0 l_0 / \lambda = (\mu c_p / \lambda) Re.$$

Первый сомножитель называют *числом Прандтля*

$$Pr = \mu c_p / \lambda,$$

которое представляет собой безразмерный комплексный теплофизический параметр вещества (капельной жидкости или газа). Следует отметить, что ранее

уже вводились размерные комплексные физические параметры: температуропроводность  $\alpha = \lambda / \rho c_p$  и кинематическая вязкость  $\nu = \mu / \rho$ . С использованием числа  $Pr = \nu / \alpha$  безразмерная зависимость для температурного поля может быть записана в виде:

$$\theta = \theta(X, Y, Pr, Re, Re).$$

или

$$\theta = \theta(X, Y, Re, Pr). \quad (3.14)$$

Теперь следует получить общую функциональную зависимость типа (3.14) для коэффициента теплоотдачи. С этой целью приведем к безразмерному виду выражение (3.2), устанавливающее связь коэффициента теплоотдачи  $a$  с температурным полем  $t(x, y)$ . Используя масштабы [см. выражения (3.13)] для температуры и координаты, вместо размерного выражения  $\alpha = -[\lambda / (t_{жс} - t_c)](\frac{\partial t}{\partial y})_{y=0}$  получим безразмерное выражение:

$$\alpha l_0 / \lambda = -(\partial \theta / \partial Y)_{y=0}. \quad (3.15)$$

Безразмерный комплекс в левой части выражения (3.15) называют *числом Нуссельта*

$$Nu = \alpha l_0 / \lambda,$$

которое представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи.

Для получения правой части выражения (3.15) необходимо взять частную производную от  $\theta$  из уравнения (3.14) по  $Y$  и подставить значение  $Y = 0$ ; после такой операции координата  $Y$  из числа переменных выпадает и для числа  $Nu$  имеем зависимость:

$$Nu = f(X, Re, Pr). \quad (3.16)$$

Зависимость (3.16) указывает, что безразмерный коэффициент теплоотдачи для определенного значения  $X$  (так называемый местный, или локальный, коэффициент теплоотдачи) может быть рассчитан по формуле, содержащей всего три величины.

Часто представляет интерес средний по поверхности теплообмена коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_o} \int_0^{l_o} \alpha(x) dx, \quad (3.17)$$

которому соответствует среднее по поверхности теплоотдачи число Нуссельта

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu dX, \quad (3.18)$$

в данном случае равное

$$\overline{Nu} = \int_0^1 f(X, Re, Pr) dX = F(Re, Pr).$$

Подводя итог проведенному анализу, следует констатировать: в процессах вынужденной конвекции средний безразмерный коэффициент теплоотдачи определяется двумя безразмерными комплексами — числом Рейнольдса и числом Прандтля:

$$\overline{Nu} = F(Re, Pr), \quad (3.19)$$

которые отражают соответственно гидродинамические особенности движущейся среды и ее теплофизические параметры.

### 2.6.3 Подобие процессов конвективного теплообмена

После получения для теплоотдачи общей зависимости типа (3.19) необходимо установить конкретный вид функции  $F(Re, Pr)$ . Для решения этой задачи имеются следующие пути:

1. Аналитическое решение задачи, т. е. расчет теплоотдачи по формулам, полученным в результате интегрирования системы уравнений конвективного теплообмена и определения постоянных интегрирования из условий однозначности. Интегрирование точных уравнений конвективного теплообмена, возможное в весьма немногочисленных случаях, используется в основном для учебных целей или для грубой оценки теплоотдачи в более

сложных случаях. Достигнутые на этом пути успехи связаны с упрощенной физической схематизацией процесса (при которой сохраняются, однако, важные факторы) и использованием приближенных уравнений; примером может служить теория пограничного слоя.

2. Численные методы решения, которые находят все большее применение в связи с развитием и широким использованием вычислительной техники. По отношению к рассматриваемой системе дифференциальных уравнений наиболее универсальными являются конечно-разностные методы, в соответствии с которыми дифференциальные уравнения заменяются уравнениями в конечных разностях. Область, в которой производится расчет температурного поля, представляется множеством отдельных точек (сеткой) с заданным шагом по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Для каждой такой точки уравнения в конечных разностях образуют систему алгебраических уравнений, в которые входят и значения искомых функций в соседних точках. В результате решения алгебраических уравнений получают значения искомых функций в узлах сетки, например, таблицу значений температуры в рассматриваемой области  $D$ . Важно, чтобы разностная схема задачи была устойчивой — при измельчении шага сетки последовательно получаемые таблицы решений должны сходиться к точному решению задачи (т. е. образовывать сходящуюся последовательность). При применении численных методов значительно расширяется круг решаемых задач конвективного теплообмена и появляется возможность осуществлен так называемого численного эксперимента, основанного на использовании многочисленных вариантов исходных данных задачи. Эти методы имеют и неудобства: результаты численных расчетов представляют обычно в виде таблиц, по которым хотя и можно составить аппроксимационные формулы, однако эти формулы, как правило, имеют эмпирический характер и не отражают глубокой физической сущности процесса.

3. Экспериментальное исследование процесса конвективного теплообмена. Этот путь используется чаще других, в особенности для сложных процессов.

Проведение эксперимента на реальных объектах связано с трудностями организационного и экономического порядка. Кроме того, в период проведения исследования реального объекта может не быть вообще, поскольку именно потребность спроектировать его и вызвала необходимость проведения исследования. Поэтому в большинстве случаев эксперимент проводится на лабораторных установках. В процессе эксперимента выявляется влияние отдельных величин на интенсивность теплоотдачи, при этом измеряются температура, скорость, массовый расход, давление и т. п.; в экспериментах по теплообмену теплофизические свойства жидкости, как правило, не измеряют, а используют опубликованные справочные данные. Экспериментальный путь решения задач конвективного теплообмена связан, с одной стороны, со сложностью, обусловленной большим количеством влияющих на теплообмен факторов, а с другой, — с узко специальным характером получаемых результатов, справедливых только для данной лабораторной установки в пределах изменения параметров эксперимента. При этом следует иметь в виду, что создание лабораторной установки, выбор моделирующей среды, определение необходимых интервалов изменения параметров эксперимента должны осуществляться в соответствии с определенными правилами, обеспечивающими достижение главной цели, — получить расчетную зависимость для процесса на реальном объекте. Три указанных проблемы — упрощение функциональной зависимости для теплоотдачи, повышение ее универсальности, создание правил моделирования — помогает решить теория подобия.

Метод подобия эффективен не только при проведении экспериментального исследования, но оказывается плодотворным и при аналитическом или численном решении задач конвективного теплообмена. Существует тесная связь между формально-математическим упрощением задачи, и подобием процессов конвективного теплообмена. Раскроем эту связь, для чего, во-

первых, рассмотрим сущность понятия подобия применительно к физическим процессам и, во-вторых, укажем условия подобия процессов.

Понятие подобия физических процессов в качестве составной части включает геометрическое подобие, хорошо известное из элементарной геометрии: например, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, плоскости в плоскости, сохраняет углы между прямыми и плоскостями. Пусть физический процесс происходит в области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед (тело 1) с размерами

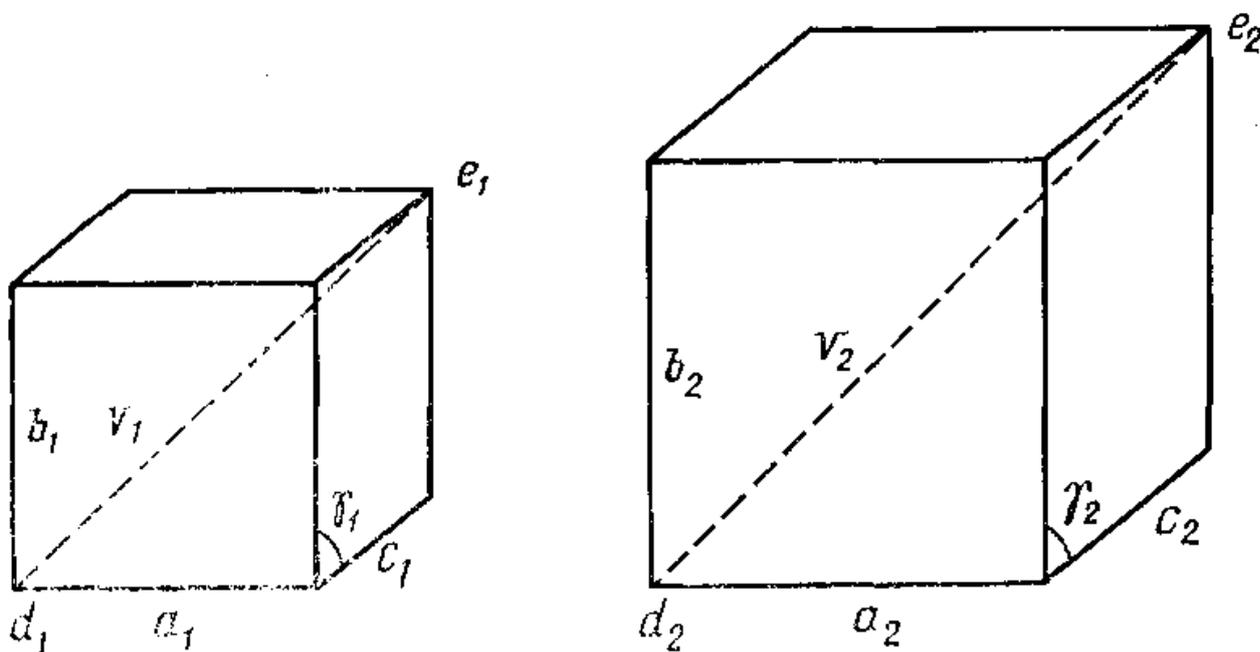


Рис. 3.3 Физический процесс в области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед  $a_1, b_1$  и  $c_1$  (рис. 3.3). Подобный ему параллелепипед (тело 2) с размерами  $a_2, b_2$  и  $c_2$  получим, если изменим все три размера в одном и том же отношении

$$a_2 = k_1 a_1; b_2 = k_1 b_1; c_2 = k_1 c_1,$$

где  $k_1$  — константа геометрического подобия.

Из факта подобия тел 1 и 2 вытекает ряд следствий (или так называемых «необходимых условий»): поскольку ортогональность ребер и граней в теле 2 сохранилась, то равны попарно любые плоские и двугранные углы тела 1 и тела 2, если сравнение производится по сходственным элементам; расстояние между двумя произвольными точками тела 1 относится к расстоянию между

сходственными точками тела 2 как длины сходственных ребер; объемы двух тел относятся как кубы сходственных ребер и т. д. Между тем обратные утверждения, взятые по отношению к отдельному конкретному следствию, не являются верными. Иными словами, каждое отдельно взятое следствие или даже некоторая их совокупность не являются достаточными условиями существования подобия двух рассматриваемых геометрических тел. Установление достаточных условий подобия требует специального анализа.

Для упрощения изложения воспользуемся условными обозначениями, принятыми в логике: обозначим буквой  $A$  условие: «геометрические тела 1 и 2 подобны». Тогда имеем следствия («необходимые условия»), вытекающие из  $A$ :

$$a_2 / a_1 = k_1 - B_1; = \gamma_2 - B_2;$$

$$d_2 e_2 = k_1 d_1 e_1 - B_2;$$

$$V_2 / V_1 = (a_2 / a_1)^2 - B_4; \{B_i\} \quad (3.20)$$

$$a_1 / c_1 = a_2 / c_2; b_1 / c_1 = b_2 / c_2 - B_m;$$

$$a_1 \perp b_1 \perp c_1 \perp a_1; a_2 \perp b_2 \perp c_2 \perp a_2 - B_n$$

где  $\{B_i\}$  — совокупность следствий  $B$ , вытекающих из  $A$ .

Описанные выше логические взаимосвязи, касающиеся факта подобия геометрических тел 1 и 2, можно выразить двумя формулами:

$$A \rightarrow \{B_i\}, \quad (3.21)$$

$$B_i \rightarrow A, \quad (3.22)$$

при этом выражение (3.22) означает, что из любого отдельно взятого  $B_i$  не следует  $A$ .

Действительно, например, условие  $B_1$  не является достаточным для существования подобия, поскольку допустимо  $b_2 \neq k_1 b_1$  а значит  $A$  нарушено. Из  $B_2$  также не следует  $A$ , так как грань, содержащая угол  $\gamma_2$ , может быть не перпендикулярной основанию. По условию  $B_3$  требуется, чтобы между

диагоналями тел  $1$  и  $2$  было такое же соотношение, как между ребрами  $a_1$  и  $a_2$ . Это условие можно выполнить и не сохраняя подобие: в теле  $2$  сохраним ребро  $a_2 = k_1 a_1$ , а диагональ  $d_2 e_2 = k_2 d_1 e_1$  повернем вокруг точки  $d_2$  вверх как жесткий стержень, при этом  $c_2$  уменьшится, а  $b_2$  возрастет, что и нарушает подобие при выполнении условия  $B_3$ . Возьмем два условия —  $B_1$  и  $B_4$  и проверим их достаточность для выполнения условия  $A$ . Результат будет отрицательным, ибо  $B_1$  и  $B_4$  выполняются и при отсутствии подобия: пусть

$$a_2 = k_1 a_1; b_2 = k_1' b_1; c_2 = k_1'' c_1;$$

тогда отношение объемов равно требуемой величине

$$\begin{aligned} V_2 / V_1 &= a_2 b_2 c_2 / a_1 b_1 c_1 = k_1 a_1 k_1' b_1 k_1'' c_1 / a_1 b_1 c_1 = \\ &= k_1 k_1' k_1'' = k_1^3 = (a_2 / a_1)^3, \end{aligned}$$

Если  $k_1'$  выбрать произвольно, а  $k_1''$  определить по формуле

Как же решается вопрос о достаточных условиях подобия в данном случае? Необходимо прежде всего установить множество тех элементов, которые полностью определяют данное геометрическое тело; множество это должно быть минимальным. Здесь элементами являются отрезки и углы; достаточно взять три отрезка  $a_1, b_1$  и  $c_1$  и потребовать их взаимной ортогональности, чтобы прямоугольный параллелепипед  $1$  был полностью определен. Нетрудно видеть, что для соблюдения геометрического подобия достаточно сохранить отношения  $a/c$ ,  $b/c$  и углы. Имеются три линейных размера, из них определяющих подобие отношений только два, так как один размер используется в качестве масштаба; углы безразмерны, поэтому их число не изменяется. Таким образом, в данном случае достаточными условиями подобия являются  $B_m, B_n$  из множества  $\{B_i\}$ . Совокупность достаточных условий обозначим  $\{C_i\}$ .

В результате рассмотрения вопроса о геометрическом подобии можно выделить следующие положения:

определение геометрического подобия заключается в том, что в подобных телах сходственные отрезки должны быть пропорциональны, а углы равны;

из факта геометрического подобия вытекает совокупность следствий  $\{B_i\}: A \rightarrow \{B_i\}, B_i \rightarrow A$ ;

часть этих следствий  $\{C_i\}$  представляет собой достаточные условия геометрического подобия, т. е.

$$\{C_i\} \rightarrow A. \quad (3.23)$$

Вопрос о подобии физических процессов намного сложнее вопроса подобия геометрических тел, однако логический ход рассуждений для обоих случаев имеет много общего.

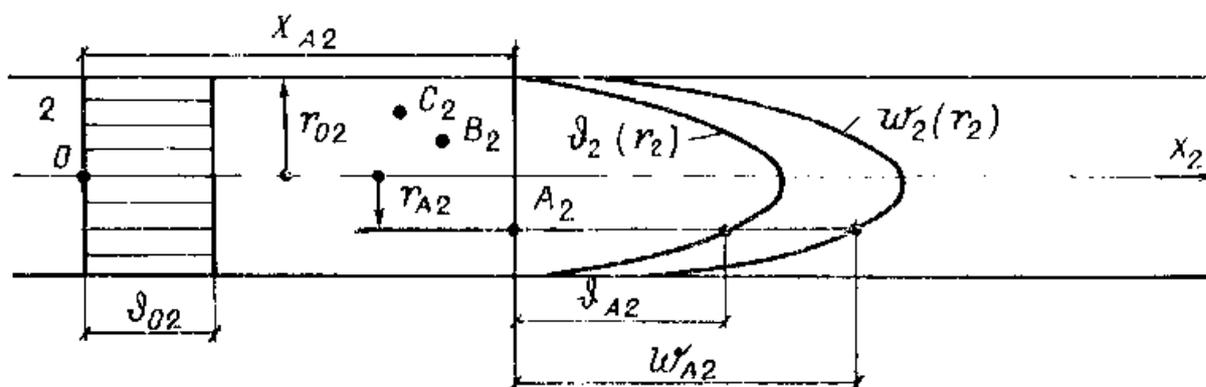


Рис. 3.4 Процесс конвективного теплообмена при течении жидкости в трубе круглого поперечного сечения

Процессы конвективного теплообмена называют подобными, если у сравниваемых процессов подобны соответственно поля температуры, скорости и давления. Два поля подобны, если переход от одного из них к другому можно осуществить путем умножения на константу подобия. Константа подобия не зависит от координат и времени. Для полей различных физических величин константы подобия различны; произвольный выбор констант подобия недопустим.

Для примера рассмотрим процесс конвективного теплообмена при течении жидкости в трубе круглого поперечного сечения (рис. 3.4). Индексами 1 и 2 обозначены два подобных процесса. Сравним поля скорости и температуры для этих процессов. Координатами точки служат: радиальная координата  $0 \leq r \leq r_0$  и осевая координата  $0 \leq x \leq \infty$ . Сравнение скоростей производится следующим

образом. В процессе 1 выбирается произвольная точка  $A_1$  с координатами  $r_{A_1}$  и  $x_{A_1}$ , скорость в этой точке имеет значение  $w_{A_1}$ . В процессе 2 необходимо найти *сходственную точку* с координатами:  $r_{A_2} = k_1 r_{A_1}; x_{A_2} = k_1 x_{A_1}$ , где  $k_1$  — константа геометрического подобия. Скорость в точке  $A_2$  связана со скоростью в точке  $A_1$  преобразованием подобия для полей скорости:

$$w_{A_2} = k_w w_{A_1}, \quad (3.24)$$

где  $k_w$  — константа подобия полей скорости.

Поскольку процессы 1 и 2 подобны, то такая же ситуация наблюдается для любой пары сходственных точек:  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  и т. д. Следовательно, два профиля скорости  $w_1(r_1)$  и  $w_2(r_2)$  подобны.

Область  $D$ , в которой развивается процесс конвективного теплообмена, включает в себя и границу. Сходственные точки, расположенные на границе, связаны теми же соотношениями, что и прочие сходственные точки. Основываясь на этом, можно определить константу геометрического подобия:

$$k_1 = r_{02} / r_{01};$$

величина  $r_{01}$  или  $r_{02}$  есть *характерный размер*, он всегда задан в условиях задачи. Существует и *характерная скорость* —  $w_{01}$  или  $w_{02}$ . В качестве характерной скорости при течении жидкости в трубе обычно используют среднюю по сечению скорость

$$w_0 = \frac{1}{f_0} \int_{f_0} w(r) 2\pi r dr = G / \rho f_0,$$

где  $G$  — массовый расход жидкости через трубу, кг/с;  $f_0 = \pi r_0^2$  — площадь поперечного сечения трубы.

Константа подобия полей скорости определяется значениями характерной скорости для сравниваемых процессов:

$$k_w = w_{02} / w_{01}. \quad (3.25)$$

Подобие полей температуры устанавливается аналогичным образом. Обычно используется избыточная температура  $\vartheta = t - t_c$ , отсчитываемая от уровня температуры стенки  $t_c$ . Связь между температурными полями процессов 1 и 2 дается выражением, аналогичным выражению (3.24):

$$\vartheta_{A2} = k_g \vartheta_{A1}, \quad (3.24')$$

где  $k_g$  — константа подобия полей температуры, определяемая значениями *характерных температур* по выражению, аналогичному выражению (3.25):

$$k_0 = \vartheta_{02} / \vartheta_{01}; \quad (3.25')$$

здесь  $\vartheta_0 = t_0 - t_c$  — характерная избыточная температура;  $t_0$  — избыточная температура жидкости на входе в трубу, где профиль температуры постоянен.

Одно из важнейших свойств подобных процессов связано с тем обстоятельством, что факт подобия можно установить и без использования констант  $k_b$ ,  $k_w$  и  $k_g$ . Роль константы подобия можно представить себе следующим образом: она порождает поля, подобные данному; так, исходное поле температуры  $\vartheta_1(r_1)$  под воздействием константы  $k_g$  деформируется в подобное поле  $\vartheta_2(r_2)$ ; если взять константу  $k'_g$ , получим третье поле  $\vartheta_3(r_3)$  и т. д. Однако установить факт подобия совокупности получаемых таким путем полей температуры можно без осуществления описанных операций, т. е. можно и не знать степень деформации данного температурного поля по отношению к исходному. Согласно этому методу, каждое из упомянутых температурных полей можно представить в безразмерном виде, используя собственный масштаб. Полученные таким путем безразмерные поля температуры у подобных процессов тождественны. Таким образом, существует одно безразмерное температурное поле для всего класса подобных процессов; то же самое можно сказать и о безразмерном поле скорости. Это утверждение можно непосредственно проверить:

$$X_2 = x_2 / r_{02} = k_l x_1 / k_l r_{01} = x_1 / r_{01} = X_1;$$

$$R_2 = r_2 / r_{02} = k_r r_1 / k_r r_{01} = r_1 / r_{01} = R_1; \quad (3.26)$$

$$W_2 = w_2 / w_{02} = k_w w_1 / k_w w_{01} = w_1 / w_{01} = W_1;$$

$$\theta = \frac{t_2 - t_{c2}}{t_{02} - t_{c2}} = \frac{\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_{02}} = \frac{k_g \mathcal{G}_1}{k_g \mathcal{G}_{01}} = \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_{01}} = \frac{t_1 - t_{c1}}{t_{01} - t_{c1}} = \theta_1.$$

Равенства (3.26) выражают следующее: для подобных процессов в сходственных точках (они имеют одинаковые безразмерные координаты) безразмерные температуры и скорости соответственно равны. Это утверждение может служить определением подобия.

Перейдем, как это было сделано при описании геометрического подобия, ко второму положению — рассмотрим совокупность следствий (необходимых условий), вытекающих из факта подобия и выраженных формулами (3.21) и (3.22).

Наиболее важные из следствий  $V_i$  связаны с искомыми величинами, главной из которых является коэффициент теплоотдачи  $a$ . Для подобных процессов конвективного теплообмена безразмерные коэффициенты теплоотдачи — числа Нуссельта равны, что выражается формулой:

$$\text{Nu} = \text{idem} \quad (3.27)$$

где *idem* (лат.) означает «то же самое».

Наряду с количеством энергии, передаваемой в виде теплоты, представляет практический интерес то количество энергии, которое приходится затрачивать для подачи теплоносителя. Применительно к теплообмену жидкости в трубе это означает, что искомой величиной, кроме  $a$ , является и перепад давления (потеря давления)  $\Delta p = p - p_0$  в трубе определенной длины при заданном массовом расходе жидкости. Безразмерное давление  $p / \rho w_0^2 = Eu$  или  $\Delta p / \rho w_0^2 = Eu$  называют *числом Эйлера*. Физический смысл числа  $Eu$  состоит в том, что оно отражает соотношение между силами давления и силами инерции в потоке:

$$\frac{\partial p / \partial x}{\rho w_x (\partial w / \partial x)} \sim \frac{\Delta p / \Delta x}{\rho w_x \Delta w_x / \Delta x} \sim \frac{\Delta p}{\rho w_x \Delta w_x} \sim \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} = Eu.$$

В инженерных задачах число  $Eu$  является искомым и отражает безразмерную потерю давления (при течении в трубе, поперек пучка труб и т. п.). Число Эйлера — число гидродинамического подобия. Для подобных гидродинамических процессов числа Эйлера равны:

$$Eu = idem \quad (3.28)$$

В зависимости от конкретной задачи искомыми могут быть какие-либо значения температуры или скорости; может оказаться, например, что по заданному перепаду давления необходимо найти скорость жидкости и ее расход. Такая искомая безразмерная скорость также будет одинаковой для всех подобных процессов:

$$W^* = idem \quad (3.29)$$

Однако в такой задаче применительно к течению в трубе отсутствует заданная характерная скорость  $w_0$  и вопрос о масштабе скорости решается по-другому.

Если теплообмен жидкости, текущей по трубе, происходит при граничных условиях II рода (задана плотность теплового потока на стенке), то искомой величиной является температура жидкости на выходе из трубы. Безразмерная температура на выходе из трубы одинакова для подобных процессов:

$$\theta^* = idem, \quad (3.30)$$

при этом отсчет температуры можно производить от начальной температуры жидкости (на входе), а в качестве масштаба избыточной температуры использовать величину  $qr_0 / \lambda$ , К.

Поля температуры, скорости и давления получены в результате решения системы уравнений конвективного теплообмена при определенных условиях однозначности. Поскольку поля безразмерных величин для подобных процессов тождественны, то должны быть тождественны и системы безразмерных уравнений, из которых получены указанные поля.

Следовательно, класс подобных явлений определяется одной и той же системой безразмерных уравнений. Коэффициенты уравнений имеют одно и то же значение для всех подобных процессов. Если ограничиться случаем вынужденного движения жидкости без учета сил тяжести в потоке, то для подобных процессов имеем:

$$Pe = idem; \quad (3.31)$$

$$Re = idem. \quad (3.32)$$

так как именно эти числа фигурируют в качестве коэффициентов безразмерных дифференциальных уравнений энергии и движения.

Условия (3.27) — (3.32) представляют собой совокупность следствий  $\{B_i\}$  (необходимых условий), вытекающих из факта подобия. Вопрос о следствиях  $B_i$  рассмотрен здесь на простом частном случае. При общем подходе эти положения формулируются в виде первой и второй теорем подобия.

*Первая теорема подобия:* если физические процессы подобны между собой, то одноименные числа подобия попарно имеют одинаковые значения.

*Числом подобия* называют безразмерный комплекс, составленный из величин, существенных для данного процесса. Конкретные числовые значения координаты, скорости, температуры, безразмерные числа в условиях (3.27) - (3.32) — все это числа подобия; вместе с тем координаты, скорость и температура в безразмерном виде, безразмерное давление (число Эйлера) одновременно являются безразмерными переменными (аргументами и функциями).

*Вторая теорема подобия:* решения дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс, можно представить в виде зависимости между числами подобия.

Такое безразмерное решение [см., например, выражения (3.12'), (3.14), (3.16) и (3.19)] называют *уравнением подобия*. В уравнении подобия различают определяющие числа подобия, содержащие независимую переменную

(например, безразмерные координаты, безразмерное время в нестационарных процессах), и определяемое число подобия, содержащее зависимую переменную (искомую величину); определяемые числа подобия—  $Nu$ ,  $Eu$  и т. д.

Наконец, перейдем к третьему положению — рассмотрим совокупность достаточных условий  $\{C_i\}$ , выполнение которых влечет за собой подобие процессов [см. формулу (3.23)].

Пусть имеются два процесса конвективного теплообмена, о которых заранее неизвестно, подобны они или нет. Система уравнений для первого процесса дает решение:

$$\theta_1 = \theta_1(X, Y, Re_1, Pr_1). \quad (3.33)$$

Система уравнений для второго процесса дает свое решение:

$$\theta_2 = \theta_2(X, Y, Re_2, Pr_2). \quad (3.34)$$

Чтобы процессы были подобными, их поля безразмерной температуры должны быть идентичными, т. е. в сходственных точках безразмерные температуры должны быть равными:

$$\theta_1(X, Y) = \theta_2(X, Y).$$

Как видно из сопоставления выражений (3.33) и (3.34), для этого достаточно выполнить условия:

$$Re_1 = Re_2; Pr_1 = Pr_2, \quad (3.35)$$

которые и являются достаточными условиями подобия. Для тождественности полей скорости и давления достаточно выполнить условие:  $Re_1 = Re_2$ .

В общем виде достаточные условия подобия физических процессов формулируются в виде *третьей теоремы подобия* (теорема М. В. Кирпичева и А. А. Гухмана): чтобы физические процессы были подобны, достаточно соблюсти равенство их одноименных критериев подобия.

*Критерий подобия* — число подобия, составленное только из заданных параметров дифференциальных уравнений и условий однозначности. Таким

образом, критерии подобия не содержат ни переменных ( $x, y, \bar{w}, t$  и др.), ни искомым ( $\alpha, \Delta p$  и др.) величин.

Особенно широко теория подобия используется при проведении экспериментальных исследований. При этом основной является здесь третья теорема подобия, однако следует иметь в виду и другие факторы, которые неявно учитываются в этой теореме. Более детально условия подобия физических процессов заключаются в следующем.

1. Подобные процессы должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями. Сходство математической формы дифференциальных уравнений особенно важно, так как в принципе исследовать физический процесс можно, создав модель другой физической природы (физическая аналогия), но при этом уравнения должны быть одинаковыми.

2. Подобные процессы должны осуществляться в геометрически подобных системах. Следовательно, модель должна быть копией реального объекта с сохранением одного и того же масштабного преобразования для всех размеров рассматриваемой области.

3. Поля физических величин (температуры, скорости, давления и т. д.) должны быть заданы. Таким образом, условия однозначности подобных процессов должны иметь одинаковую математическую форму.

4. Одноименные критерии подобия для подобных процессов должны быть численно равны.

Рассмотренные условия должны выполняться при создании моделей, на которых в лабораторных условиях экспериментальным путем устанавливаются зависимости, определяющие интенсивность теплоотдачи на реальных объектах. Допустим, решено создать модель, которая представляет собой уменьшенную в 10 раз копию реального объекта. Для соблюдения гидродинамического подобия необходимо выполнить условие  $Re=idem$ :

$$Re_2 = \frac{w_{02} r_{02}}{v_2} = \frac{k_w w_{01} k_l r_{01}}{k_v v_1} = \frac{k_w k_l w_{01} r_{01}}{k_v v_1} = Re_1,$$

где индексом 1 обозначен реальный объект, индексом 2 — модель. Следовательно, константы подобия должны удовлетворять условию  $k_w k_l / k_v = 1$ .

Интервал изменения числа  $Re_1$  на объекте  $Re_1^{\min} \leq Re_1 \leq Re_1^{\max}$  должен воспроизводиться на модели. Поскольку размер  $r_{01}$  объекта известен, то при использовании в модели среды с такой же кинематической вязкостью  $\nu_2 = \nu_1$ ,  $k_v = 1$  получаем следующее условие для максимальной скорости в модели:  $w_{02}^{\max} = 10 w_{01}^{\max}$ .

Если такую скорость по техническим причинам создать в модели нельзя, то необходимо использовать для моделирования среду с меньшей кинематической вязкостью  $\nu_2 < \nu_1$ ,  $k_v < 1$ . Однако для соблюдения теплового подобия необходимо выполнить условие  $Pe = idem$  или  $Pr = idem$ :

$$Pr_2 = \nu_2 / a_2 = k_v \nu_1 / k_a a_1 = Pr_1, k_v / k_a = 1,$$

т. е. моделирующая среда должна иметь во столько же раз уменьшенную температуропроводность. Это обстоятельство, в свою очередь, накладывает определенные условия на другие свойства среды, так как  $a = \lambda / \rho c_p$ .

Поскольку теплофизические свойства среды зависят от температуры, то ясно, что соблюдение всех условий для моделирующей среды на практике — весьма серьезная проблема. По этой причине, а также по ряду других причин, возникающих в сложных задачах конвективного теплообмена, применяется приближенное моделирование. Одним из принципов, который при этом используется, является так называемая *автомодельность*, при возникновении которой в процессе моделирования можно отбросить ограничения, налагаемые на константы подобия одним из критериев подобия. Например, при турбулентном движении несжимаемой жидкости в трубах, на внутренней поверхности которых имеется шероховатость со средней высотой выступов  $h$ , число  $Eu$  для трубы длиной  $l$  и диаметром  $d = 2r_0$  определяется выражением:

$$Eu = F_o(Re, l/d, h/d).$$

При постоянном продольном градиенте давления вместо полной потери давления  $\Delta p$  можно использовать ее отношение к безразмерной длине трубы  $l/d$ , т. е. ввести коэффициент сопротивления трения:

$$2\left(\frac{\Delta p}{\rho w_0^2}\right) / \left(\frac{l}{d}\right) = \xi.$$

В этом случае имеем зависимость для коэффициента сопротивления шероховатой трубы:

$$\xi = F_1(\text{Re}, h/d).$$

При увеличении числа  $\text{Re}$  его влияние на коэффициент  $\xi$  ослабевает (происходит «вырождение» критерия подобия  $\text{Re}$ ) и в пределе при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  имеем автомодельность по этому критерию, т. е.  $\xi \neq f(\text{Re})$  и определяется только относительной шероховатостью. Чем больше относительная шероховатость, тем шире область автомодельности (она начинается при меньших числах  $\text{Re}$ ).

#### 2.6.4 Пограничный слой

*Пограничным* слоем называют область течения вязкой теплопроводной жидкости, характеризующуюся малой толщиной и большим поперечным градиентом скорости и температуры. Такая область возникает у поверхности тела, вдоль которой движется жидкость с температурой, отличающейся от температуры поверхности. Различают *динамический* пограничный слой и *тепловой* пограничный слой (рис. 3.5). По толщине динамического пограничного слоя  $\delta$  продольная скорость потока изменяется от нулевого значения на стенке до значения  $w_0$  во внешнем потоке: при  $y = 0$  имеем  $w_x = 0$ ; при  $y = \delta$  имеем  $w_x = w_0$ . По толщине теплового пограничного слоя  $\delta_t$  аналогичным образом изменяется температура потока: при  $y = 0$  имеем  $t = t_c$  при  $y = \delta_t$  имеем  $t = t_{жс}$ .

Идея о разделении всей области, занятой потоком среды, на две части — узкую пристенную область, в которой главным образом проявляется действие сил вязкости, и остальную часть, где силами вязкости можно пренебречь, —

высказывалась во второй половине XIX в. Д. И. Менделеевым, Н. Е. Жуковским. Однако начало использования расчетных методов теории пограничного слоя относят к 1904 г., когда Л. Прандтль установил уравнения движения жидкости в пограничном слое. Рассмотрим эти уравнения.

Запишем уравнения Навье—Стокса и уравнение сплошности применительно к движению несжимаемой среды вдоль плоской поверхности (см. рис. 3.5); силы

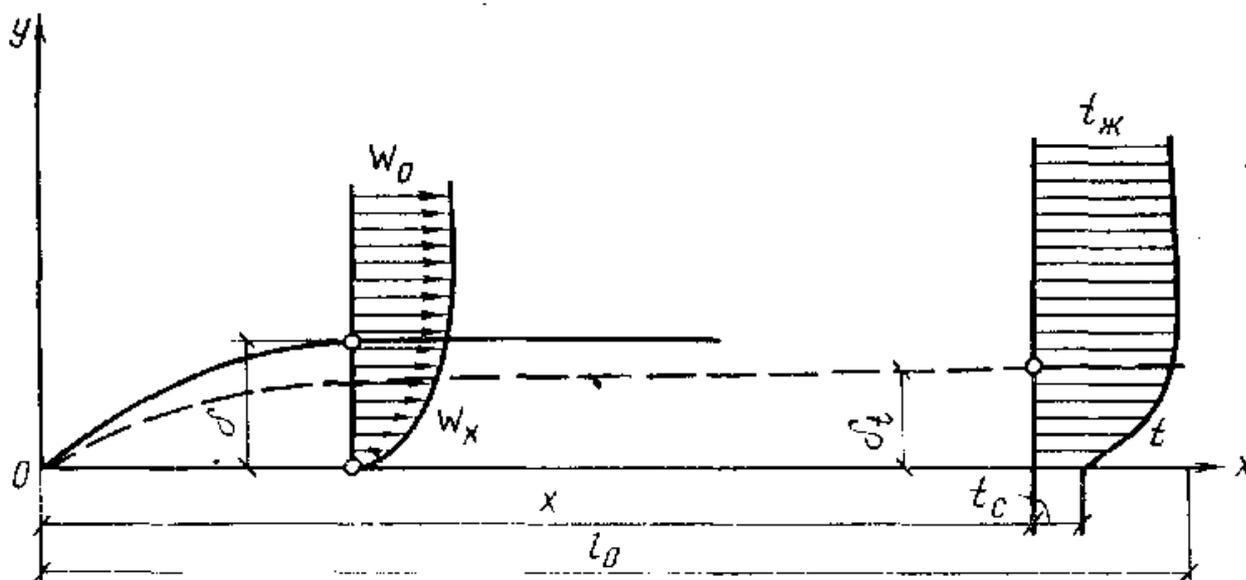


Рис 3.5 Плоская поверхность

тяжести учитывать не будем, а члены, учитывающие силы давления, сохраним:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \quad (3.36)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right); \quad (3.37)$$

$$\partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y = 0. \quad (3.38)$$

В уравнениях (3.36) — (3.38) искомыми функциями являются  $w_x = w_x(x, y)$ ;  $w_y = w_y(x, y)$ ;  $p = p(x, y)$ . Согласно определению пограничного слоя,

величины  $w_x$  и  $w_y$  изменяются только в узкой пристенной области толщиной  $\delta$ , поэтому имеем следующие граничные условия для скорости:

на стенке: при  $0 \leq x \leq l_0, y = 0$  имеем  $w_x = w_y = 0$ ;

на внешней границе пограничного слоя: при  $0 \leq x \leq l_0, y = \delta$  имеем  $w_x = w_0$ .

Воспользуемся методом оценки порядка производных в уравнениях (3.36)—(3.38) для сравнения отдельных членов уравнений (см. пример 3.1). Первый член уравнения сплошности (3.38) имеет порядок  $O(\partial w_x / \partial x) = w_0 / l_0$ . Сплошность — неотъемлемое свойство среды, поэтому второй член выражения (3.38) должен иметь такой же порядок, иначе уравнение перестанет существовать:  $O(\partial w_y / \partial y) = w_0 / l_0$ .

Поскольку основной геометрический признак пограничного слоя состоит в том, что он имеет малую толщину ( $\delta \leq l_0$ ), то отсюда следует, что должно выполняться условие,  $O(w_y) \approx w_0$ , ибо при  $O(y) = \delta$  и  $O(w_y) = w_{y0}$  имеем:  $O(\partial w_x / \partial x) = O(\partial w_y / \partial y)$  или  $w_0 / l_0 \approx w_{y0} / \delta$ .

Таким образом, малость толщины пограничного слоя  $\delta$  влечет за собой малость поперечной составляющей скорости  $w_y$ . Для анализа уравнений (3.36) и (3.37) запишем вместо них эквивалентные символические формулы, отражающие порядок отдельных членов:

$$w_0 \frac{w_0}{l_0} + w_{y0} \frac{w_0}{\delta} \approx O\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \nu \frac{w_0}{l_0^2} + \nu \frac{w_0}{\delta^2}; \quad (3.36')$$

$$w_0 \frac{w_{y0}}{l_0} + w_{y0} \frac{w_{y0}}{\delta} \approx O\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \nu \frac{w_{y0}}{l_0^2} + \nu \frac{w_{y0}}{\delta^2}. \quad (3.37')$$

Из этих формул видно, что порядок членов, учитывающих вязкие силы, зависит от порядка кинематической вязкости. Известно, что для газов и невязких капельных жидкостей (например, для воды) величина  $\nu$  мала, однако не известно, каков порядок этой малости? Для ответа на этот вопрос следует обратиться к сущности самой идеи о пограничном слое: в качестве его выделяется такая область потока, где силы вязкости имеют тот же порядок, что и

силы инерции. Видно, что если  $0(v) = \delta^2$ , то последний член уравнения (3.36) или символической формулы (3.36') имеет конечный порядок, как и инерционные члены в его левой части (например, если принять  $0(v) = \delta$ , то это условие выполнить нельзя). В уравнении (3.37) или символической формуле (3.37') при  $0(v) = \delta^2$  все члены, кроме сил давления, бесконечно малы (точнее имеют порядок  $w_{0y}$ ,  $\delta$  или еще более высокий порядок малости). Следовательно, из выражения (3.37) имеем  $\partial p / \partial y = 0$ , т. е. давление в направлении поперек пограничного слоя не изменяется. Оно равно давлению во внешнем потоке, которое в общем случае может изменяться вдоль оси  $Ox$ , например, при обтекании криволинейной поверхности или в потоке на начальном участке трубы. Предполагается, что во внешнем потоке отсутствует трение, это приводит к простой зависимости между скоростью  $w_0$  и давлением  $p_0$  в этой области. Такая зависимость получается из уравнения (3.36), если отбросить члены, учитывающие вязкость, и принять во внимание, что во внешнем потоке  $w_y = 0$ . Тогда получаем

$$w_0 \frac{dw_0}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx},$$

или

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho w_0^2}{2} + p_0 \right) = 0; \quad \frac{\rho w_0^2}{2} + p_0 = const, \quad (3.39)$$

т. е. во внешнем потоке справедливо уравнение Бернулли. При течении вдоль плоской поверхности  $w_0 = const$ , следовательно,  $p_0 = const$  и  $\partial p / \partial x = 0$ . Таким образом, из уравнения (3.36) выпадают член, учитывающий силы давления, и следующий за ним вязкостный член  $\nu(\partial^2 w_x / \partial x^2)$ , имеющий бесконечно малый порядок  $\nu(w_0 / l_0^2) \propto \delta^2(w_0 / l_0^2)$ . Символическая формула (3.36') приобретает следующий вид:

$$w_0 \frac{w_0}{l_0} + w_{y0} \frac{w_0}{\delta} \approx \nu \frac{w_0}{\delta^2}. \quad (6.36'')$$

Инерционные и вязкостный члены в области пограничного слоя должны иметь одинаковый порядок (должны быть сравнимы по своим значениям):  $w_0(w_0/l_0) \approx \nu(w_0/\delta^2)$ ; отсюда получаем оценку для толщины пограничного слоя

$$\delta/l_0 \approx \sqrt{\nu/w_0 l_0} = 1/\sqrt{Re}.$$

Для толщины в произвольном сечении на расстоянии  $x$  от передней кромки имеем:

$$\delta/x \approx const/\sqrt{Re_x}, \quad (3.46)$$

где  $Re_x = w_0 x/\nu$ .

Таким образом, предположению о малости толщины пограничного слоя  $S$  соответствуют большие значения числа Рейнольдса. Расчеты, проводимые по уравнениям пограничного слоя, дают тем большую погрешность, чем выше вязкость среды, чем ниже скорость, чем ближе сечение  $x$  к передней кромке. На практике, однако, оказывается, что эти ограничения невелики, поэтому теория пограничного слоя находит весьма широкое применение.

Окончательно имеем следующую систему дифференциальных уравнений гидродинамики для пограничного слоя:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2};$$

$$\partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y = 0. \quad (3.41)$$

Уравнение энергии для теплового пограничного слоя получают, проведя аналогичный анализ. Применительно к случаю теплообмена при течении жидкости вдоль плоской поверхности (см. рис. 3.5) имеем следующее уравнение энергии ( $\theta = t - t_c$ ):

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3.42)$$

с граничными условиями:

на стенке: при  $0 \leq x \leq l_0$ ,  $y = 0$  имеем  $\vartheta = 0$ ; на внешней поверхности пограничного слоя: при  $0 \leq x \leq l_0$ ,  $y = \delta_t$  имеем  $\vartheta = \vartheta_{жс}$ .

Эквивалентная символическая формула для оценки порядка отдельных членов уравнения (3.42) имеет вид:

$$w_0 \frac{\vartheta_{жс}}{l_0} + w_{y0} \frac{\vartheta_{жс}}{\delta_t} \approx a \frac{\vartheta_{жс}}{l_0^2} + a \frac{\vartheta_{жс}}{\delta_t^2}. \quad (3.42')$$

Поскольку тепловой пограничный слой имеет толщину того же порядка малости, что и динамический [ $O(\delta_t) = O(\delta)$ ], то второй член в левой части уравнения (3.42) или символической формулы (3.42') имеет тот же порядок, что и первый, ибо  $O(w_0 / l_0) = O(w_{y0} / \delta_t)$ .

Температуропроводность  $a$  должна иметь порядок малости  $\delta^2$ , т. е.  $O(a) = \delta^2$ ; если предположить, например, что  $O(a) = \delta$ , то в правой части первый член окажется бесконечно малым, а второй — бесконечно большим; в сумме они дают бесконечно большую величину порядка  $\vartheta_{жс} / \delta$ , что нарушает смысл уравнения энергии (3.42), в левой части которого стоит сумма конечных величин.

В области теплового пограничного слоя конвективный перенос теплоты и молекулярный перенос (теплопроводность) имеют одинаковый порядок [см. формулу (3.42'), в которой член  $a(\vartheta_{жс} / l_0^2)$  можно отбросить]:

$w_0(\vartheta_{жс} / l_0) \approx a\vartheta_{жс} / \delta_t^2$ , что позволяет оценить толщину теплового пограничного слоя:

$$\delta_t / l_0 \approx \sqrt{a / w_0 l_0} = 1/\sqrt{Pe}.$$

Для толщины  $\delta_t$  в произвольном сечении на расстоянии  $x$  от передней кромки имеем:

$$\delta_t / x \approx const / \sqrt{Pe_x}, \quad (3.43)$$

где  $Pe_x = w_0 x / a$ .

Сравнивая уравнение (3.43) с уравнением (3.40), получаем следующее выражение:

$$\delta_t / \delta \approx 1 / \sqrt{\text{Pr}}.$$

Выражение (3.44) показывает, что отношение толщин динамического и теплового пограничного слоя определяется числом Прандтля. Если  $\text{Pr} \approx 1$ , то эти толщины совпадают. Это условие достаточно хорошо выполняется для газов, у которых число  $\text{Pr}$  близко к единице. Для жидкостей с высокой вязкостью число Прандтля  $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$  велико и тепловой пограничный слой намного тоньше динамического. Для жидкометаллических теплоносителей с высокой теплопроводностью наблюдается обратная картина.

В результате введения понятия пограничного слоя система дифференциальных уравнений может быть упрощена, как это показано выше, и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2}; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (3.45)$$

Граничные условия:

на стенке ( $0 \leq x \leq l_0, y = 0$ ):

$$\mathcal{G} = 0; w_x = w_y = 0; \quad (3.46)$$

на внешней границе пограничного слоя  $0 \leq x \leq l_0, y = \delta$  или  $y = \delta_t$ ):

$$w_x = w_0; \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{жс}}. \quad (3.46')$$

Система дифференциальных уравнений (3.45) с граничными условиями (3.46) представляет собой математическую формулировку задачи конвективного теплообмена в приближении пограничного слоя.

Решение сформулированной таким образом задачи не является простым, поскольку нелинейные члены в левой части уравнений энергии и движения сохранились. Кроме того, использовавшееся выше понятие толщины

пограничного слоя математически некорректно: в действительности скорость  $w_x$  и температура  $\vartheta$  асимптотически приближаются к значениям  $w_0$  и  $\vartheta_{жс}$  при  $y \rightarrow \infty$ . Непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений пограничного слоя для области с бесконечно удаленной границей ( $y \rightarrow \infty$ ) связано со сложными математическими операциями и здесь рассматриваться не будет; воспользуемся для этого приближенным методом, основанным на использовании интегральных соотношений для переноса количества движения (импульса) и теплоты в пограничном слое.

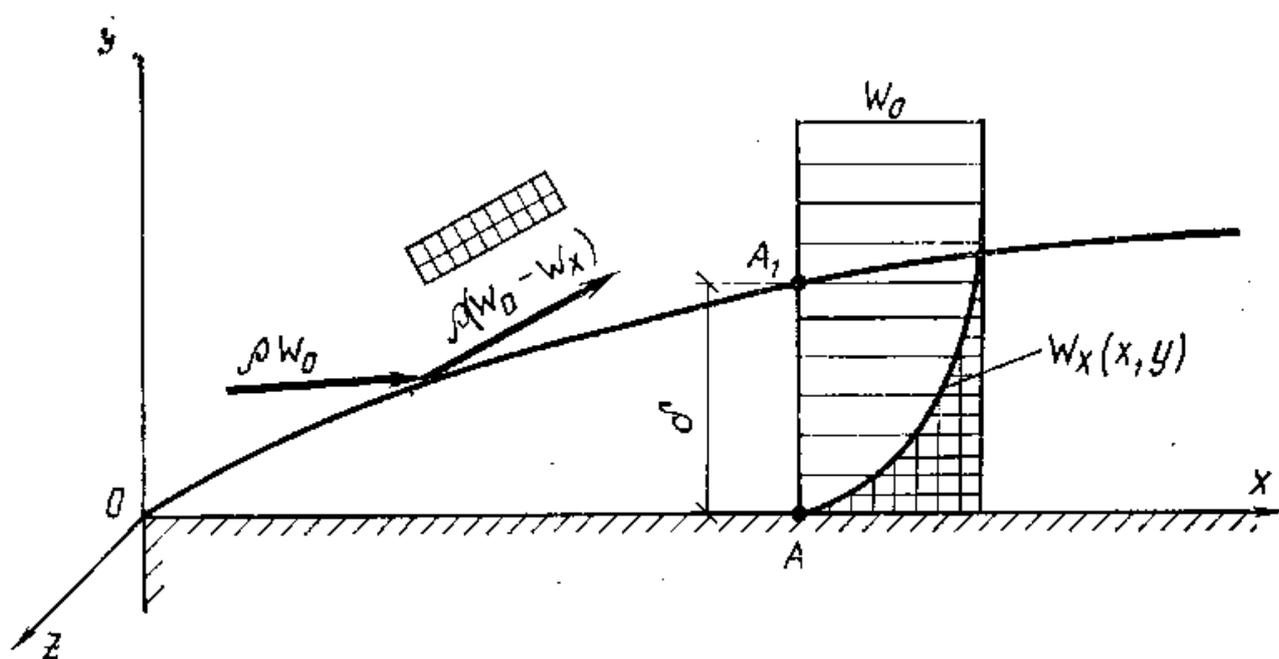


Рис. 3.6 Баланс массы для пограничного слоя

Составим баланс массы для пограничного слоя (рис. 3.6). Если бы вязких сил в пограничном слое не было, через сечение  $AA_1$  в единицу времени прошла бы масса жидкости  $\int_0^{\delta} \rho w_0 dy$ , кг/с (размер сечения в направлении оси  $Oz$  равен 1м). В действительности вязкие силы существуют, поэтому часть массы оттесняется пограничным слоем во внешний поток; эта вытесненная масса равна  $\int_0^{\delta} \rho(w_0 - w_x) dy$ . Оставшаяся масса проходит через сечение  $AA_1$ , в котором

профиль скорости  $w_x = w_x(x, y)$ ; эта реально проходящая масса равна  $\int_0^{\delta} \rho w_x dy$ .

Таким образом, получаем тривиальное соотношение, описывающее баланс массы в пограничном слое:

$$\int_0^{\delta} \rho w_0 dy - \int_0^{\delta} \rho (w_0 - w_x) dy = \int_0^{\delta} \rho w_x dy. \quad (3.47)$$

Массовый поток жидкости является носителем импульса и энтальпии. Поэтому по типу соотношения (3.47) можно составить баланс импульса и баланс энтальпии.

Импульс в потоке определяется как произведение массы индивидуальной жидкой частицы на ее скорость  $\rho(\Delta x \Delta y \Delta z) w_x$ . Плотность потока в направлении оси  $Ox$  получим, если разделим указанную величину на площадь поперечного сечения элементарного объема и на интервал времени  $\rho(\Delta x \Delta y \Delta z) w_x / \Delta y \Delta z \Delta \tau \approx \rho(\Delta x / \Delta \tau) X X w_x = \rho w_x w_x$ . Если бы трение в пограничном слое отсутствовало, то через сечение  $AA_1$  проходил бы следующий поток импульса:

$$\int_0^{\delta} \rho w_0^2 dy.$$

Наличие сил трения приводит к вытеснению массы во внешний поток, поэтому часть импульса внешнего потока не проходит через поверхность  $OA_1$  в область пограничного слоя. Этот вытесненный импульс определяется вытесненной массой и скоростью внешнего потока  $w_0$ . Таким образом, результирующий поток импульса через внешнюю поверхность пограничного слоя  $OA_1$  равен:

$$\int_0^{\delta} \rho w_0^2 dy - \int_0^{\delta} \rho (w_0 - w_x) w_0 dy.$$

Этот вошедший в пограничный слой импульс частично проходит через сечение  $AA_1$ :

$$\int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy,$$

а частично уравновешивается действием трения на стенке ОА:

$$\int_0^x \tau_c dx.$$

Записывая баланс импульса аналогично балансу массы (3.47), имеем

$$\int_0^{\delta} \rho w_0^2 dy - \int_0^{\delta} \rho (w_0 - w_x) w_0 dy = \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy + \int_0^x \tau_c dx.$$

Объединив все интегралы с переменной интегрирования  $y$  и произведя соответствующие упрощения, получим следующее выражение:

$$\int_0^{\delta} \rho w_x (w_0 - w_x) dy = \int_0^x \tau_c dx.$$

Если теперь взять производную по  $x$  от левой и правой частей этого выражения, учитывая, что интервал в левой части зависит только от толщины пограничного слоя  $\delta = \delta(x)$ , то имеем:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x (w_0 - w_x) dy = \tau_c = \mu \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость, то плотность  $\rho = \text{const}$  можно перенести в правую часть:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} w_x (w_0 - w_x) dy = \nu \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.48)$$

Выражение (6.48) известно под названием *интегрального соотношения Т. Кармана*.

Составим баланс энтальпии для пограничного слоя. Если бы пограничного слоя не существовало, то в сечении  $AA_1$  был бы прямолинейный профиль скорости и обеспечивался бы следующий поток энтальпии:

$$\int_0^{\delta} \rho c_p t_{жс} w_0 dy.$$

В действительности с вытесняемой массой вытесняется и энтальпия, которая не проходит через внешнюю границу пограничного слоя  $AO_1$  на участке длиной  $x$ ; поток вытесняемой энтальпии равен:

$$\int_0^{\delta_i} \rho c_p t_{жс} (w_0 - w_x) dy.$$

Результирующий поток энтальпии равен разности двух этих интегралов. Часть результирующего потока направляется через сечение  $AA_1$  в правую область пограничного слоя:

$$\int_0^{\delta_i} \rho c_p t w_x dy,$$

оставшаяся часть компенсируется отводом теплоты в стенку:

$$-\int_0^x q dx,$$

где знак минус соответствует отводу теплоты (а не ее подводу).

Таким образом, имеем следующий баланс энтальпии:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_i} \rho c_p t_{жс} w_x dy - \int_0^{\delta_i} \rho c_p t_{жс} (w_0 - w_x) dy = \\ & = \int_0^{\delta_i} \rho c_p t w_x dy - \int_0^x q dx. \end{aligned}$$

Проводя преобразования, аналогичные предыдущим, получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} \rho c_p w_x (t_{жс} - t) dy = -q = \lambda \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Учитывая соотношения

$$t_{жс} - t_c = \mathcal{G}_{жс} - \mathcal{G}; \partial t / \partial y = \partial(t - t_c) / \partial y = \partial \mathcal{G} / \partial y$$

$$\rho = const; c_p = cont,$$

и постоянство  $\rho$  и  $c_p$ , получим выражение:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} w_x (\mathcal{G}_{жс} - \mathcal{G}) dy = a \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.49)$$

которое называется *интегральным соотношением переноса теплоты* в пограничном слое; оно установлено Г. Н. Кружилиным.

Уравнения (3.47) — (3.49) в определенном смысле эквивалентны уравнениям системы (3.45), поскольку они выражают те же законы: сохранения энергии — (3.49), импульса—(3.48) и массы—(3.47). Уравнения (3.48) и (3.49) —интегральные уравнения, так как неизвестные  $w_x$  и  $\vartheta$  входят под знак интеграла. Для расчетной практики важнейшим свойством этих двух уравнений является удобство их использования при приближенном расчете. Действительно, подставив под знак интеграла приближенные выражения для профилей скорости и температуры и вычислив интегралы в пределах толщин пограничного слоя  $\delta$  и  $\delta_t$ , можно получить расчетные формулы для теплового потока и трения на стенке. Приближенные выражения для профилей температуры и скорости выбирают в виде полиномов (в этом случае интегралы легко вычисляются), коэффициенты которых определяются граничными условиями.

Профиль скорости будем аппроксимировать кубической параболой с четырьмя подлежащими определению коэффициентами:

$$w_x = ay^3 + by + cy + d.$$

Для нахождения этих коэффициентов требуются четыре условия, которым должен удовлетворять профиль  $w_x(y)$  (для произвольного значения  $x$ ). Эти условия формулируются для краев профиля на стенке и на внешней границе пограничного слоя:

условие прилипания на стенке: при  $y = 0$  имеем  $w_x = 0$ ;

условие линейности профиля скорости на стенке:  $(\partial^2 w_x / \partial y^2)_{y=0} = 0$ ,  $(\partial w_x / \partial y)_{y=0} = const$ , оно является следствием уравнения движения [см. систему (6.45)], левая часть которого обращается на стенке в нуль в силу условия прилипания;

условие равенства скорости на внешней границе пограничного слоя  $w_x$  скорости внешнего потока: При  $y = \delta$  имеем  $w_x = w_0$ . условие плавного

сопряжения профиля скорости на внешней границе пограничного слоя:  
 $(\partial w_x / \partial y)_{y=\delta} = 0$ .

Из первого условия имеем:  $d = 0$ ; из второго:  $2b = 0$ ; из третьего:  $w_0 = a\delta^3 + c\delta$  и из четвертого условия:  $3a\delta^2 + c = 0$ . Следовательно, для двух оставшихся коэффициентов имеем выражения:  $a = -(1/2)(w_0 / \delta^3)$ ;  $c = (3/2)(w_0 / \delta)$ , которые позволяют записать профиль скорости в следующем виде:

$$\frac{w_x}{w_0} = -\frac{1}{2}\eta_n^3 + \frac{3}{2}\eta_n, \quad (3.50)$$

где  $\eta_n = y / \delta, 0 \leq \eta_n \leq 1$  — безразмерная координата в пределах пограничного слоя.

Уравнение энергии в системе (3.45) сходно по форме с уравнением движения, естественно поэтому принять для профиля температуры также кубическую параболу с четырьмя коэффициентами. Четыре условия, приведенные выше для профиля скорости, формально годятся и для профиля температуры. Этот профиль, следовательно, будет представлен аналогичным выражением:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{ж}} = -\frac{1}{2}\eta_t^3 + \frac{3}{2}\eta_t. \quad (3.51)$$

где  $\eta_t = y / \delta_t, 0 \leq \eta_t \leq 1$ .

Подставим уравнения (3.50) и (3.51) в интегральное соотношение переноса теплоты (3.49). Выполнив интегрирование и введя обозначения  $\aleph_n = \delta_t / \delta$ , получим:

$$\frac{d}{dx} [w_0 \vartheta_{ж} \delta (\frac{3}{20} \aleph_n^2 - \frac{3}{280} \aleph_n^4)] = \frac{3}{2} a \frac{\vartheta_{ж}}{\aleph_n \delta}.$$

При выполнении интегрирования предполагалось, что профиль скорости (3.40) справедлив в области изменения  $\eta$  или даже в более широкой области; это означает, что постулировалось условие  $\aleph_n \leq 1$ , которое с достаточно хорошим приближением выполняется для газов и капельных жидкостей

(исключая жидкометаллические теплоносители). В этом случае второй член в скобках существенно меньше первого и его можно отбросить:

$$\frac{1}{10} w_0 \aleph_n \delta \frac{d}{dx} (\aleph_n^2 \delta) = a; \frac{1}{10} w_0 (\aleph_n^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\aleph_n^2 \delta^2 \frac{d\aleph_n}{dx}) = a.$$

Выражения для  $\delta(d\delta/dx)$  и  $\delta^2$  можно получить, подставив уравнение (3.50) в интегральное соотношение импульсов (14.48). Эти выражения равны:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{w_0}; \delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu}{w_0} x. \quad (3.52)$$

После их подстановки получаем нелинейное дифференциальное уравнение относительно величины  $\aleph_n$ :

$$\frac{140}{130} (\aleph_n^3 + 4x\aleph_n \frac{d\aleph_n}{dx}) = \frac{1}{Pr}.$$

Введем дополнительное предположение:  $\aleph_n \neq f(x)$ . Оно оправдывается формальной аналогией дифференциальных уравнений энергии и движения, а также одинаковостью приближенных приемов по аппроксимации профилей температуры и скорости. Тогда  $d\aleph_n/dx=0$  и, полагая  $14/13 \approx 1$ , получаем следующее соотношение для толщин теплового и динамического пограничных слоев:

$$\aleph_n = \delta_t / \delta = 1 / \sqrt[3]{Pr}. \quad (3.53)$$

Из уравнения (3.52) имеем выражение для толщины динамического пограничного слоя:

$$\delta / x = 4,64 / \sqrt{Re_x}. \quad (3.54)$$

Выражения (3.53) и (3.54) представляют собой главные результаты применения интегральных соотношений переноса импульса и теплоты для приближенного решения системы (3.45). Зная закон изменения толщин динамического и теплового пограничных слоев вдоль оси  $Ox$ , можно достаточно просто получить расчетные формулы для теплоотдачи и трения.

Заменим в выражении (3.15) для числа Нуссельта линейный масштаб  $l_0$  величиной  $\delta_t$ :

$$Nu_\delta = -(\partial\theta / \partial\eta_t)_{\eta_t=0}, \quad (3.55)$$

где  $Nu_\delta = \alpha_x \delta_t / \lambda$ .

Производную температуры на стенке найдем по выражению (3.51), учитывая, что  $\theta = \mathcal{G} / \mathcal{G}_w$ :

$$(\partial\theta / \partial\eta_t)_{\eta_t=0} = 3/2.$$

Местное (локальное) число Нуссельта связано с числом  $Nu_\delta$  очевидным соотношением:

$$Nu_\delta = \frac{\alpha_x x}{\lambda} \frac{\delta_t}{x} = Nu_x \frac{\delta_t}{x}.$$

Отбрасывая в уравнении (3.55) лишний для простых граничных условий знак минус и используя уравнения (3.53) и (3.54), получаем следующее выражение для местной теплоотдачи:

$$Nu_x = C Re_x^{0.5} Pr^{0.33}, \quad (3.56)$$

где коэффициент  $C = 1,5/4,64 = 0,323$ . Непосредственное решение системы (3.45) дает  $C = 0,332$ ; в последующем изложении принято  $C = 0,33$ .

Если рассматривается теплоотдача вдоль поверхности с заданной длиной  $l_0$ , то наиболее удобной является следующая запись выражения (3.56):

$$Nu = 0,33 Re^{0.5} Pr^{0.33} X^{-0.5}, \quad (3.56')$$

где  $Re = w_0 l_0 / \nu$ ,  $X = x / l_0$ . Видно, что  $Nu = \alpha_x l_0 / \lambda = const X^{-0.5}$ , при этом  $const$  не зависит от координаты  $X$ :  $const = 0,33 Re^{0.5} Pr^{0.33}$ .

Средняя теплоотдача определяется согласно уравнению (3.18) и для данного случая равна:

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu dX = const \int_0^1 X^{-0.5} dX = const 2;$$

или

$$\overline{Nu} = 0,66 Re^{0,5} Pr^{0,33}, \quad (3.57)$$

где  $\overline{Nu} = \overline{\alpha} l_0 / \lambda$ .

Так же просто по закону изменения  $\delta$  вдоль оси.  $Ox$  можно рассчитать трение на стенке. Зная трение на стенке, можно определить усилие, с которым поток воздействует на нее. Вместо трения

$$\tau_c = \mu(\partial w_x / \partial y)_{y=0}$$

обычно используется безразмерный коэффициент трения:

$$c_f = \frac{\tau_c}{(\rho w_0^2 / 2)} = \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right)_{Y=0},$$

где  $Re = w_0 l_0 / \nu$ ,  $W_x = w_x / w_0$ ,  $Y = y / l_0$ .

Если вместо  $l_0$  в качестве масштаба ввести  $\delta$ , то получим:

$$c_f = (2 / Re_\delta) (\partial W_x / \partial \eta_\delta)_{\eta_\delta=0},$$

где  $Re_\delta = w_0 \delta / \nu$ .

Согласно равенству (3.50), производная по нормали к стенке для скорости  $W_x = w_x / w_0$  равна  $(\partial W_x / \partial \eta_\delta)_{\eta_\delta=0} = 3/2$ , поэтому  $c_f = 3 / Re_\delta$ .

Используя очевидное соотношение  $Re_\delta = Re_x (\delta / x)$  и уравнение (3.54), получим для местного (локального) коэффициента трения следующее выражение

$$c_f = 0,646 / \sqrt{Re_x}. \quad (3.58)$$

Усилие, с которым поток воздействует на стенку, определяется выражением

$$T_c = \int_F \tau_c dF$$

(где  $F$  — площадь поверхности) и может быть рассчитано с использованием уравнения (3.58).

Представляет интерес связь между теплоотдачей и трением, которую можно проследить по зависимости теплоотдачи и трения от толщины пограничного слоя. По формулам (3.56) и (3.58) видно, что вдоль оси  $Ox$  — по

направлению возрастания толщины пограничного слоя теплоотдача и трение уменьшаются. Такой же результат дают и определения коэффициента теплоотдачи и трения на стенке по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\alpha &= -(\lambda / \vartheta_{,x})(\partial \vartheta / \partial y)_{y=0} \square \lambda / \delta_t; \\ \tau_c &= \mu(\partial w_x / \partial y)_{y=0} \square \mu(w_0 / \delta).\end{aligned}\quad (3.59)$$

В наиболее компактной форме связь теплоотдачи и трения можно выразить следующим образом. Для местной теплоотдачи преобразуем формулу (3.56), разделив на  $Re_x Pr$ . Левая часть формулы будет иметь вид:

$$Nu_x / Re_x Pr = St = \alpha / \rho c_p w_0, \quad (3.60)$$

где  $St$  — число Стентона, отражающее соотношение между интенсивностями теплоотдачи и переноса теплоты потоком.

Принимая во внимание выражение (3.58), получаем следующее обобщенное соотношение между теплоотдачей и трением:

$$St = (c_f / 2)(1 / Pr^{0,67}),$$

которое при  $Pr = 1$  (для газов) приобретает простой вид:

$$St = c_f / 2. \quad (3.61)$$

Формула (3.61) имеет глубокий физический смысл, указывая на единство механизма переноса теплоты и количества движения (импульса). В ламинарном потоке (слоистый поток с гладкими линиями тока), применительно к которому и рассматривалось понятие пограничного слоя, носителями теплоты и импульса являются отдельные молекулы. Каждый слой ламинарного потока характеризуется определенным значением температуры и скорости. В движущемся газе, например, хаотическое тепловое движение молекул является причиной обмена теплотой и импульсом между отдельными слоями плоскопараллельного движения; в капельных жидкостях механизм обмена сложнее, но общий принцип переноса сохраняется. Поскольку перенос теплоты и

импульса осуществляется одними и теми же носителями, интенсивность этих двух видов переноса связана простой зависимостью (3.61).

### 2.6.5 Турбулентный перенос теплоты

Полученные по формулам (3.56'), (3.57) и (3.58) значения теплоотдачи и трения сравнивали с экспериментальными данными. Оказалось, что они справедливы лишь в некоторой ограниченной области на передней части поверхности  $0 \leq x \leq x_{кр}$ . Эта область может быть определена из следующего опыта (рис. 3.7). На малом расстоянии от стенки устанавливается напорная трубка 1 для измерения динамического давления манометром 3; на стенке расположено отверстие 2 для отбора статического давления. Если передвигать трубку по направлению оси  $Ox$ , сохраняя неизменным расстояние от стенки, то при  $x \approx x_{кр}$  резко возрастет динамическое давление. Это указывает на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Структура турбулентного пограничного слоя существенно отличается от структуры ламинарного пограничного слоя: вместо плавного изменения скорости по нормали к стенке наблюдается значительное изменение скорости в узкой области (вязкий подслой) и относительно малое ее изменение в основной части турбулентного пограничного слоя. Напорная трубка находится вне вязкого подслоя, толщина которого составляет менее 1 % полной толщины  $\delta_m$  турбулентного пограничного слоя, поэтому трубка воспринимает изменение скорости  $\Delta w_x$ , характеризующее различие между ламинарным (л) и турбулентным (т) профилем  $w_x(y)$ . Серия подобных опытов позволяет установить, что  $x_{кр}$  зависит от вязкости и плотности среды и от скорости внешнего потока  $w_o$ . Эта зависимость может быть представлена в виде:

$$x_{кр} = Re_{кр} (\mu / \rho w_o),$$

где  $Re_{кр}$  — критическое число Рейнольдса.

Процесс перехода ламинарного течения в турбулентное весьма сложен и в настоящее время еще недостаточно изучен. Критическое число Рейнольдса определяется экспериментально и зависит от большого числа различных факторов.

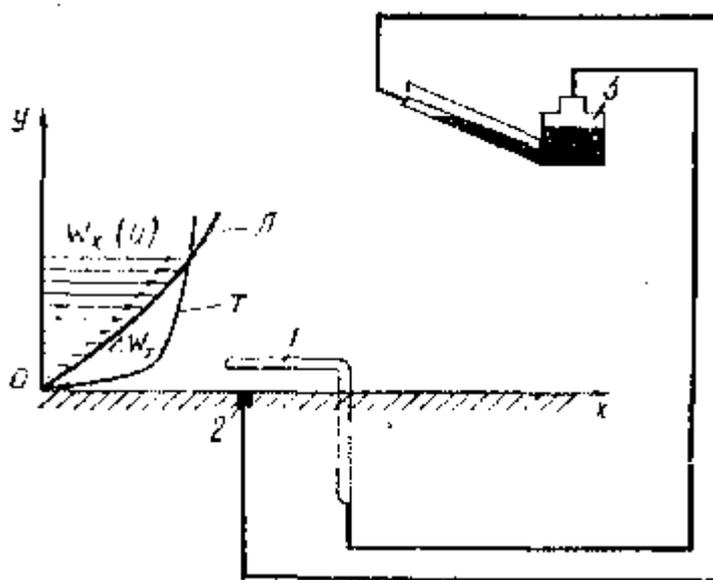


Рис. 3.7 Опытная установка

Явление этого перехода изучалось Г. Хагеном (1839 г.), Д. И. Менделеевым (1880 г.), однако систематические исследования возникновения турбулентного течения с установлением критерия перехода были проведены О. Рейнольдсом в 1883 г. для потока в круглой трубе. Критерием перехода оказался установленный анализом единиц измерения комплекс  $\rho w d / \mu$ , где  $w$  — осредненная по поперечному сечению скорость, а  $d$  — диаметр трубы. Последующими многочисленными исследованиями было установлено существование двух чисел Рейнольдса — верхнего и нижнего. Нижнее значение равно примерно 2300; если  $Re = \rho w d / \mu \leq 2300$ , то устойчивость ламинарного течения невозможно нарушить никакими возмущениями. В качестве верхнего числа Рейнольдса обычно принимают значение  $Re = 10\,000$ , при котором в трубах с технической шероховатостью устанавливается развитое турбулентное течение. Однако в гладких трубах с плавным входом и отсутствием возму-

щений удавалось «затягивать» ламинарный режим до значительно больших значений  $Re$ .

Процесс перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный имеет качественное сходство с процессом перехода в трубе. В частности, здесь также существует некоторый интервал для  $Re_{кр}$  :  $Re_{кр} \approx 3 \cdot 10^5 \div 4 \cdot 10^6$ .

Ламинарный пограничный слой на поверхности обтекаемого тела образуется и в том случае, если набегающий поток — турбулентный. Степень турбулентности внешнего потока (относительная величина пульсаций скорости) влияет на число  $Re_{кр}$ ; характер этого влияния см. на рис. 3.8 (где  $Re_{кр}^в$  и  $Re_{кр}^н$  — верхнее и нижнее критическое число  $Re$ ): с увеличением степени турбулентности число  $Re_{кр}$  уменьшается, т.е. критическое сечение  $x = x_{кр}$  сдвигается влево к передней кромке. Само понятие критического сечения (точки перехода) условно. Заштрихованная область на рис. 3.8 отражает факт существования зоны перехода шириной  $\Delta x_{кр}$ . По экспериментальным данным верхняя граница заштрихованной области на рис. 3.8 отстоит от нижней границы примерно на 30—60 % (меньшие значения для больших чисел  $Re_{кр}$ ).

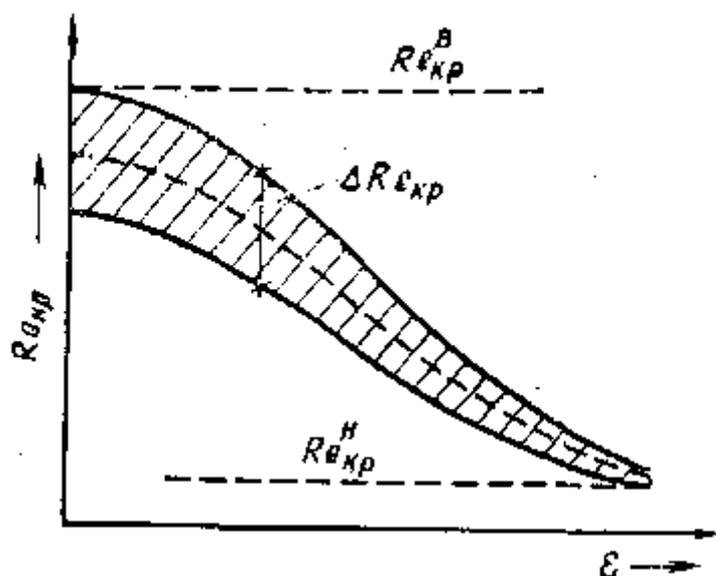


Рис. 3.8 Степень турбулентности внешнего потока

В таком случае величина зоны перехода по отношению к среднему для данных условий числу  $Re_{кр}$  (пунктирная линия на рис. 3.8) может быть оценена соотношением:  $\Delta Re_{кр} \approx (0,26 \div 0,46) Re_{кр}$ .

Если требуются сравнительно точные данные по явлению перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, то значения  $Re_{кр}$  и  $\Delta x_{кр}$  определяют путем эксперимента для конкретной ситуации. Для ориентировочных расчетов обычно принимают  $Re_{кр} \approx (1 \div 5) 10^5$ , а зону перехода заменяют точкой с координатой  $x = x_{кр}$ .

Опыты по изучению механизма перехода ламинарного течения в турбулентное в трубах и в пограничном слое обнаруживают много общего. Общность эта находит свое отражение в одинаковости количественных критериев перехода: число  $Re_{кр}$  имеет примерно один и тот же порядок для трубы и для пограничного слоя на пластине, если производить сравнение в сопоставимых категориях. При этом радиус трубы  $r_0 = d/2$  соответствует толщине пограничного слоя  $\delta$ , а скорость на оси трубы, вдвое превышающая среднюю  $w_{max} = 2w$ , — скорости внешнего потока  $w_0$ . Для пограничного слоя соответствующее число Рейнольдса определяется следующим выражением:

$$Re_{\delta} = w_0 \delta / \nu = Re_x (\delta / x) \cong 4,64 \sqrt{Re_x}.$$

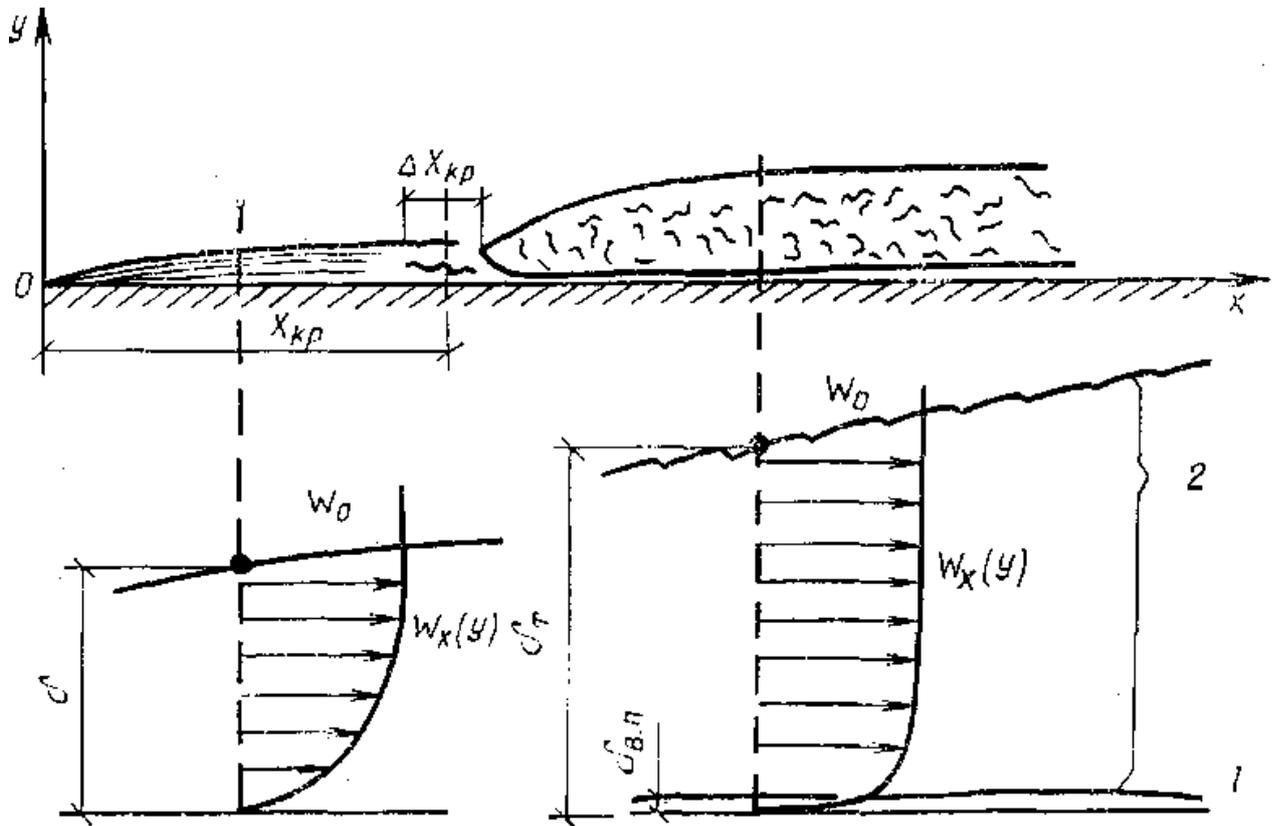


Рис. 3.9 Схема перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный

Таким образом, все соотношения берутся для ламинарного режима. Расчет по этим соотношениям приводит к следующим результатам: для пластины при  $Re_x = w_o x / \nu$ :  $Re_{кр}^{нижн} = 3 \cdot 10^5$ ;  $Re_{кр}^{верх} = 4 \cdot 10^6$ ;

для пластины при  $Re_\delta = w_o \delta / \nu$ :  $Re_{кр}^{нижн} = 2541$ ;  $Re_{кр}^{верх} = 9280$ ;

для трубы при  $Re = wd / \nu = w_{max} r_o / \nu$ :  $Re_{кр}^{нижн} = 2300$ ;  $Re_{кр}^{верх} = 10000$ .

Видно, что нижнее и верхнее критические числа  $Re_\delta$  для плоскопараллельного пограничного слоя имеют тот же порядок, что и соответствующие критические числа  $Re$  для трубы.

На рис. 3.9 представлена схема перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, там же показано характерное для турбулентного пограничного слоя увеличение степени заполнения профиля скорости [по отношению к прямолинейному профилю  $w_x \neq w_x(y)$ ]. Чем объясняется такой характер турбулентного профиля? Главная причина — возрастание интенсивности обмена количеством движения в направлении нормали к стенке по сравнению с

этим явлением при ламинарном течении; возрастание интенсивности обмена связано, в свою очередь, с изменением носителей, которые обеспечивают хорошее перемешивание среды в турбулентном пограничном слое и выравнивание скорости в поперечном направлении. Движение в ламинарном пограничном слое можно популярно представить как перемещение пакета листов, нижний из которых прилип к стенке, а верхний увлекается внешним потоком. Сцепление между промежуточными слоями (листами) происходит в результате хаотического теплового движения молекул, обеспечивающего обмен импульсом между слоями. Это явление находит свое выражение в вязкости, при этом в соответствии со сказанным вязкость газов возрастает с ростом температуры.

Механизм молекулярного переноса импульса в капельных жидкостях сложнее, переход молекул из слоя в слой как основной фактор, по-видимому, не происходит; согласно одной из гипотез, передача импульса происходит вследствие временного объединения молекул на границе слоев. Уменьшение вязкости капельных жидкостей с ростом температуры можно объяснить увеличением объема жидкости и ослаблением взаимодействия между молекулами из-за увеличения расстояния.

При турбулентном режиме носителями импульса становятся жидкие макрочастицы (турбулентные моли), совершающие хаотическое движение пульсационного характера, которое накладывается на основное направленное движение жидкости (так называемое осредненное движение). Полуэмпирическая теория турбулентности Л. Прандтля основана на определенном сходстве хаотического движения турбулентных молей с хаотическим движением молекул в газе. Если, основываясь на этой простейшей теории турбулентности, сравнить перенос импульса турбулентными молями с переносом импульса молекулами, то окажется, что турбулентный поток импульса во много раз больше молекулярного. Поскольку поток импульса через единицу поверхности, параллельной направлению осредненного движения,

равен трению на этой поверхности, то естественно ввести понятие *турбулентного трения* и формально связанной с таким трением *турбулентной вязкости*:  $\tau_T = \mu_T (\partial w_x / \partial y)$ , где  $\mu_T$  — турбулентная вязкость. Так же формально можно ввести кинематический коэффициент турбулентной вязкости (кинематическую турбулентную вязкость)  $\nu_T = \mu_T / \rho$ .

Следует подчеркнуть различие между  $\mu$  и  $\mu_T$  (и между  $\nu$  и  $\nu_T$ ): если молекулярная вязкость  $\mu$  характеризует физические свойства определенного вещества, то турбулентная вязкость  $\mu_T$  является специфической характеристикой турбулентного потока и зависит от его гидродинамических параметров и координат.

Турбулентные моли переносят не только импульс, но и теплоту. На этом основании вводится *турбулентная теплопроводность* (коэффициент турбулентного переноса теплоты):  $q_T = \lambda_T (\partial t / \partial y)$ , где  $q_T$  — плотность *турбулентного теплового потока*;  $\lambda_T$  — турбулентная теплопроводность. Аналогично кинематической турбулентной вязкости вводится турбулентная температуропроводность:  $a_T = \lambda_T / \rho c_p$ .

Как и турбулентная вязкость, турбулентная теплопроводность  $\lambda_T$  (и турбулентная температуропроводность  $a_T$ ) зависит от гидродинамических характеристик турбулентного потока и координат.

Как уже указывалось, турбулентный пограничный слой можно разделить на две области: вязкий подслой и область развитой турбулентности. При более тщательном анализе между ними выделяют буферный слой с переходными характеристиками. В вязком подслое преобладает молекулярная вязкость  $\mu \gg \mu_T$  или  $\nu \gg \nu_T$ , и молекулярная теплопроводность  $\lambda \gg \lambda_T$  или  $a \gg a_T$ . В буферном слое эти величины имеют примерно один порядок:  $\nu \approx \nu_T$  и  $a \approx a_T$ . В области развитой турбулентности турбулентные характеристики переноса существенно больше молекулярных:  $\nu_T \gg \nu$  и  $a_T \gg a$ . Таким образом, для турбулентного пограничного слоя в целом следует пользоваться параметрами

переноса вида:  $(\nu + \nu_T)$  и  $(a + a_T)$  с целью охватить одним выражением все три области — вязкий подслой, буферный слой и область развитой турбулентности.

Запись уравнений пограничного слоя для турбулентного режима после введения понятий турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности можно осуществить в форме, аналогичной системе дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя (3.45), однако при этом необходимо сделать одну существенную оговорку. Если в стационарном ламинарном потоке рассматривается поле вектора скорости, касательного к линии тока в данной точке пространства (при этом ни длина, ни направление этого вектора не изменяются во времени), то для турбулентного потока все значительно усложняется. Вектор скорости нерегулярным, хаотическим образом изменяется как по модулю, так и по направлению. Конечно, и в этом случае можно сказать нечто определенное о скорости, поскольку напорная трубка в турбулентном потоке позволяет определить ее значение в данной точке (см. рис. 3.7). Однако поле скорости в турбулентном потоке описывается специфическим способом: скорость в точке представляется в виде суммы двух векторов — вектора осредненной скорости и вектора пульсации скорости  $\bar{w} = \overline{\bar{w}} + \bar{w}'$ . Пульсирующий характер имеет и поле температуры:  $t = \bar{t} + t'$ , где  $\bar{t}$  — осредненная температура;  $t'$  — пульсация температуры.

Если при выводе дифференциальных уравнений конвективного теплообмена для температуры и скорости использовать приведенные выше двучленные выражения, то получаются уравнения в обычной форме для осредненных величин; эти уравнения, однако, содержат дополнительные члены, обусловленные пульсациями скорости и температуры. Эти члены можно отбросить, но для компенсации нужно увеличить вязкость и теплопроводность, заменив эти молекулярные характеристики переноса турбулентными, или точнее — коэффициентами вида  $(\nu + \nu_T)$  и  $(a + a_T)$ .

Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена в приближении пограничного слоя для турбулентного режима движения с учетом сказанного может быть записана следующим образом:

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = (a + a_T) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2};$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = (v + v_T) \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad (3.62)$$

$$\partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y = 0.$$

Общие допущения здесь аналогичны принятым для системы (3.45): величины  $\vartheta$ ,  $w_x$  и  $w_y$  — осредненные, но черточка осреднения опущена для сокращения записи.

К системе дифференциальных уравнений (3.62) необходимо добавить следующие условия однозначности (граничные):

на стенке ( $x_{кр} \leq x \leq l_0, y = 0$ ):

$$\vartheta = 0, w_x = w_y = 0; \quad (3.63)$$

на внешней границе пограничного слоя ( $x_{кр} \leq x \leq l_0, y = \delta_T$  или  $y = \delta_{IT}$ ):

$$w_x = w_0; \vartheta = \vartheta_{жс}. \quad (3.63')$$

В отличие от системы (3.45) система уравнений турбулентного пограничного слоя (3.62) является незамкнутой. Число уравнений равно трем, а число неизвестных функций — пяти:  $\vartheta$ ,  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $a_m$  и  $v_m$ . Следовательно, необходимо добавить еще два уравнения — для определения величин  $a_m$  и  $v_m$ . Как и прочие уравнения, два этих новых уравнения должны явиться результатом выражения некоторых закономерностей в математической форме. Основные физические законы сохранения энергии, импульса и массы уже использованы для уравнений энергии, движения и сплошности. Речь может идти, таким образом, о некоторых теориях и гипотезах, объясняющих механизм турбулентного переноса импульса и теплоты.

Вопрос о дополнительном уравнении для определения турбулентной вязкости  $\nu_m$  можно решить путем использования полуэмпирических теорий турбулентности, простейшей из которых является теория пути смешения Л. Прандтля; основные положения этой теории и метод определения величины  $\nu_m$  рассмотрены в примере 3.2.

Что касается дополнительного соотношения для определения турбулентной температуропроводности  $a_m$ , то здесь используется постулат, известный под названием *аналогии Рейнольдса*, устанавливающей условия идентичности безразмерного поля температуры безразмерному полю скорости в турбулентном пограничном слое. На мысль об аналогии между процессами переноса теплоты и импульса наводит анализ ламинарного пограничного слоя. Если  $Pr=1$ , то толщина динамического и теплового пограничных слоев совпадает ( $\delta = \delta_t$ ), поля безразмерной скорости  $w_x/w_0$  и безразмерной температуры совпадают, т.е.  $w_x(y)/w_0 = \vartheta(y)/\vartheta_{jc}$  и между теплоотдачей и трением существует простая связь [см. формулу (3.61)]:  $St = c_f/2$ .

Аналогия Рейнольдса распространяет эти положения на турбулентный пограничный слой. Для этого достаточно, чтобы турбулентное число Прандтля  $Pr_T = \nu_T/a_T$  равнялось единице, т. е.  $a_T = \nu_T$ . При этом безразмерные уравнения энергии и движения системы (3.62) имеют одинаковые безразмерные коэффициенты:

$$Pe_x = Re_x; a_m/a = \nu_m/\nu \quad \text{и, следовательно, их решения идентичны}$$

$$\vartheta(y)/\vartheta_{jc} = w_x(y)/w_0.$$

Взяв производную от левой и правой частей этого выражения по  $y$  в точке  $y = 0$ , заменив производные выражениями  $q/\lambda$  и  $\tau_c/\mu$  и разделив обе части на  $\rho c_p w_0$ , получаем при  $Pr = 1$  формулу (3.61), что и представляет собой главный результат применения аналогии Рейнольдса.

После замыкания систему (3.62) можно решить. Воспользуемся для этой цели интегральным соотношением Т. Кармана, которое, конечно, справедливо и для турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_x} w_x (w_0 - w_x) dy = \frac{\tau_c}{\rho};$$

здесь  $\delta_m$  — толщина турбулентного динамического пограничного слоя;  $w_x = w_x(y)$  — профиль скорости в турбулентном пограничном слое;  $\tau_c$  — трение на стенке в заданном сечении  $x$ .

При расчете турбулентного пограничного слоя в отличие от ламинарного в том или ином виде должны использоваться результаты эксперимента; это обусловлено сложностью механизма турбулентного переноса и отсутствием его полного чисто теоретического описания. Первые экспериментальные исследования турбулентного движения относились к течению жидкости, в круглой трубе. Так, в 1913 г. путем обработки многочисленных опытов для круглых гладких труб Г. Блазиус установил следующую эмпирическую зависимость:

$$\xi = 0,03164 / \text{Re}^{1/4},$$

где  $\xi$  — коэффициент сопротивления трения:  $\xi = 2(\Delta p / \rho w^2) d / l$ ;  $\text{Re} = wd / \nu$ .

Формула Г. Блазиуса справедлива до  $\text{Re} = 10^5$ . Несмотря на свое эмпирическое происхождение, формула Блазиуса несет в себе достаточно информации для расчета турбулентного пограничного слоя. Это является следствием определенной структурной общности, которой обладает турбулентный поток в трубе и в пограничном слое. Для использования интегрального соотношения Кармана необходимо знать профиль скорости в турбулентном пограничном слое и трение на стенке. Получим эти функции из формулы Блазиуса.

Связь между перепадом давления по длине трубы и трением на ее стенке устанавливается следующим условием равновесия сил  $\Delta p(\pi d^2 / 4) = \tau_c \pi dl$ , откуда  $\Delta p = 4\tau_c(l/d)$ . Подставляя это в выражение для  $\xi$  имеем  $\tau_c = (\xi/8)\rho w^2$ .

При использовании формулы Блазиуса для пограничного слоя необходимо учесть, что вместо средней по сечению скорости в трубе  $w$  следует брать скорость внешнего потока  $w_0$ , а вместо радиуса трубы  $0,5 d$  — толщину пограничного слоя  $\delta_T$ ; соотношение между скоростями таково:  $w = 0,8w_{\max} = 0,8w_0$ , где  $w_{\max}$  — скорость на оси трубы. С учетом всех этих замен имеем следующее выражение для трения на стенке в плоском турбулентном пограничном слое:

$$\tau_c = 0,0225\rho w_0^2(\nu/w_0\delta_T)^{1/4}. \quad (3.64)$$

Профиль скорости легко получить из выражения (3.64). Для этого достаточно принять гипотезу о постоянстве турбулентного трения по толщине пограничного слоя:  $\tau_T \neq f(y) = \text{const}$ . Подчеркнем, что речь идет о *турбулентном* трении, которое принимается постоянным в интервале  $\delta_{e,n} \leq y \leq \delta_T$ , где  $\delta_{e,n}$  — толщина вязкого подслоя. В связи с его малой толщиной [ $\delta_{e,n} \cong (10^{-2} \div 10^{-3})\delta_T$ , см. пример 3.2] и преобладанием молекулярной вязкости обычно принимается прямолинейный профиль скорости, что по закону вязкого трения Ньютона дает  $\tau = \text{const}$  и, следовательно,  $\tau_c = \tau_{e,n}$ , где  $\tau_{e,n}$  — трение на границе между вязким подслоем и турбулентным ядром. В силу сказанного трение постоянно в интервале  $0 \leq y \leq \delta_T$  и равно трению на стенке  $\tau_c$ .

В этом случае для произвольного значения  $y$  из области турбулентного ядра  $\delta_{e,n} \leq y \leq \delta_T$  справедливо соотношение:

$$\tau_c = 0,0225\rho w_x^2(\nu/w_x y)^{1/4},$$

которое можно переписать так:  $\text{const} = w_x^{7/4} y^{-1/4}$ , при этом в константу включены все величины, кроме  $w$  и  $y$ . Из последнего выражения получаем степенной профиль скорости  $w_x = \text{const} y^{1/7}$ , известный под названием «закон

одной седьмой». Константу можно определить по условию на внешней границе пограничного слоя:  $w = w_0$  при  $y = \delta_T$ :

$$w_x = w_0 (y / \delta_T)^{1/7}. \quad (3.65)$$

Подставим уравнение (3.65) под знак интеграла в интегральное соотношение Кармана и выполним интегрирование в пределах  $0 - \delta_T$ , пренебрегая толщиной вязкого подслоя:

$$w_0^2 \int_0^{\delta_T} \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^{1/7} \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{1/7} / dy = \frac{7}{72} w_0^2 \delta_T.$$

Тогда, подставив равенство (3.64) в правую часть интегрального соотношения, получим:

$$\frac{7}{72} w_0^2 \frac{d\delta_T}{dx} = \frac{0,0225 \rho w_0^2 v^{1/4}}{\rho w_0^{1/4}} \frac{1}{\delta_T^{1/4}}$$

или  $\delta_T^{0,25} d\delta_T = c_0 dx$ , где  $c_0 = (72/7)0,0225 w_0^{-0,25} v^{0,25}$ .

Возьмем от левой части интеграл в пределах  $0 - \delta_T$ , а от правой — от 0 до  $x$ ; в результате получим:  $\delta_T^{1,25} = 1,25 c_0 x$  или  $\delta_T = (1,25 c_0 x)^{0,8}$ . Это соотношение дает закон изменения толщины турбулентного пограничного слоя вдоль поверхности теплообмена, который можно представить следующим образом:

$$\delta_T / x = 0,371 \text{Re}_x^{-0,2}, \quad (3.66)$$

где  $\text{Re} = w_0 x / \nu$ , при этом расстояние  $x$  отсчитывается от начала турбулентного пограничного слоя.

Формула (3.66) есть решение гидродинамической части задачи о переносе теплоты в турбулентном пограничном слое. Подставив  $\delta_T$  из формулы (3.66) в выражение (3.64), можно рассчитать трение на стенке, а при использовании формулы (3.65) — поле скорости. Для расчета коэффициента теплоотдачи необходимо воспользоваться аналогией Рейнольдса, которая выражается формулой (3.61), замыкающей, как указано выше, систему уравнений (3.62). Из формулы (3.64) имеем:

$$c_f = 0,045 \text{Re}_{\delta_T}^{-0,25},$$

где  $Re_{\delta,T} = w_0 \delta_T / \nu$ .

Используя очевидное соотношение  $Re_{\delta,T} = Re_x (\delta_T / x)$  и формулу (3.66), получим

$$c_f = 0,0576 Re_x^{-0,2}. \quad (3.67)$$

Подставляя выражение (3.67) в выражение аналогии Рейнольдса  $St = c_f / 2$ , имеем

$$St = 0,288 Re_x^{-0,2} \quad (3.68)$$

или

$$Nu_x = 0,0288 Re_x^{0,8} Pr.$$

При получении формулы (3.68) использован простейший вариант аналогии Рейнольдса при  $Pr = Pr_T = 1$ . Кроме того, при использовании интегрального соотношения Кармана пренебрегли толщиной вязкого подслоя. При учете допущений расчетная формула имеет вид:

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,43}. \quad (3.69)$$

### 2.6.6 Теплоотдача при обтекании плоской поверхности

Вынужденное движение жидкости вдоль плоской поверхности как задача конвективного теплообмена представляет интерес, во-первых, как классический пример применения теории пограничного слоя и, во-вторых, как практически важный процесс, используемый, например, при воздушном отоплении.

Связь местного коэффициента теплоотдачи  $a_x$  со скоростью невозмущенного потока  $w_0$ , расстоянием  $x$  от передней кромки плоской поверхности и теплофизическими параметрами жидкости выражается формулой (3.56)—для ламинарного пограничного слоя и формулой (3.69)—для турбулентного. Зависимость теплоотдачи от скорости для ламинарного пограничного слоя слабее, чем для турбулентного:  $a_x \sim w_0^{0,5}$  по формуле (3.56) и  $a_x \sim w_0^{0,8}$  по формуле (3.69). Изменение  $a_x$  вдоль плоской поверхности показано

на рис. 3.10,а; для ламинарной области («л»)  $\alpha_x \sim w_0^{0,5}$ , для турбулентной области («т»)  $\alpha_x \sim w_0^{0,8}$ . Осреднение коэффициента теплоотдачи производится по формуле (3.17): для области «л»:

$$\bar{\alpha}_l = (1/x_{кр}) \int_0^{x_{кр}} A_l x^{-0,5} dx = 2A_l x_{кр}^{-0,5} = 2\alpha_x(x_{кр}); \quad (3.70)$$

для области «т»

$$\bar{\alpha}_t = (1/x_m) \int_0^{x_m} A_t x^{-0,2} dx = 1,25A_t x_m^{-0,2} = 1,25\alpha_x(x_m). \quad (3.71)$$

где  $x_m = x - x_{кр}$  — координата, отсчитываемая от начала турбулентного пограничного слоя;  $A_l$  и  $A_t$  — константы, определяемые соответственно по формулам (3.56) и (3.69).

При получении формул (3.56) и (3.69) предполагалось, что теплофизические свойства жидкости  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  не зависят от температуры. В действительности

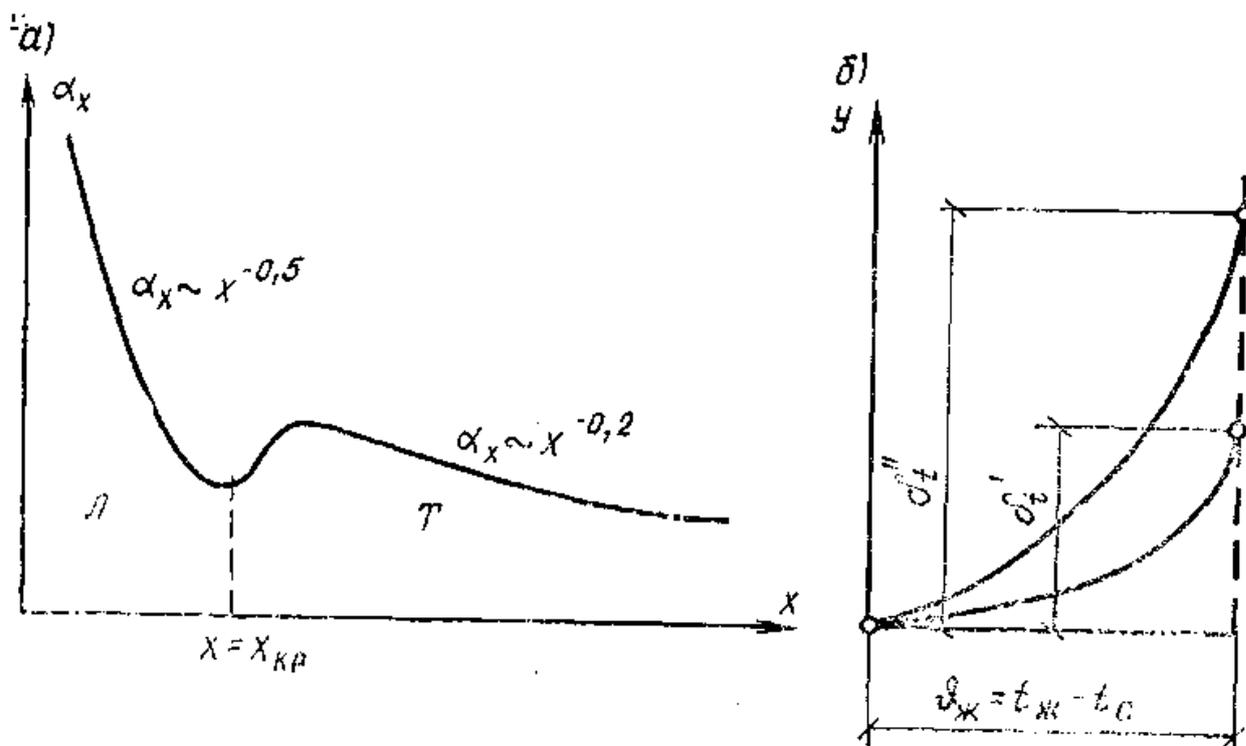


Рис. 3.10 Изменение  $\alpha_x$  вдоль плоской поверхности

такая зависимость существует, при этом в области умеренных температур наиболее существенной оказывается связь  $\mu = \mu(t)$  для капельных жидкостей. Известно, что вязкость капельных жидкостей уменьшается при повышении температуры. Применительно к пограничному слою это означает, что толщина его у «горячей» стенки будет меньше, чем у «холодной», при этом «горячей» условно считается стенка с температурой  $t'_c > t_{ж}$  а «холодной» — с температурой  $t''_c < t_{ж}$ . Указанное явление есть прямое следствие формулы (3.40), согласно которой при одинаковых скоростях величина  $\delta$  меньше для жидкости с меньшей вязкостью:  $\delta \propto \mu^{0,5}$ . Эта закономерность сохраняется и для толщины теплового пограничного слоя: согласно формуле (3.53),  $\delta_t \propto \mu^{0,5} / \mu^{0,33} = \mu^{0,17}$ , так как  $Pr = \mu c_p / \lambda$ . Таким образом, толщина пограничного слоя зависит от знака разности температур  $t_{ж} - t_c$  или, как еще говорят, от направления теплового потока.

На рис. 3.10,6 показано, что при одном и том же модуле величины  $\mathcal{G}_{ж} = t_{ж} - t_c$  толщина «холодного» пограничного слоя  $\delta''_t$  (направление теплового потока от жидкости к стенке) больше толщины «горячего»  $\delta'_t$ ; (направление теплового потока от стенки к жидкости). Понятно, что для коэффициента теплоотдачи зависимость будет обратной. Сказанное распространяется и на турбулентный пограничный слой.

Для учета температурной зависимости вязкости капельной жидкости в формулы для расчета теплоотдачи вводят поправку  $(Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25}$ , предложенную М. А. Михеевым; используются также поправки вида  $(\mu_{ж} / \mu_c)^n$ .

Расчетные формулы для *средней* теплоотдачи при обтекании плоской поверхности имеют вид:

$$\overline{Nu} = 0,66 Re^{0,5} Pr_{ж}^{0,33} (Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25}, Re \leq Re_{кр}; \quad (3.72)$$

$$\overline{Nu} = 0,037 Re^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25}, Re > Re_{кр}. \quad (3.73)$$

Обычно принимают  $Re_{кр} = w_0 x_{кр} / \nu \approx 5 \cdot 10^5$ . *Определяющим размером* в числах  $\overline{Nu}$  и  $Re$  является длина  $l_0$  поверхности вдоль направления потока, измеряемая от начала соответствующего пограничного слоя: для формулы (3.72)  $0 \leq l_0 \leq x_{кр}$ , для формулы (3.73)  $l_0 = x_m$ . Если турбулентный пограничный слой начинается от передней кромки плоской поверхности, то для формулы (3.73)  $l_0 = x$ . *Определяющей температурой*, по которой из таблиц выбираются величины  $\lambda$ ,  $\nu$  и  $Pr_{ж}$ , является  $t_x$ , величина  $Pr_c$  берется по температуре  $t_c$ . Коэффициенты 0,66 и 0,037 взяты с учетом формул (3.70) и (3.71). Поправка  $(Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25}$  используется только для капельных жидкостей.

Если  $Pr = 0,700$  (воздух при 35 °С и атмосферном давлении), то формулы для средней теплоотдачи принимают вид:

$$\overline{Nu} = 0,587 Re^{0,5}, Re \leq Re_{кр}; \quad (3.74)$$

$$\overline{Nu} = 0,0317 Re^{0,8}, Re > Re_{кр}. \quad (3.75)$$

### 2.6.7 Конвективный теплообмен при течении жидкости в трубах

Теплообменные аппараты, основным конструктивным элементом которых является труба, наиболее широко распространены на практике. Трубные системы используются также для транспорта теплоносителя (например, при отоплении, вентиляции, теплоснабжении), в этих случаях желательно сохранить энтальпию потока. При этом для правильного использования тепловой изоляции необходимо знать коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности трубы (например, воздуховода с нагретым воздухом).

Теплообмен при течении жидкости в трубах (так называемая внутренняя задача) имеет ряд особенностей по сравнению с конвективным теплообменом на внешней поверхности тела, обтекаемого потоком (внешняя задача). Эти особенности обусловлены ограниченностью потока и изменением его характеристик вдоль направления течения.

Ламинарное течение в трубе происходит при  $Re = w_0 d / \nu \leq 2300$ , где  $w_0 = G / \rho f$  — средняя по сечению трубы  $f$  скорость жидкости;  $d$  — внутренний диаметр трубы;  $\nu$  — кинематическая вязкость. При невозмущенном потоке на входе в трубу в начальном сечении при  $x = 0$  имеем однородное поле скорости. У стенки трубы формируется пограничный слой, толщина его растет в направлении потока и при  $x = l_n$  заполняет все поперечное сечение трубы, при этом  $\delta = d/2$ . Оценить величину  $l_n$  можно на основе формулы (14.54) для плоского пограничного слоя, которую можно представить так:  $x / \delta = (1/4,64)^2 w_0 \delta / \nu$ ; при  $\delta = d/2$  имеем  $x/d = 0,0116 Re$ , т. е. величина  $l_n / d$  составляет примерно 1 % величины  $Re$ . Более точные расчеты дают следующее значение длины гидродинамического начального участка для ламинарного режима:

$$l_n / d = 0,065 Re. \quad (3.76)$$

Формируется и тепловой пограничный слой, толщина которого по формуле (3.53) равна  $\delta_t = \delta / \sqrt[3]{Pr}$ , откуда видно, что длина теплового начального участка будет тем больше, чем больше  $Pr$ . Эта длина определяется формулой:

$$l_{n,t} / d = 0,055 Re Pr. \quad (3.77)$$

Формулы (3.76) и (3.77) получены на основе расчета двумерного поля скорости  $w = w(r, x)$  и температуры  $t = t(r, x)$  в трубе ( $r$  — радиальная координата  $0 \leq r \leq d/2$ ). Поэтому при  $Pr=1$  имеем  $l_n \neq l_{n,t}$ , хотя теория пограничного слоя дает в этом случае  $\delta = \delta_t$  и следует ожидать, что заполнение трубы динамическим и тепловым пограничными слоями произойдет при одном и том же значении  $x$ . По формулам (3.76) и (3.77) это происходит при  $Pr \approx 1,18$ . Расхождение показывает, что трактовка процессов на начальном участке трубы с позиций модели плоского пограничного слоя является приближенной.

При  $Re = 2300$  имеем  $l_n \approx 150d$ . Для трубы с внутренним диаметром  $d=20$  мм длина  $l_n = 3$  м, а длина  $l_{n,t}$  при  $Pr = 7$  (вода при  $20^\circ C$ ) равна  $l_{n,t} = 17,7$  м.

Число  $Re = 2300$  для рассматриваемой трубы соответствует скорость  $0,12$  м/с. Расчет, следовательно, показывает, что длина начального участка может быть весьма значительной и охватывать большую часть теплообменной поверхности.

Расчет теплоотдачи на начальном участке трубы можно основывать на закономерностях для плоского пограничного слоя. Например, беря за основу формулу (14.56), получаем следующую зависимость для местной теплоотдачи:

$$Nu_{x,mp} \approx Nu_x (x/d)^{0,1} (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25}, \quad (3.78)$$

где  $Nu_{x,mp} = a_x x / \lambda$  — местное число Нуссельта для трубы;  $Nu$  — число Нуссельта, определяемое по формуле (3.56);  $x$  — расстояние от начального сечения трубы.

Сомножитель  $(x/d)^{0,1}$  учитывает особенности формирования пограничного слоя в трубе, из-за него  $a_x \sim x^{-0,4}$  [вместо  $a_x \sim x^{-0,5}$  по формуле (14.56)]. Формула (3.78) справедлива для постоянного теплового потока на стенке  $q_c = \text{const}$ . Определяющая температура — средняя по сечению  $x$ .

На основе тщательно выполненных экспериментов и теоретических исследований Б. С. Петуховым были разработаны надежные расчетные зависимости для теплоотдачи при ламинарном режиме. Средний коэффициент теплоотдачи в них представлен как функция приведенной длины трубы. Формулу (3.77) можно записать следующим образом:  $Pe^{-1} l_{н,t} / d = 0,055$  (где  $Pe = Re Pr$ ), или  $L_{н,t} = 0,055$ . Для трубы с длиной  $l < l_{н,t}$  можно ввести понятие приведенной длины трубы  $L_t = Pe^{-1} l / d$ ; при этом  $0 \leq L_t \leq L_{н,t}$ .

Среднее по длине трубы число Нуссельта определяется выражением

$$\overline{Nu} = 1,55 L_t^{-0,33} \varepsilon (\mu_{жс} / \mu_c)^{0,14}, \quad (3.79)$$

где  $\overline{Nu} = \overline{a} d / \lambda$  (здесь  $\overline{a}$  — средний коэффициент теплоотдачи);  $\varepsilon$  — поправка на гидродинамический начальный участок, рассчитываемая по формуле:  $\varepsilon = 0,6(1 + 2,5L)L^{-0,14}$ , где  $L = L_t Pr$ .

Условия применения формулы (3.79) таковы:  $L_1 \leq 0,05; L \leq 0,1;$   
 $0,07 \leq (\mu_{жс} / \mu_c)^{-1} \leq 1500$  (капельные жидкости — нефтепродукты, вода).  
 Коэффициент  $\bar{a}$  отнесен к среднему логарифмическому температурному напору  $\Delta t_{л}$  (рассматривается ниже в данном параграфе), который при  $l \leq l_{н,t}$  чаще всего можно заменить средним арифметическим  $\Delta t_a = 0,5(t'_{жс} + t''_{жс}) - t_c$ , где  $t'_{жс}, t''_{жс}$  — температура жидкости на входе в трубу и выходе из нее. Отнесение  $\bar{a}$  к определенному температурному напору означает, что при определении теплового потока после расчета  $\bar{a}$  по формуле (3.79) следует использовать именно этот температурный напор:  $Q = \bar{a} \Delta t_{л} \pi dl \approx \bar{a} \Delta t_a \pi dl$ . Определяющая температура равна  $t_{опр} = 0,5(t_c + t_{жс})$ , где  $t_{жс} = t_c \pm \Delta t_{л} \approx t_c \pm \Delta t_a$ .

Расчет теплоотдачи по формуле (3.79) производится для так называемого *вязкостного* течения — разновидности ламинарного режима с преобладающим влиянием сил вязкого трения и несущественным влиянием свободной конвекции.

Расчетная формула (3.79), а также приближенная формула (3.78) справедливы для теплового начального участка. Как следует из этих формул (где для простоты принято  $l_n = l_{н,t}$ ), местный коэффициент теплоотдачи  $a_x$  уменьшается вдоль потока по мере роста толщины пограничного слоя  $\delta$ . Возникновение пограничного слоя и возрастание  $\delta$  являются причиной деформации профиля скорости  $w = w(r)$  при  $0 \leq x \leq l_n$ . Скорость  $w_m$  на оси трубы при  $r=0$  возрастает, компенсируя уменьшение  $w$  в области пограничного слоя, т. е. при  $r_0 - \delta \leq r \leq r_0$ ,  $r_0 = 0,5d$ . При этом средняя по сечению скорость  $w = G / \rho f$  сохраняется постоянной, ибо  $G, f$  и  $\rho$  — постоянны (жидкость несжимаема). При  $x = l_n$  скорость  $w_m$  принимает максимальное значение  $w_m = 2w_0 = 2\bar{w}$ . Вправо от этого сечения при  $x > l_n$  располагается область *стабилизированного течения*, в которой профиль скорости не изменяется вдоль потока и описывается *параболой Пуазейля*  $W = 2(1 - R^2)$ , где  $W = w/w_0$ ,  $R = r/r_0$ . Параболу Пуазейля легко получить интегрированием уравнения движения

(4.35), если перейти к цилиндрическим координатам, сохранить только силы вязкости и давления и учесть, что скорость потока не изменяется вдоль оси трубы:  $w = w(r) \neq f(x)$ .

Вместе с деформацией профиля скорости деформируется и профиль избыточной температуры  $\vartheta = t - t_c$ . Температура на оси трубы  $\vartheta_m$  сохраняет постоянное значение в пределах теплового начального участка: при  $x \leq l_{n,t}$  имеем  $\vartheta_m = \vartheta' = t'_{xc} - t_c$ . Вправо от сечения  $x = l_{n,t}$  располагается область *стабилизированного теплообмена*, в которой коэффициент теплоотдачи не изменяется:  $a_x = \text{const}$ . Для капельных жидкостей, у которых  $\text{Pr} \gg 1$  (исключая жидкие металлы), область стабилизированного теплообмена начинается гораздо позже области стабилизированного течения, т. е.  $l_{n,t} \ll l_n$ . Именно поэтому в формуле (15.10) имеется поправка  $\varepsilon$ . Если бы теплообмен начинался в сечении при  $x = l_n$  (т. е. при  $x < l_n$  было бы  $t_{xc} = t_c$ ), то в формуле (3.79) можно было бы принять  $\varepsilon = 1$ . Примерно такая ситуация возникает при нагреве вязких нефтепродуктов (например, жидких топлив), для которых число  $\text{Pr}$  при комнатной температуре составляет несколько сотен или даже тысяч.

Из условия  $a_x = \text{const}$  на участке стабилизированного теплообмена следует, что средняя температура жидкости убывает вдоль оси с такой же быстротой, как и градиент температуры на стенке. Действительно, из формулы (3.2), которая для трубы имеет вид:

$$a_x = -[\lambda / (\bar{t} - t_c)] (\partial t / \partial r)_{r=r_0}, \quad (3.80)$$

где  $\bar{t} = \bar{t}(x)$  — средняя по сечению температура жидкости;  $t_c = t(r, x)$  — температура жидкости в точке с координатами  $r$  и  $x$ , и изменения профиля температуры  $\vartheta = t - t_c$ , который становится все более «плоским» вдоль потока на участке стабилизированного теплообмена, видно, что средняя температура  $\bar{\vartheta} = \bar{t} - t_c$  и градиент, равный  $\text{tg } \rho$ , должны сохранять постоянное отношение, тогда по формуле (3.80)  $a_x = \text{const}$ . Следовательно, если известно поле

температуры  $t = t(r, x)$ , то по выражению (3.80) можно рассчитать коэффициент теплоотдачи на участке стабилизированного теплообмена.

Выбрав в качестве масштабов величины  $\vartheta' = t'_{xc} - t_c$  и  $\Gamma_0$ , выражение (3.80) запишем в безразмерном виде:

$$Nu\bar{\theta} = -(\partial\theta/\partial R)_{R=1}, \quad (3.81)$$

где  $\theta = (t - t_c)/(t'_{xc} - t_c) = \vartheta/\vartheta'$  — безразмерная температура;  $R = r/r_0$  — безразмерный радиус.

Для нахождения поля температуры обратимся к уравнению энергии, которое в данном случае удобно представить в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $x$ . Рассматриваемое поле обладает осевой симметрией, поэтому  $t \neq f(\varphi)$ .

Уравнение энергии будет иметь вид:

$$\rho c_p (w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_r \frac{\partial t}{\partial r}) = \lambda (\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r}). \quad (3.82)$$

Уравнение (3.82) можно упростить, отбросив член  $w_r(\partial t/\partial r) = 0$ , так как при стабилизированном течении  $w_r = 0$  и член  $\lambda(\partial^2 t/\partial x^2) = 0$ , поскольку  $\lambda(\partial^2 t/\partial x^2) = \partial(\lambda \partial t/\partial x)/\partial x = -\partial q_x/\partial x$ , а изменением теплового потока  $q_x$  вдоль оси трубы, обусловленного теплопроводностью, можно пренебречь (считаем, что перенос теплоты вдоль оси происходит только конвекцией). С учетом упрощений уравнение энергии принимает вид:

$$\rho c_p [w_x (\partial t/\partial x)] = \lambda [\partial^2 t/\partial r^2 + (1/r) \partial t/\partial r]. \quad (3.83)$$

Уравнение (3.83) можно переписать в безразмерном виде

$$\partial^2 \theta / dR^2 + R^{-1} \partial \theta / \partial R = Pe W_x \partial \theta / \partial X, \quad (3.84)$$

где  $Pe = \rho c_p w_0 r_0 / \lambda$  — число Пекле;  $W_x = w_x/w_0$  — безразмерная скорость;  $W_x = w_x(R)$ ;  $X = x_0/r_0$  — безразмерная продольная координата.

Скорость  $w_x$  зависит только от радиуса и определяется параболой Пуазейля. Обозначая скорость  $W_x = W = 2(1 - R^2)$ , подставим ее в правую часть уравнения (3.84):

$$\partial^2 \theta / dR^2 + R^{-1} \partial \theta / dR = 2Pe(1 - R^2) \partial \theta / dX. \quad (3.85)$$

Уравнение (3.85) является уравнением в частных производных и получить его решение довольно сложно. Для упрощения будем полагать  $\partial \theta / dX = \text{const}$ , что достаточно хорошо выполняется в области стабилизированного теплообмена при граничном условии  $q_c = \text{const}$  и может рассматриваться как приближенный прием при граничном условии  $t_c = \text{const}$ . Обозначив  $2Pe \partial \theta / dX = A$ , получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения функции  $\theta = \theta(R)$ :

$$d^2 \theta / dR^2 + R^{-1} d\theta / dR = A(1 - R^2). \quad (3.86)$$

Решение соответствующего уравнению (3.86) однородного (т. е. не имеющего правой части) уравнения имеет вид:

$$\theta = c_1 \ln R + c_2, \quad (3.87)$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные интегрирования.

Решение неоднородного уравнения (3.86) будем искать, полагая  $c_1 = c_1(R)$ . Для определения  $c_1(R)$  найдем  $d\theta / dR$  и  $d^2 \theta / dR^2$  по выражению (3.87) и подставим их в уравнение (3.86). Тогда получим

$$dc_1 = AR(1 - R^2)dR. \quad (3.88)$$

Интегрируя уравнение (3.88) и учитывая, что  $d\theta / dR = c_1 / R$ , имеем:

$$d\theta / dR = AR^{-1}(R^2 / 2 - R^4 / 4) + c_3 / R. \quad (3.89)$$

Постоянную  $c_3$  в уравнении (3.89) определим по условию симметрии поля температуры: при  $R = 0$  имеем  $d\theta / dR = 0$ ; из уравнения (3.89) получаем, что  $c_3 = 0$ . Интегрируя уравнение (3.89), имеем:

$$\theta = A(R^2 / 4 - R^4 / 16) + c_4. \quad (3.90)$$

Постоянную  $c_4$  в уравнении (3.90) определим по граничному условию на стенке: при  $R = 1$  имеем  $\theta = 0$ . Подставляя это условие в уравнение (3.90),

получаем  $c_4 = \text{---} (3/16)A$ . Окончательно выражение для поля температуры в поперечном сечении трубы имеет вид:

$$\theta = A(R^2/4 - R^4/16 - 3/16). \quad (3.91)$$

Пользуясь выражением (3.91), можно найти производную на стенке  $(d\theta/dR)_{R=1}$  и среднemasсовую температуру жидкости  $\bar{\theta}$ , которая определяется

размерным выражением  $\bar{t} = (\rho w_0 \pi r_0^2)^{-1} \int_0^{r_0} t(r) w(r) 2\pi r dr$  или безразмерным

выражением:  $\bar{\theta} = 2 \int_0^1 \theta W R dR$ .

Произведя необходимые вычисления и подставив значения  $\bar{\theta}$  и  $(d\theta/dR)_{R=1}$  в формулу (3.81), получаем, что на участке стабилизированного теплообмена постоянному коэффициенту теплоотдачи  $a = \text{const}$  соответствует число Нуссельта  $Nu = 2Nu_r = ad/\lambda = 4,36$  (при  $q_c = \text{const}$ ). Для граничного условия  $t_c = \text{const}$ , при котором  $\partial\theta/\partial X \neq \text{const}$  и решение уравнения (3.85) существенно сложнее, число  $Nu = 3,66$ .

Таким образом, на участке стабилизированного теплообмена коэффициент теплоотдачи при ламинарном режиме есть постоянная величина, зависящая только от диаметра трубы и теплопроводности жидкости и определяемая (в зависимости от граничных условий на стенке трубы) выражением:

$$\alpha = (3,66 \div 4,36)\lambda / d \approx 4\lambda / d, \quad (3.93)$$

которое можно использовать для расчетов, вводя для капельных жидкостей поправку  $(Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}$  для учета зависимости вязкости от температуры.

Как отмечено выше, при  $t_c = \text{const}$  средняя по сечению температура жидкости  $\bar{\vartheta}$  уменьшается вдоль потока. Для получения закона изменения температуры жидкости вдоль трубы при  $a = \text{const}$  составим условие теплового баланса для элементарного участка трубы длиной  $dx$ . Слева в элемент трубы входит поток жидкости с температурой  $\bar{\vartheta}$ , вносящий энтальпию  $\rho c_p w_0 \pi r_0^2 \bar{\vartheta}$ . Из элемента трубы вправо выходит поток той же массы, но с температурой  $\bar{\vartheta} + d\bar{\vartheta}$

и энтальпией  $\rho c_p w_0 \pi r_0^2 (\bar{\vartheta} + d\bar{\vartheta})$ . Два указанных потока энтальпии не равны между собой, их разность равна тепловому потоку, проходящему через стенку элемента трубы,  $\alpha \bar{\vartheta} 2\pi r_0 dx$ . Условие теплового баланса можно представить в виде:

$$\rho c_p w_0 \pi r_0^2 \bar{\vartheta} - \rho c_p w_0 \pi r_0^2 (\bar{\vartheta} + d\bar{\vartheta}) = \alpha \bar{\vartheta} 2\pi r_0 dx.$$

Разделяя переменные, получим выражение  $d\bar{\vartheta} / \bar{\vartheta} = -(2\alpha / \rho c_p w_0 r_0) dx$ , которое после интегрирования принимает вид  $\ln \bar{\vartheta} = -(2\alpha / \rho c_p w_0 r_0)x + c$ . Постоянную интегрирования найдем из условия для начального сечения участка стабилизированного теплообмена: при  $x = 0$  имеем Тогда  $c = \ln \bar{\vartheta}_0$ , и  $\ln(\bar{\vartheta} / \bar{\vartheta}_0) = -(2\alpha / \rho c_p \times w_0 r_0)x$ , что можно записать также в следующем виде:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_0 \exp[-2\alpha / \rho c_p w_0 r_0 x]. \quad (3.94)$$

Используя безразмерные величины, выражение (3.94) можно представить следующим образом:

$$\bar{\theta} = \exp(-4Stx / d), \quad (3.95)$$

где  $St = a / \rho c_p w_0$  — число Стентона.

Выражения (3.94) и (3.95) дают закон изменения средней по сечению температуры жидкости вдоль трубы: температура жидкости приближается к температуре стенки по закону экспоненты. Подчеркнем универсальность экспоненциального закона изменения средней избыточной  $\bar{\vartheta}$  или безразмерной  $\bar{\theta}$  температуры жидкости вдоль оси трубы: формулы (3.94) и (3.95) являются следствием двух условий — теплового баланса и постоянства  $a$ . Если  $t_c = \text{const}$ , то  $\bar{t}_c$  также меняется по закону экспоненты типа  $\bar{t} = a_1 + a_2 \exp(-a_3 x)$ ; если  $q_c = \text{const}$ , то  $\bar{t}$  изменяется по линейному закону типа  $\bar{t} = a_4 + a_5 x$ , где  $a_i$  — постоянные, определяемые по тепловому балансу.

На начальном тепловом участке температура  $\bar{\vartheta}$  (или  $\bar{\theta}$ ) также убывает, но не по закону экспоненты, так как  $\alpha \neq \text{const}$ . Поэтому использование формул

(3.94) и (3.95) для трубы в целом, включая начальный участок, является приближенным расчетным приемом. На участке стабилизированного теплообмена не только средняя температура  $\bar{t}$ , но и любая температура  $t(r)$ ,  $0 \leq r \leq r_0$  изменяется по экспоненте (или линейно при  $q_c = \text{const}$ ); на рис. 3.11 показано изменение температуры  $\mathcal{G}_m$  на оси, при этом  $b \neq f(r)$ .

Поясним упоминавшееся выше понятие среднего логарифмического температурного напора  $\Delta t_n$ , которое связано с формулами (3.94) и (3.95). Местная плотность теплового потока  $q_x = \alpha \bar{\mathcal{G}}(x)$  изменяется вдоль трубы вместе с  $\bar{\mathcal{G}}(x) = \bar{t}(x) - t_c$ . Тепловой поток через стенку трубы длиной  $l$  определяется по средней плотности теплового потока:  $Q = q \pi dl$ . Величина  $q$  равна:

$$q = l^{-1} \int_0^l q_x dx = \alpha l^{-1} \int_0^l \bar{\mathcal{G}}(x) dx = \alpha \Delta t_{cp},$$

где  $\Delta t_{cp}$  — осредненный вдоль трубы температурный напор.

Величину  $\Delta t_{cp}$  найдем, осредняя температуру  $\bar{\theta}$  вдоль трубы:

$$\Delta t_{cp} / \mathcal{G}' = \bar{\theta}_{cp} = \int_0^1 \bar{\theta}(X) dX, \quad (3.96)$$

где  $X = x/l$  — безразмерная координата вдоль трубы (с масштабом  $l$ ).

Интеграл в формуле (3.96) вычисляется с использованием выражения (3.95), учитывая, что  $x/d = Xl/d$ . Он равен  $(4Stl/d)^{-1} [1 - \exp(-4Stl/d)]$ . Из выражения (3.95) следует, что при  $X=0$  имеем  $\bar{\theta}(0) = 1$ , а в конце трубы при  $X = 1$  имеем  $\bar{\theta}(1) = \exp(-4Stl/d)$  или  $\ln \bar{\theta}(1) = -4St$ . Используя эти выражения, получаем:

$$\bar{\theta}_{cp} = [\bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(1)] / [\ln \bar{\theta}(0) - \ln \bar{\theta}(1)], \quad (3.97)$$

где  $\ln \bar{\theta}(0)$  — дополнительно введенное в знаменатель слагаемое, которое не меняет значения интеграла из выражения (3.96), поскольку  $\ln \bar{\theta}(0) = \ln 1 = 0$ .

Выражение (3.97) дает среднее логарифмическое значение функции  $\bar{\theta}(X)$  на интервале от  $X = 0$  до  $X = 1$ . Учитывая, что  $\bar{\theta} = \bar{\mathcal{G}} / \mathcal{G}'$  и  $\bar{\theta}_{cp} = \Delta t_{cp} / \mathcal{G}'$ , получаем

следующее значение среднего логарифмического температурного напора

$$\Delta t_{\text{л}} = \Delta t_{\text{ср}} :$$

$$\Delta t_{\text{л}} = (\Delta t' - \Delta t'') / \ln(\Delta t' / \Delta t''),$$

где один и два штриха означают, как и ранее, вход и выход, а  $\Delta t = \vartheta$ .

Если величина  $\Delta t$  изменяется по длине трубы  $l$  незначительно, то способ ее осреднения становится безразличным и применяют наиболее простое осреднение — арифметическое. Средний арифметический температурный напор  $\Delta t_{\text{а}} = 0,5(\Delta t' + \Delta t'')$  больше  $\Delta t_{\text{л}}$  не более чем на 4 %, если  $\Delta t' / \Delta t'' \leq 2$ .

Подводя итог рассмотренным выше закономерностям, характерным для участка стабилизированного теплообмена, отметим основные формулы: уравнение температурного поля (3.92), соотношение для расчета теплоотдачи (3.93), экспоненциальный закон изменения температуры жидкости вдоль трубы (3.95) и формулу среднего логарифмического температурного напора (3.98). Уравнение (3.92), полученное при условии  $\partial\theta / \partial X = \text{const}$ , можно использовать для расчетов при  $q_c = \text{const}$ , выбрав для безразмерной температуры масштаб, соответствующий граничному условию:  $\theta = (t - t'_{\text{жс}}) / (q_c r_o / \lambda)$ . Применение формулы (3.92) для расчета температурного поля при  $t_c = \text{const}$  в принципе возможно в сочетании с уравнением (3.95), однако необходим анализ возникающей погрешности.

Перейдем к рассмотрению теплоотдачи при турбулентном движении жидкости в трубе. Развитый турбулентный режим течения в трубе осуществляется при  $Re \geq 10\,000$ . В диапазоне  $2300 \leq Re \leq 10^4$  в трубе наблюдается переходный режим течения — неустойчивый режим, характеризующийся сменой ламинарного и турбулентного потока. Такое состояние характеризуется так называемым *коэффициентом перемежаемости*,  $0 \leq w \leq 1$ ; представляющим собой относительное время существования турбулентного потока; величина  $1 - w$  приходится на долю ламинарного потока. Надежные рекомендации по расчету теплоотдачи при переходном режиме пока не разработаны. Поэтому возможны лишь оценки по минимальному и максимальному коэффициентам

теплоотдачи для ламинарного и турбулентного режимов соответственно с учетом коэффициента перемежаемости.

Основной особенностью турбулентного потока по сравнению с ламинарным является *молярный* перенос количества движения и теплоты; при ламинарном движении происходит *молекулярный* перенос. Турбулентный моль — носитель количества движения и теплоты — обеспечивает существенно большую интенсивность переноса, чем молекула. Именно поэтому турбулентные коэффициенты переноса намного больше молекулярных:  $\lambda_m \gg \lambda, \mu_m \gg \mu$ .

При плавном входе жидкости в трубу и  $Re \geq 10^4$  формируется ламинарный пограничный слой, переходящий затем в турбулентный, который в последующем заполняет все поперечное сечение трубы. Если на входе в трубу жидкость турбулизирована или  $Re > 5 \cdot 10^4$ , то практически с самого начала развивается турбулентный пограничный слой. Стабильный профиль скорости устанавливается при турбулентном режиме довольно быстро, в этом случае начальный гидродинамический участок имеет длину  $l/d \approx 15$ , начальный тепловой участок имеет примерно такую же длину. Следовательно, при турбулентном режиме основная часть трубы в большинстве случаев находится в условиях стабилизированного течения и теплообмена.

Как уже было сказано, теоретический подход к расчету теплоотдачи в турбулентном потоке основан на аналогии Рейнольдса, которая выражается формулой (3.61):  $St = c_f / 2$  при  $Pr = 1$ . Для потока в трубе эта формула приобретает вид  $St = \xi / 8$ , поскольку по определению величины  $c_f$  и  $\xi$  равны:

$$c_f = \tau_c / (\rho w_0^2 / 2); \xi = 2(\Delta p / \rho w_0^2) d / l, \quad (3.99)$$

а равновесие сил в трубе выражается соотношениями

$$\Delta p \pi d^2 / 4 = \tau_c \pi d l; \Delta p = 4 \tau_c l / d. \quad (3.100)$$

Если использовать для определения  $\xi$  формулу Блазиуса  $\xi = 0,3164 Re^{-0,25}$ , то получим следующее выражение для теплоотдачи

$$St = Nu / Re Pr = 0,0396 Re^{-0,25},$$

Более точной является формула, полученная обобщением экспериментальных данных при течении жидкости в гладких трубах при  $10^4 \leq Re \leq 1,2 \cdot 10^5$ :

$$\xi = 0,184 Re^{-0,2}, \quad (3.101)$$

которой соответствует следующее выражение для теплоотдачи ( $Pr = 1$ ):

$$Nu = 0,023 Re^{0,8}. \quad (3.102)$$

Обработка многочисленных экспериментальных данных, полученных в большом диапазоне изменения основных параметров, позволила получить М. А. Михееву расчетную зависимость, которая уже много лет используется для инженерных расчетов:

$$\overline{Nu} = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43} (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25} \varepsilon_l, \quad (3.103)$$

где  $\overline{Nu} = \overline{\alpha} d / \lambda$ ;  $Re = w_0 d / \nu$ ;  $\varepsilon_l$  - коэффициент, учитывающий влияние начального участка

При  $l / d \geq 50$  коэффициент  $\varepsilon_l = 1$ . Определяющей температурой в формуле (3.103) является средняя арифметическая температура жидкости. Формула (3.103) справедлива при  $Re \geq 10^4$  и  $0,6 \leq Pr \leq 2500$ . Следует отметить, что в области с  $Re > 10^5$  или при  $Pr > 5$  более точные результаты дает формула Б. С. Петухова и В. В. Кириллова, сведения о которой приводятся в учебниках и книгах по теплопередаче.

В турбулентном потоке скорость резко изменяется в пределах вязкого подслоя и профиль скорости является более заполненным по сравнению с параболой Пуазейля: для турбулентного течения в трубе средняя скорость  $w_0 = 0,8w_m$ , а для параболы Пуазейля  $w_0 = 0,5w_m$ . На этом факте основано применение формул, используемых для коэффициента трения и теплоотдачи, для труб некруглого поперечного сечения, при этом вводят эквивалентный диаметр, определяемый формулой

$$d_3 = 4f / u, \quad (3.104)$$

где  $f$  — площадь поперечного сечения;  $u$  — смоченный периметр.

Формула (3.104) получается из соотношений (3.100) и выражений  $f = \pi d^2 / 4; u = \pi d$  для трубы с круглым поперечным сечением. Диаметр  $d_3$  можно использовать в качестве определяющего размера в формуле (3.102) или (3.101). Применение  $d_3$  для ламинарного режима не приводит к хорошим результатам, ибо профили скорости и температуры существенно зависят здесь от формы поперечного сечения (изменение  $w$  и  $t$  происходит на расстоянии около  $d/2$ , а не в тонком вязком подслое). В качестве трубы с некруглым поперечным сечением может рассматриваться, например, кольцевое сечение или канал в межтрубном пространстве при *продольном* обтекании трубных пучков.

При расчете потери давления в трубе по формуле Дарси — Вейсбаха  $\Delta p = \xi(\rho w_0^2 / 2)l / d$  коэффициент сопротивления трения для ламинарного режима  $\xi = 64 / Re$ . Эту формулу легко получить из соотношений (3.99) и (3.100) и выражения параболы Пуазейля. Для турбулентного режима можно использовать формулу Блазиуса и уравнение (3.101). Влияние изменения вязкости с температурой можно учесть поправкой типа  $(Pr_c / Pr_{жс}^n)$  или  $(\mu_c / \mu_{жс})^m$ , где  $n > 0, m > 0$ .

### 2.6.8 Теплоотдача при поперечном обтекании труб и трубных пучков

При обтекании потоком криволинейной поверхности пограничный слой формируется в условиях изменяющегося градиента давления. При малых числах Рейнольдса  $Re = w_0 d / \nu < 5$ , где  $d$  — наружный диаметр трубы, а  $w_0$  — скорость невозмущенного потока, происходит безотрывное обтекание цилиндрической поверхности трубы (рис. 3.12, а). В области сгущения линий тока скорость потока возрастает в силу сохранения неразрывности среды: в любом поперечном сечении массовый расход  $G$  должен оставаться неизменным. Однако это увеличение скорости влечет за собой уменьшение давления в силу сохранения энергии потока в соответствии с уравнением

Бернулли; если кинетическая энергия потока  $w^2/2$  возрастает, то соответственно должна уменьшиться энергия вида  $pv$  или  $p/\rho$ , которую иногда называют энергией давления.

При увеличении числа  $Re$  описанное явление происходит более интенсивно. В этом случае после перехода потока через сечение максимальной скорости (примерно при  $\varphi = 90^\circ$ , см. рис. 3.12,б) происходит торможение с одновременным возрастанием давления. В непосредственной близости от стенки, где скорость мала (в силу прилипания жидкости к стенке и вязкого трения), происходит не только торможение, но и течение вспять, которое приводит к оттеснению потока от стенки и отрыву пограничного слоя (см. рис. 3.12,б).

Если  $Re=2 \cdot 10^5$ , то происходит отрыв ламинарного пограничного слоя, при этом угол отрыва меньше  $90^\circ$  (рис. 3.13, а). При  $Re > 2 \cdot 10^5$  ламинарный слой сохраняется и реализуется переход к турбулентному течению в пограничном слое (поток с возросшей скоростью как бы более плотно прижимает пограничный слой к поверхности цилиндра и прежний отрыв не происходит). Турбулентный пограничный слой, обладающий большей кинетической энергией, является и более устойчивым к отрыву, поэтому отрыв происходит лишь при  $\varphi = 140^\circ$  (рис. 3.13, б).

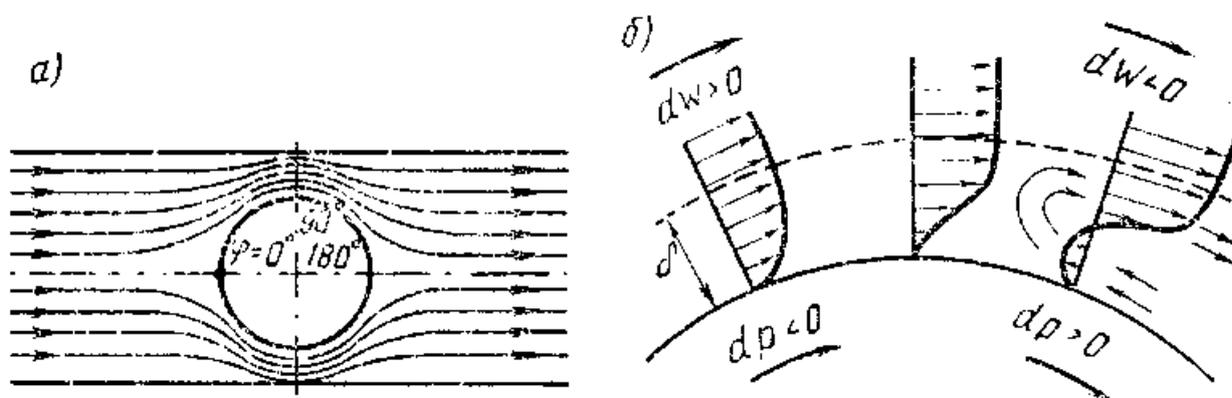


Рис. 3.12 Цилиндрическая поверхность трубы

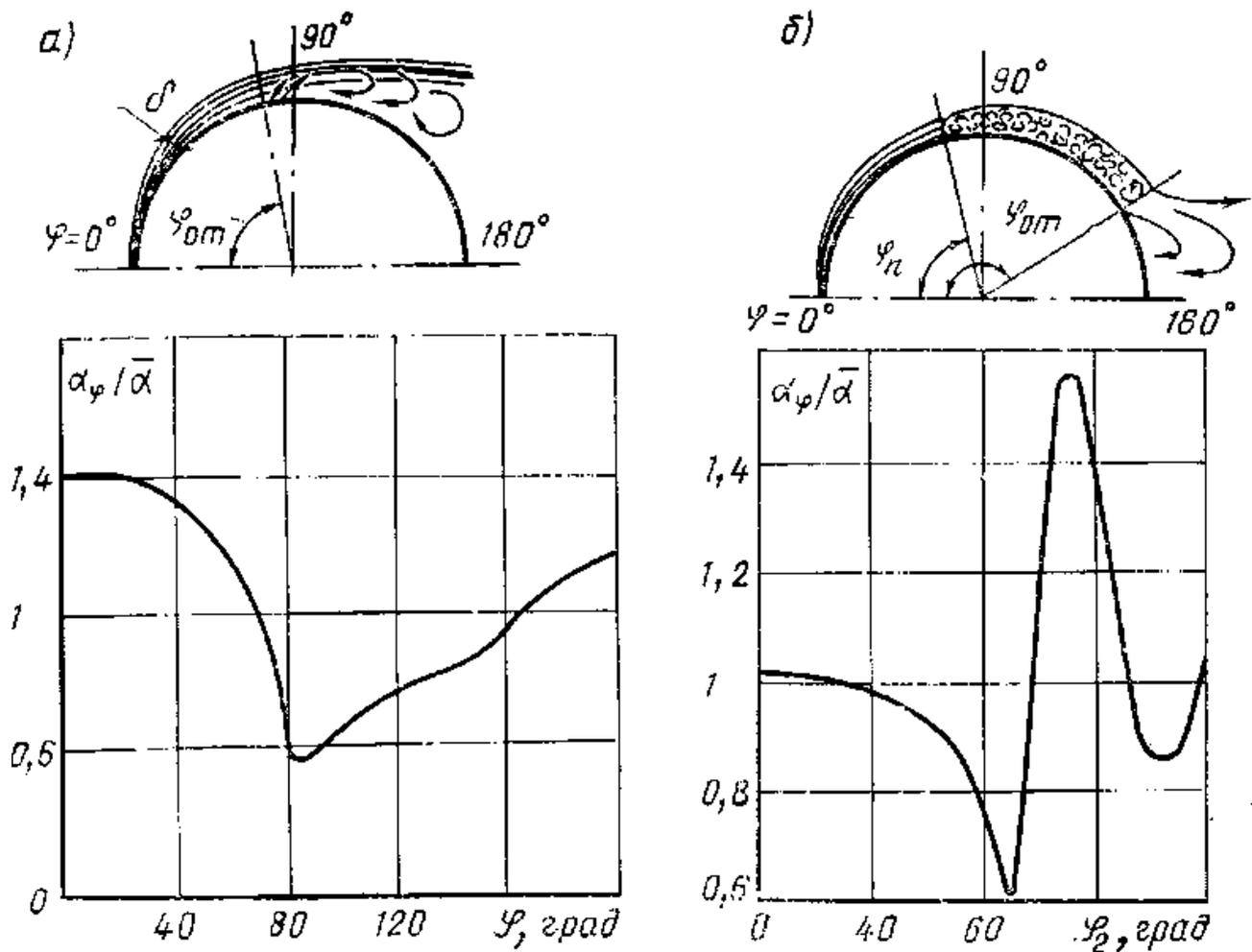


Рис. 3.13 Отрыв ламинарного пограничного слоя

В соответствии с гидродинамической картиной обтекания изменяется и местный коэффициент теплоотдачи вдоль внешнего контура цилиндрической поверхности трубы. Наименьшую толщину ламинарный пограничный слой имеет в лобовой точке при  $\varphi = 0$ , в этом месте коэффициент теплоотдачи имеет максимальное значение. По мере нарастания ламинарного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи уменьшается (см. рис. 3.13, а, где  $\alpha_\varphi$  - местный коэффициент теплоотдачи,  $\bar{\alpha}$  — средний по поверхности трубы коэффициент теплоотдачи). После отрыва ламинарного пограничного слоя теплоотдача возрастает в связи с интенсивным вихреобразованием. Для течения с  $Re > 10^5$  картина более сложная (см. рис. 3.13,б): вначале изменение  $\alpha_\varphi$  происходит так, как и в предыдущем случае, затем в точке перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при  $\varphi = \varphi_n$  происходит резкое возрастание  $\alpha_\varphi$  (турбулент-

ный перенос более интенсивен). При отрыве турбулентного пограничного слоя ( $\varphi = \varphi_{om}$ ) падение  $\alpha_\varphi$  из-за увеличения толщины турбулентного пограничного слоя в области  $\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_{om}$  сменяется резким возрастанием  $\alpha_\varphi$  из-за вихреобразования (см. рис. 3.13,б).

В результате обобщения многочисленных опытных данных была получена следующая расчетная формула для средней теплоотдачи при поперечном обтекании одиночного цилиндра (трубы):

$$\overline{Nu} = C Re^m Pr^n (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25}, \quad (3.105)$$

где  $\overline{Nu} = \overline{\alpha}d / \overline{\lambda}$ ;  $\overline{\alpha}$  — средний по окружности трубы коэффициент теплоотдачи.

Значения констант  $C$ ,  $m$  и  $n$  зависят от числа  $Re$ : если  $5 \leq Re \leq 10^3$ , то  $C = 0,5$ ;  $m = 0,5$ ;  $n = 0,38$ ; если  $10^3 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ , то  $C = 0,25$ ;  $m = 0,6$ ;  $n = 0,38$ ; если  $3 \times 10^5 \leq Re \leq 2 \cdot 10^6$ , то  $C = 0,023$ ;  $m = 0,8$ ;  $n = 0,37$ . В первом режиме  $\overline{\alpha} \sim w^{0,5}$ , в третьем  $\overline{\alpha} \sim w^{0,8}$ , это совпадает с зависимостями для ламинарного и турбулентного режима при течении вдоль пластины и в трубе.

В качестве определяющей берется средняя температура жидкости, скорость потока отнесена к сечению наибольшего сгущения линий тока — узкому сечению.

Теплообменники с трубными пучками широко используются в системах отопления, вентиляции, кондиционирования воздуха, теплоснабжения, в котельных установках. При поперечном обтекании пучков возникают некоторые особенности по сравнению с обтеканием одиночных труб. Эти особенности обусловлены взаимным

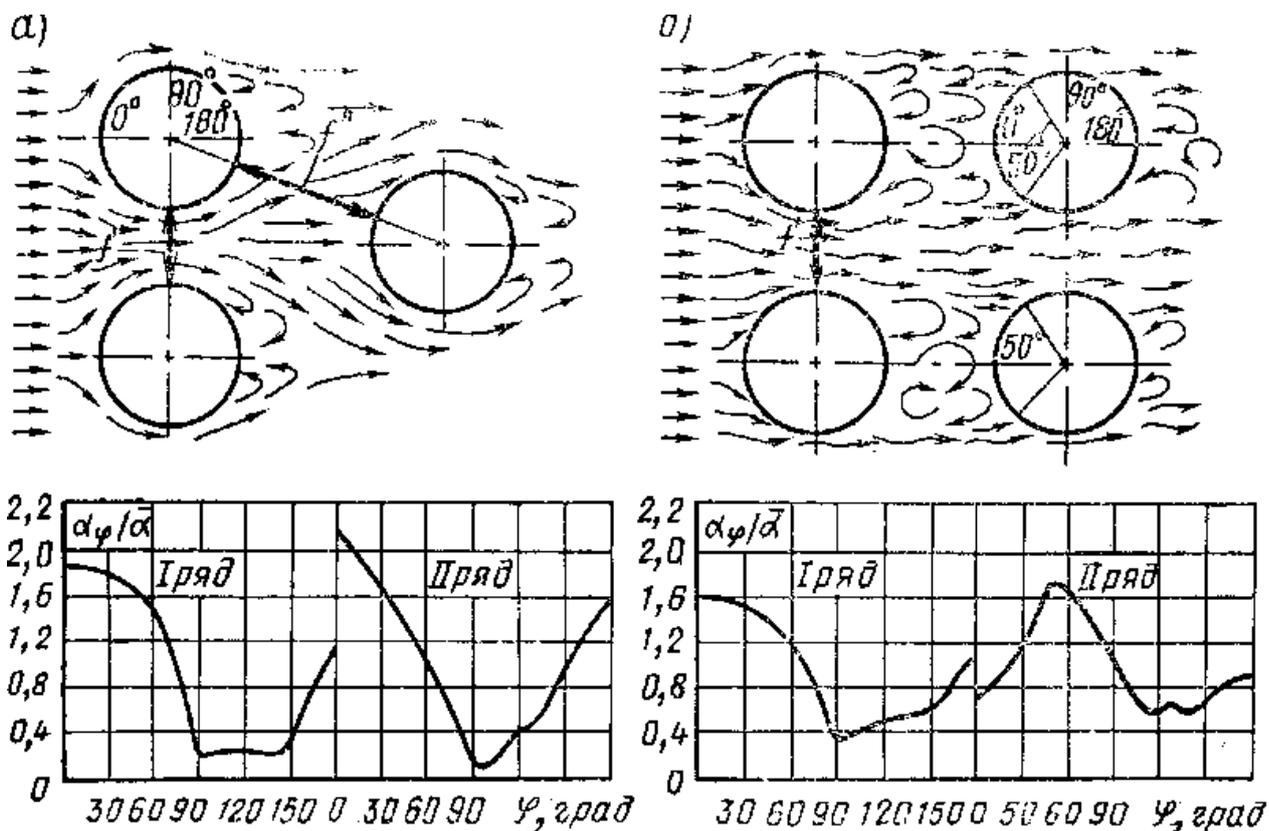


Рис. 3.14 Шахматные и коридорные пучки.

влиянием труб пучка, поток движется как бы в канале, образованном рядами труб.

Чаще всего используются шахматные (рис. 3.14, а) и коридорные (рис. 3.14, б) пучки. Обтекание первого ряда в пучках обоих типов происходит аналогично обтеканию одиночной трубы. Второй ряд шахматного пучка почти не испытывает влияния первого ряда, поэтому зависимость  $\alpha_\varphi = f(\varphi)$  для второго ряда такая же, как и для первого (см. рис. 3.14, а). При обтекании коридорного пучка на трубы второго ряда воздействуют два вихря, оторвавшиеся от трубы первого ряда; в местах удара этих вихрей имеется максимум  $\alpha_\varphi$  на трубе второго ряда (рис. 3.14, б). Начиная с третьего ряда происходит стабилизация теплоотдачи, средний по окружности трубы коэффициент теплоотдачи имеет одно и то же значение для третьего и последующих рядов. Этот коэффициент теплоотдачи можно рассчитать по формуле:

$$\overline{Nu} = C Re^m Pr^{0,33} (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25} \varepsilon_s, \quad (3.106)$$

где число  $Re$  изменяется от  $10^3$  до  $10^5$  (так называемый *смешанный* режим, встречающийся наиболее часто).

Для шахматного пучка  $C = 0,41$ ;  $m = 0,6$ ; при  $s_1/s_2 < 2$  поправка, учитывающая соотношение между поперечным  $s_1$  и продольным  $s_2$  шагами, равна  $\varepsilon_s = (s_1 / s_2)^{1/6}$ ; при  $s_1 / s_2 \geq 2$   $\varepsilon_s = 1,12$ . Для коридорного пучка  $C = 0,26$ ;  $m = 0,65$ ;  $\varepsilon_s = (s_2 / d)^{-0,15}$ .

Определяющей является средняя температура жидкости, скорость рассчитывают по узкому сечению:  $f'$  или  $f''$  — для шахматного пучка,  $f$  — для коридорного (см. рис. 3.14, *а*, *б*).

Если в пучке небольшое число рядов в направлении потока, то отмеченная выше сниженная теплоотдача первых двух рядов должна быть учтена при определении теплового потока пучка в целом. Можно считать, что первый ряд коридорного и шахматного пучков характеризуется теплоотдачей, составляющей 60 % от  $\bar{\alpha}$  третьего ряда. Для второго ряда коридорного пучка теплоотдача составляет 90 %, второго ряда шахматного пучка — 70 % теплоотдачи третьего ряда.

Формула (3.106) получена для случая, когда угол  $\psi$  между направлением потока и осью трубы пучка равен  $90^\circ$ . Если этот угол уменьшить в 2 раза, то теплоотдача снизится примерно на 20%, при  $\psi \approx 10^\circ$  теплоотдача снижается примерно на 60 %.

Согласно формуле (3.106), теплоотдача шахматных пучков выше, чем коридорных, но с увеличением числа  $Re$  это различие уменьшается. Гидравлическое сопротивление пучка зависит от числа  $Re$  и числа рядов по ходу потока; для шахматных пучков оно выше.

## 2.6.9 Теплоотдача при свободном движении жидкости

Гравитационным свободным движением жидкости называют движение (конвекцию) под действием гравитационного поля при неоднородном поле плотности жидкости. Частица жидкости с меньшей плотностью, чем окружающая жидкость, будет испытывать воздействие архимедовой силы и «всплывать». Причиной уменьшения плотности всплывающей частицы жидкости чаще всего является ее нагрев.

Если, например, жидкость с температурой  $t_{ж}$  находится в контакте с вертикальной поверхностью, имеющей более высокую температуру  $t_c$ , то вдоль поверхности возникает течение нагретой жидкости. Это течение направлено вверх и осуществляется в пограничном слое, вне которого жидкость неподвижна

Получим уравнение подобия для теплоотдачи при свободном движении жидкости. Метод подобия используем в упрощенной форме, не проводя детального анализа системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. При этом будем полагать, что движение среды в области динамического пограничного слоя осуществляется под действием двух сил: архимедовой (движущая сила) и силы вязкого трения (сила сопротивления). Силами инерции пренебрегаем.

На жидкую частицу объемом  $V$ , окруженную такой же жидкостью, но с более высокой температурой, действует сила  $g\Delta\rho V$ , где  $\Delta\rho$  — разность плотностей частицы и окружающей жидкости. Указанная сила обусловлена законом Архимеда, согласно которому всякое тело (в данном случае — частица), погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная телом жидкость. Разность плотностей  $\Delta\rho$  обусловлена разностью температур  $\Delta T$  и может быть определена по выражению для коэффициента объемного расширения:

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}. \quad (3.107)$$

Определяя из выражения (3.107)  $\Delta\rho$  и учитывая, что  $V \sim l^3$ , где  $l$  — размер частицы (например, радиус или диаметр), получаем следующую оценку для движущей силы  $F_{\text{дв}}$ :

$$F_{\text{дв}} \sim \rho g \beta \Delta T l^3. \quad (3.108)$$

Оценку для силы вязкого трения  $F_{\text{мп}}$  получаем на основе закона вязкого трения Ньютона:

$$F_{\text{мп}} \sim \mu \frac{\Delta w}{\Delta y} l^2 \sim \mu \frac{w_0}{l} l^2 \sim \mu w_0 l, \quad (3.109)$$

где  $w_0$  — скорость движения частицы;  $l^2$  — площадь ее поверхности.

Безразмерный комплекс (число подобия) получаем, беря отношение сил  $F_{\text{дв}}$  и  $F_{\text{тр}}$  согласно выражениям (3.108) и (3.109):

$$F_{\text{дв}} / F_{\text{мп}} \sim \rho g \beta \Delta T l^3 / \mu w_0 l. \quad (3.110)$$

Выражение (3.110) дает комплекс, учитывающий гидродинамику свободного движения жидкости; при вынужденном движении гидродинамические факторы учитываются числом Re. Необходим также комплекс, учитывающий теплообмен и играющий здесь роль числа Pe. Этот комплекс составим как отношение конвективного теплового потока к тепловому потоку теплопроводности:

$$q_{\text{к}} / q_{\text{мн}} \sim \rho c_p w_0 \Delta T / (\lambda / l) \Delta T. \quad (3.111)$$

В выражениях (3.110) и (3.111) имеется скорость  $w_0$ , которая не является наперед заданной величиной. При расчете теплоотдачи  $w_0$  не является и величиной искомой, это как бы промежуточная величина, которая появляется в ходе расчета, но затем исключается. Напомним, что критерии подобия должны включать только заданные параметры математического описания процесса. Все величины в выражениях (3.110) и (3.111) могут рассматриваться как заданные, кроме скорости  $w_0$ , которую, следовательно, необходимо исключить. Это можно сделать, перемножив выражения (3.110) и (3.111). После перемножения

получим выражение  $\rho^2 g \beta \Delta T l^3 c_p / \mu \lambda$ , которое после умножения числителя и знаменателя на  $l$ , можно представить в виде произведения двух чисел подобия:

$$Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T l^3}{\nu^2} \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (3.112)$$

**Число Грасгофа**  $Gr$ , определяемое первым сомножителем правой части выражения (3.112), отражает соотношение между силами вязкого трения и подъемной силой. Величина  $l$  является характерным размером (высота вертикальной поверхности, диаметр горизонтальной трубы), величина  $\Delta T$  — масштабная разность температур:  $\Delta T = \vartheta_c = t_c - t_{жс}$ . Произведение чисел  $Gr$  и  $Pr$  называют числом Релея:  $Ra = GrPr$ .

В соответствии с проведенным анализом уравнение подобия для теплоотдачи при свободном движении имеет вид:  $Nu = f(GrPr)$ . Это уравнение можно получить также, используя анализ размерностей. Основные положения конвективного теплообмена позволяют заключить, что средний коэффициент теплоотдачи  $\bar{a}$  при свободном движении жидкости вдоль вертикальной поверхности высотой  $l$  зависит от подъемной силы  $g\beta\vartheta_c$ , вязкости  $\mu$ , теплопроводности  $\lambda$  и величины  $\rho c_p$  — объемной теплоемкости, с которой связан конвективный поток  $q_k = \rho c_p w t$ . Следовательно, имеем зависимость:

$$F(\bar{a}, l, g\beta\vartheta_c, \mu, \lambda, \rho c_p) = 0. \quad (3.113)$$

В зависимости (3.113) можно выделить четыре величины, каждая из которых обладает независимой размерностью по отношению к трем остальным:  $l$ , м;  $g\beta\vartheta_c$ , м/с<sup>2</sup>;  $\mu$ , кг/(м·с);  $\bar{a}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К). Видно, что путем комбинации единиц любых трех, величин нельзя получить единицу четвертой. В то же время единицы величин в зависимости (3.113) являются результатом использования четырех основных единиц СИ: м, с, кг, К. Следовательно, согласно П-теореме анализа размерностей из размерных величин зависимости (3.113) можно составить два безразмерных комплекса, причем один из них должен быть искомой величиной и содержать  $\bar{a}$ .

Вместо размерных величин введем приведенные комплексы  $\pi_i$  согласно выражениям:

$$\pi_1 = \bar{a}\tau_0^3\vartheta_0 / m_0; \pi_2 = l / l_0; \pi_3 = g\beta\vartheta_c\tau_0^2 / l_0;$$

$$\pi_4 = \mu l_0\tau_0 / m_0; \pi_5 = \lambda\tau_0^3\vartheta_0 / l_0 m_0; \pi_6 = \rho c_p l_0\tau_0^2\vartheta_0 / m_0.$$

Величины  $l_0, \tau_0, m_0, \vartheta_0$  являются условными масштабами, соответствующими основным единицам м, с, кг, К. Поскольку математические выражения, описывающие процесс, не должны зависеть от значений величин  $l_0, \tau_0, m_0, \vartheta_0$ , последние необходимо исключить при получении безразмерных комплексов. Искомый безразмерный комплекс определяется выражением  $\Pi_1 = \pi_1\pi_2 / \pi_3 = \bar{a}l / \lambda$  и представляет собой, как и следовало ожидать, число Нуссельта. Определяющий безразмерный комплекс попытаемся получить в виде  $\Pi_2 = \pi_3\pi_6\pi_2^3 / \pi_4\pi_5$ , однако оказывается, что из правой части не удастся исключить масштабную величину  $m_0 / l_0^3$ . Это является следствием неверного выбора величин в зависимости (3.113). Действительно, подъемную силу необходимо отнести к единице объема, тогда она равна  $\rho g\beta\vartheta_c$  и  $\pi_3 = \rho g\beta\vartheta_c l_0^2\tau_0^2 / m_0$ , а комплекс  $\Pi_2$  равен:  $\Pi_2 = \pi_3\pi_6 / \pi_4\pi_5 = Gr Pr$ , что совпадает с ранее полученным результатом. Приведенный пример использования анализа размерностей показывает, что его применение требует известного опыта.

Таким образом, расчетная зависимость для среднего коэффициента теплоотдачи а имеет вид:

$$\overline{Nu} = C(Gr Pr)^m (Pr_{жс} / Pr_c)^{0,25}. \quad (3.114)$$

Коэффициенты  $C$  и  $m$  различны для ламинарного и турбулентного участков. Для вертикальной поверхности при ламинарном режиме ( $10^3 < GrPr < 10^9$ ) имеем:  $C = 0,75$ ;  $m = 0,25$ ; при турбулентном режиме ( $GrPr > 6 \cdot 10^{10}$ ) имеем:  $C = 0,15$ ;  $m = 0,33$ . Определяющий размер — длина поверхности по вертикали. Для горизонтального цилиндра при  $10^3 < GrPr < 10^9$  имеем:  $C=0,50$ ;  $m = 0,25$ ; определяющий размер — диаметр. Определяющая температура —  $t_{жс}$ ,

величина  $\beta = (t_{ж}+273)^{-1}$  для газов, что следует из выражения (3.107) и уравнения Клапейрона.

При ламинарном течении жидкости в трубах свободное движение накладывается на вынужденное, что приводит к изменению теплоотдачи. При  $GrPr > 8 \cdot 10^5$  имеет место **вязкостно-гравитационный** ламинарный режим и средний коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности **горизонтальной** трубы определяется выражением

$$\overline{Nu} = 0,8L_i^{-0,4}(GrPr)^{0,1}(\mu_{жс} / \mu_c)^{0,14}. \quad (3.115)$$

Все величины в выражении (3.115) обозначены так же, как и в выражении (3.79), определяющая температура равна  $0,5(\overline{t_{жс}} + t_c)$ , где  $\overline{t_{жс}}$  — средняя температура жидкости в трубе.

### 2.6.10 Теплоотдача при конденсации и кипении

В теплообменных устройствах наиболее распространена *пленочная* конденсация пара, при которой на смачиваемой поверхности твердого тела образуется сплошная пленка конденсата. На несмачиваемой поверхности идет *капельная* конденсация с образованием отдельных капель конденсата; она встречается реже и здесь не рассматривается. Теория теплоотдачи при пленочной конденсации неподвижного пара была разработана Нуссельтом.

Вертикальная поверхность с температурой  $t_c$  находится в контакте с сухим насыщенным паром, имеющим температуру насыщения  $t_n$ . При конденсации на поверхности образуется стекающая вниз ламинарная пленка конденсата, толщина которой  $\delta_{жс}$  увеличивается в направлении оси  $Ox$ . Под действием температурного напора  $\Delta t = t_n - t_c$  в стенку отводится тепловой поток  $q$ , который будем считать неизменным по толщине пленки вдоль оси  $Oy$ . Такое предположение соответствует пренебрежению конвективным переносом теплоты движущейся пленкой и прямолинейному профилю температуры поперек пленки. Для сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от верхней

кромки  $q_x = \lambda \Delta t / \delta_x$ , с другой стороны, по уравнению Ньютона — Рихмана  $q_x = \alpha_x \Delta t$  отсюда получаем

$$\alpha_x = \lambda / \delta_x. \quad (3.116)$$

Выражение (3.116) показывает, что по мере роста толщины пленки конденсата местный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_x$ , зависящий также от теплопроводности конденсата  $\lambda$ , убывает (см. рис. 3.15).

Для пленки шириной 1 м массовый расход конденсата  $G_x$  определяется выражением  $G_x = \rho w_{0x} \delta_x$ , в котором  $w_{0x}$  — средняя скорость в поперечном сечении пленки. Расход  $G_x$  обеспечивается конденсацией пара на площади  $x \cdot 1$  м, на которую поступает пар в количестве  $\bar{q}x/r$ , при этом  $\bar{q}$  — осредненный вдоль  $Ox$  тепловой поток, а  $r$  — теплота фазового перехода. В результате имеем следующее условие баланса массы:

$$\rho w_{0x} \delta_x = \bar{q}x/r = \bar{\alpha} \Delta t x / r = \lambda \Delta t x / \bar{\delta} r. \quad (3.117)$$

В выражении (3.117), кроме толщины пленки  $\delta_x$  неизвестной является скорость  $w_{0x}$ , которая может быть найдена по профилю скорости  $w_x = w_x(y)$ . Профиль скорости можно получить интегрированием уравнений гидродинамики, однако здесь ограничимся приближенной оценкой. Для процесса движения пленки существенны две силы: сила тяжести  $\rho g \delta_x^3$  и сила вязкого трения  $\mu (w_{0x} / \delta_x) \delta_x^2$ , силой инерции можно пренебречь. Приравнявая выражения двух указанных сил, имеем  $w_{0x} \approx \rho g \delta_x^2 / \mu$ . Подставляя это выражение в уравнение (3.117) и пренебрегая различием между  $\delta_x^3 \bar{\delta}$  и  $\delta_x^4$ , имеем

$$\delta_x \approx (\mu \lambda \Delta t x / \rho^2 g r)^{0,25}.$$

Точное решение выражается формулой:

$$\delta_x = (4 \mu \lambda \Delta t x / \rho^2 g r)^{0,25}. \quad (3.118)$$

Подставляя выражение (3.118) в уравнение (3.116), получаем формулу для расчета местного коэффициента теплоотдачи  $\alpha_x$ . Основным интересом представляет средний коэффициент теплоотдачи  $\bar{\alpha}$ , выражение для которого

можно получить неоднократно использовавшимся ранее способом:  $\bar{\alpha} = 1,33a_{x=l}$ , где длина участка осреднения принята равной  $l$ . Используя числа подобия  $Ga = \rho^2 g l^3 / \mu^2$ ,  $K = r / c_p \Delta t$  и  $Pr$ , а также поправку на неизотермичность  $(Pr_H / Pr_c)^{0,25}$ , получаем следующее расчетное выражение для средней теплоотдачи:

$$\bar{Nu} = 0,943(GaK Pr)^{0,25}. \quad (3.119)$$

Все физические свойства конденсата в уравнении (3.119) берутся при температуре  $t_n$ . Число фазового превращения  $K$  отражает соотношение между теплотой фазового превращения и теплотой переохлаждения конденсата  $c_p \Delta t$ .

Формула (3.119) справедлива для ламинарной пленки конденсата, т. е. при  $Re = \rho w_0 \delta / \mu = \bar{\alpha} \Delta t l / r_\mu \leq Re_{кр} \approx 400$ . Расчетные формулы для турбулентной пленки можно найти в более полных курсах теплопередачи.

Формула (3.119) не учитывает волновой характер движения пленки, приводящий к увеличению теплоотдачи; это увеличение можно учесть умножением  $\bar{Nu} = \bar{\alpha} l / \lambda$  на  $Re^{0,04}$ .

Конденсация пара на наружной поверхности горизонтальной трубы отличается от рассмотренного случая тем, что направления силы тяжести и вектора скорости для пленки не совпадают. Расчет средней теплоотдачи можно производить по формуле (3.119), заменив коэффициент на 0,728 и взяв диаметр трубы в качестве определяющего размера.

*Кипение* представляет собой процесс образования пара внутри жидкости, нагретой выше температуры насыщения. Обычно необходимая для кипения теплота поступает в жидкость от поверхности нагрева, температура которой  $t_c > t_n$ . В этом случае на поверхности нагрева идет непрерывно возобновляемое образование паровых пузырей или паровой пленки.

На рис. 3.16 схематично представлена зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  на поверхности нагрева от температурного напора  $\Delta t = t_c > t_n$ . Участок  $AB$  соответствует области свободного движения жидкости, при котором возникновение пузырей возможно, но происходит весьма вяло. Для воды

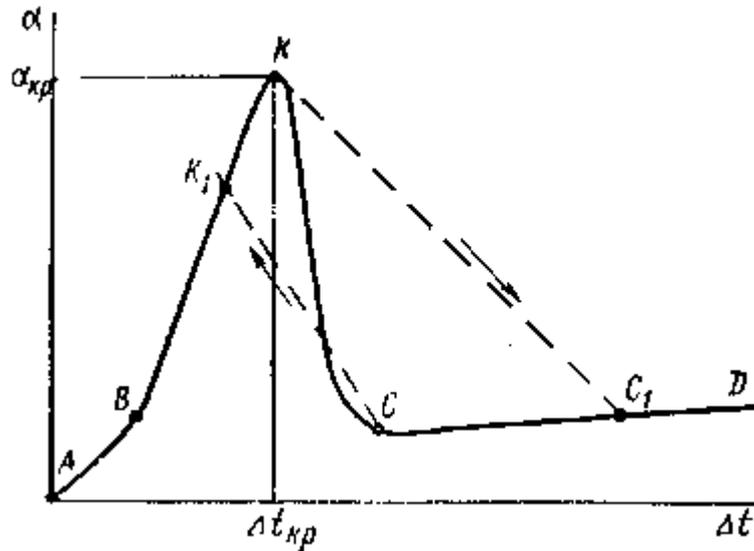


Рис. 3.16 Зависимость коэффициента теплоотдачи

при атмосферном давлении параметры точки  $B$  примерно равны:  $\alpha \approx 1000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\Delta t \approx 5$  К. Участок  $BK$  соответствует развитому *пузырьковому режиму* кипения, при котором интенсивно образующиеся пузыри разрушают вязкий подслой на стенке и обеспечивают высокие значения коэффициента теплоотдачи. Аналогичные приведенным выше параметры точки  $K$  равны:  $\alpha_{kp} = 50000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\Delta t_{kp} = 25$  К- В точке  $K$  интенсивность образования пара становится больше возможной скорости его отвода от поверхности нагрева. Происходит *кризис теплоотдачи при кипении*, сопровождающийся резким ухудшением теплоотдачи (величина  $\alpha$  в точках  $C$ ,  $C_1$  и  $D$  примерно такая же, как в точке  $B$ ). Если тепловой поток на поверхности нагрева при переходе через точку  $K$  не изменяется, то осуществляется скачкообразный переход по линии  $KC_1$  при этом температурный напор возрастает до значения  $10^3$  К и происходит разрушение поверхностей нагрева (например, труб парогенератора в топке). Ухудшение теплоотдачи объясняется возникновением низкотеплопроводной паровой прослойки между поверхностью нагрева и жидкостью, например, при 100 °С теплопроводность водяного пара примерно в 29 раз меньше теплопроводности воды. Участок  $CD$  соответствует *пленочному режиму* кипения, а линия  $CK_1$  — обратному переходу от пленочного режима к пузырьковому. Участку  $KC$

отвечает так называемый переходный режим, при котором на поверхности реализуются в различных местах оба режима.

С практической точки зрения важно организовать кипение в области пузырькового режима с высокими значениями  $a$ , причем так, чтобы не допустить возникновения кризиса.

Теоретический анализ показывает, что пузырьки пара образуются в микроскопических углублениях на поверхности нагрева, которая чаще всего является металлической. Основными факторами, от которых зависит теплоотдача при кипении, являются *критический радиус* пузыря и *частота отрыва* пузырей от поверхности нагрева. Критический радиус  $R_{кр}$  определяется условиями термодинамического равновесия фаз, которые представлены, например, выражениями (2.37) — (2.39). В данном случае необходимо учесть кривизну поверхности пузыря и связанное с этим дополнительное давление  $\Delta p = 2\sigma / R$ , где  $R$  — радиус пузыря, а  $\sigma$  — поверхностное натяжение. Условие (2.39) поэтому примет вид  $p'' = p' + 2\sigma / R_{кр}$ , откуда

$$R_{кр} = 2\sigma / (p'' - p'). \quad (3.120)$$

Внутри пузыря находится насыщенный пар, поэтому  $t'' = t_n(p'')$ . Согласно условию термического равновесия фаз должно быть  $t'' = t'$ , поэтому жидкость вокруг пузыря находится в перегретом состоянии, т. е.  $t' > t_n(p')$ . Отметим, что давление  $p'$  определяется внешними условиями, это — атмосферное давление, давление в парогенераторе и т. п.

Жизнеспособные пузыри возникают только в углублениях с радиусом  $R > R_{кр}$ . В этом случае  $p_{пара} < p''$ , соответственно  $t_{пара} < t''$ , поэтому происходит испарение и рост пузыря. Пузырь, который из-за случайной флуктуации параметров начал образовываться во впадине с  $R < R_{кр}$ , сразу же схлопывается из-за конденсации. Понятно, что чем меньше  $R_{кр}$ , тем больше углублений может служить генераторами пузырей. Из выражения (3.120) видно, что увеличение  $q$ , способствующее перегреву и возрастанию разности  $p'' - p'$ , а

также увеличение  $p'$ , способствующее уменьшению  $a$ , приводят к уменьшению  $R_{кр}$  и, следовательно, к улучшению теплоотдачи. Анализ зависимости для частоты отрыва пузырей показывает, что она возрастает с уменьшением  $ст$ .

В результате обработки опытных данных для воды получена следующая формула, справедливая для давлений  $p_n = 0,1 \div 20$  МПа:

$$\alpha_q = 5,15q^{0,67} p_n^{0,18} / (1 - 0,045p_n). \quad (3.121)$$

Числовые константы в формуле (3.121) являются размерными, поэтому величины в нее необходимо подставлять только в таких единицах:  $p_n$  в МПа,  $q$  в Вт/м<sup>2</sup>, коэффициент теплоотдачи  $a_q$  получится в Вт/(м<sup>2</sup>·К). Давление насыщения  $p_n$  есть давление жидкой фазы, т. е.  $p_n = p'$ , величина  $a_q$  соответствует кипению в большом объеме в условиях свободного движения воды.

Если одновременно с кипением происходит вынужденное движение среды, например, в трубе, то, кроме  $a_q$ , следует рассчитать обычный коэффициент теплоотдачи, который здесь обозначим  $a_w$ . При  $a_q/a_w < 0,5$  принимают  $a = a_w$ , при  $a_q/a_w > 2$  принимают  $a = a_q$ , если же выполняется условие  $0,5 < a_q/a_w < 2$ , то используют формулу  $\alpha = \alpha_w(4\alpha_w + \alpha_q) / (5\alpha_w - \alpha_q)$ .

## 2.7 Теплообменные аппараты

### 2.7.1 Классификация теплообменных аппаратов

*Теплообменными аппаратами (теплообменниками)* называют устройства, предназначенные для передачи теплоты от одной среды к другой при осуществлении различных тепловых процессов (например, нагревания, охлаждения, кипения, конденсации). Жидкие среды, воспринимающие или отдающие теплоту, именуют горячими или холодными теплоносителями.

По принципу действия теплообменные аппараты разделяются на *поверхностные* (рекуперативные и регенеративные), в которых тепловой перенос осуществляется с использованием разделяющих поверхностей и

твердых тел, и *смесительные*, процессы нагревания и охлаждения в которых происходят при непосредственном контакте теплоносителей.

В *рекуперативных* теплообменниках горячий и холодный теплоносители перемещаются одновременно, а теплота непрерывно передается через разделяющую их стенку.

*Регенеративными (регенераторами)* называются теплообменные аппараты, в которых теплоносители попеременно соприкасаются с поверхностью так называемой насадки, аккумулирующей теплоту от горячего теплоносителя и отдающей ее холодному теплоносителю. Таким образом, для регенераторов характерен нестационарный теплообмен.

В зависимости от агрегатного состояния теплоносителей рекуперативные теплообменники классифицируются на газогазовые, газожидкостные, парогазовые, парожидкостные и жидкостножидкостные. В основу классификации рекуперативных теплообменников может быть также положен способ компоновки теплопередающей поверхности или ее конфигурация: теплообменники типа «труба в трубе», кожухотрубчатые, с прямыми трубками, змеевиковые, пластинчатые, ребристые.

По относительному движению потоков теплоносителей теплообменники делят на *прямоточные*, *противоточные* и *со смешанным током*.

В особую группу выделяют теплообменные аппараты с внутренними источниками теплоты, отвод которой осуществляется одним теплоносителем. Примером таких теплообменников могут служить электронагреватели, ядерные реакторы и др.

В связи с широким использованием теплообменников в различных областях техники возросло число их наименований, определяемых спецификой работы этих устройств. Так, встречаются парогенераторы, экономайзеры, воздушные калориферы, конвекторы, холодильники, конденсаторы, градирни, испарители, скрубберы, охладители выпара и т. д. Но несмотря на различное

функциональное назначение этих аппаратов, методика теплового расчета является для них общей.

### 2.7.2 Основы теплового расчета теплообменных аппаратов.

При проектировании новых теплообменных аппаратов необходимо выполнить *конструкторский* тепловой расчет, целью которого является определение площади поверхности теплообмена, обеспечивающей передачу заданного количества теплоты от одного теплоносителя к другому. Для выявления возможности использования имеющихся аппаратов в тех или иных целях производят *поверочный* тепловой расчет, определяя конечные температуры теплоносителей  $t''_2$  и  $t''_x$  и количество переданной теплоты.

Основными расчетными уравнениями, записанными в дифференциальной форме, являются *уравнение теплопередачи* для элемента площади поверхности теплообмена  $dF$ :

$$dQ = k(t_2 - t_x)dF \quad (4.1)$$

и *уравнение теплового баланса*:

$$dQ = M_2 dh_2 = M_x dh_x + dQ_{nom}, \quad (4.2)$$

где  $M_2, M_x$  — массовые расходы горячего и холодного теплоносителей, кг/с;  $h_2, h_x$  — энтальпии теплоносителей, кДж/кг;  $dQ_{nom}$  — потери в окружающую среду, кВт.

В общем случае температуры теплоносителей в теплообменнике изменяются, изменяется и температурный режим.

Удельные изобарные теплоемкости  $c_p$  теплоносителей зависят от температуры. Если использовать среднее значение изобарной теплоемкости в интервале температур от  $t'$  (вход) до  $t''$  (выход) и пренебречь потерями теплоты в окружающую среду  $Q_{noT}$ , то уравнение (4.2) преобразуется так:

$$\begin{aligned} Q &= M_2 (h_2' - h_2'') = M_x (h_x'' - h_x') = M_2 c_{p,2} (t_2' - t_2'') = \\ &= M_x c_{p,x} (t_x'' - t_x'). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Произведение  $Mс_p$  является полной теплоемкостью массового расхода теплоносителя в единицу времени и измеряется в Вт/К. Эта величина часто называется *водяным эквивалентом*.

Уравнение (4.4) при введении в него полных теплоемкостей  $W$  примет вид:

$$Q = W_2(t_2' - t_2'') = W_x(t_x'' - t_x'), \quad (4.5)$$

или

$$W_x / W_2 = (t_2' - t_2'') / (t_x'' - t_x'). \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) может быть записано для элемента площади поверхности теплообмена  $dF : W_x / W_2 = dt_2' / dt_x'$ .

Таким образом, отношение изменения температур теплоносителей обратно пропорционально отношению полных теплоемкостей массовых расходов. На характер изменения температур теплоносителей вдоль поверхности теплообмена, а значит и на температурный напор, значительное влияние оказывает схема движения (рис. 4.1). При прямоточной схеме теплоносители движутся параллельно и в одном направлении (рис. 4.1,а). При параллельном, но противоположном направлении движения теплоносителей схема называется противотоком (рис. 4.1,б). Если теплоносители движутся во взаимно перпендикулярных направлениях, то схема их движения называется перекрестным током (рис. 14.1,в). На практике приходится осуществлять и более сложные схемы движений: многократный перекрестный ток, одновременный прямоток и противоток (рис. 4.1,г) и т. д. При этом один или оба потока могут перемешиваться по своему сечению или же протекать по изолированным каналам.

На рис. 4.2 изображены характерные кривые изменения температуры вдоль поверхности теплообмена  $F$  для прямотока и противотока в зависимости от соотношений полных теплоемкостей  $W_Г$  и  $W_x$ . На графиках, как следует из

уравнения (4.6), меньшее изменение температуры получается для того теплоносителя, у которого полная теплоемкость массового расхода больше.

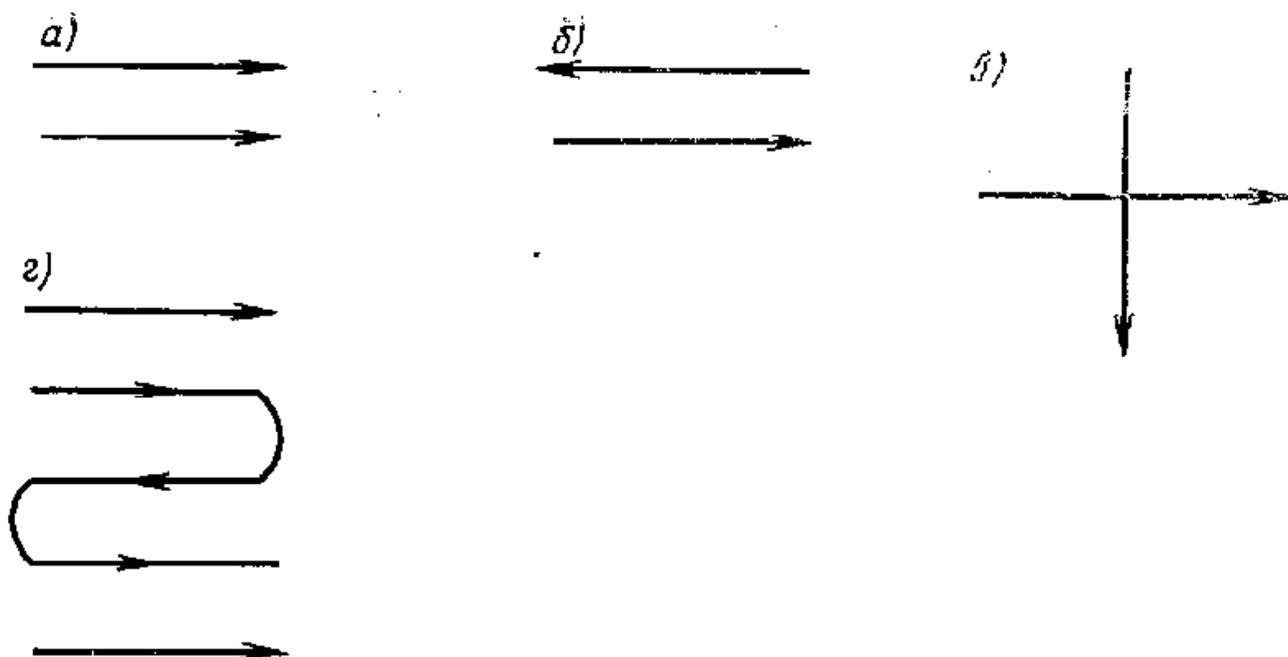


Рис. 4.1 Схемы движения теплоносителей

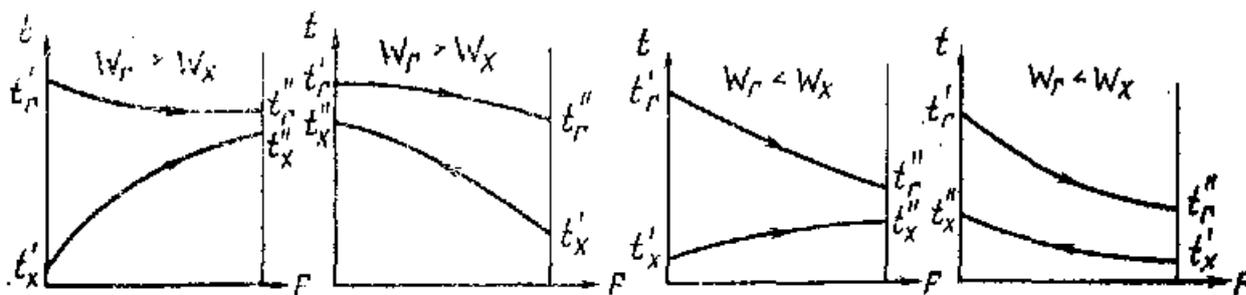


Рис. 4.2 Кривые изменения температуры

В случаях, когда один из теплоносителей имеет постоянную температуру (кипение жидкости или конденсация пара), прямоток и противоток равнозначны и среднее значение температурного напора не зависит от схемы движения потоков.

При передаче теплоты  $dQ$  через элемент площади поверхности  $dF$  температура горячего теплоносителя снижается на величину

$$-dt_2 = dQ/W_2, \quad (4.7a)$$

а холодного возрастает на величину

$$dt_x = dQ/W_x. \quad (4.7б)$$

Так как из уравнения (4.5) следует, что  $W_2 = Q/(t_2' - t_2'')$  и  $W_x = Q/(t_x'' - t_x')$ , то подставляя эти значения в уравнения (4.7a) и (4.7б) и решая их совместно с уравнением (4.1), получаем

$$d(t_2 - t_x)/(t_2 - t_x) = -[(t_2' - t_2'') - (t_x'' - t_x')]kdF/Q. \quad (4.7в)$$

Считая коэффициент теплопередачи  $k$  постоянным вдоль всей поверхности нагрева, интегрируем уравнение (4.7в):

$$\int_{t_2' - t_x''}^{t_2' - t_x'} d(t_2 - t_x)/(t_2 - t_x) = \int_0^F [(t_2' - t_2'') - (t_x'' - t_x')] (k/Q) dF$$

или

$$\ln[(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')] = [(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')] kF/Q \quad (4.7г)$$

и

$$Q = kF[(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')] / \ln[(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')]. \quad (4.8)$$

Если сравнить уравнение (4.8) с уравнением (4.3), то получаем формулу

$$\Delta t_{cp} = [(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')] / \ln[(t_2'' - t_x')/(t_2' - t_x'')]. \quad (4.9)$$

Обычно при расчете теплообменников формула (4.9) используется в виде

$$\Delta t_{cp} = (\Delta t_{\bar{o}} - \Delta t_{\bar{m}}) \varepsilon_{\Delta t} / \ln(\Delta t_{\bar{o}} / \Delta t_{\bar{жс}}), \quad (4.10)$$

где  $\Delta t_{\bar{o}}$  и  $\Delta t_{\bar{m}}$  — наибольшая и наименьшая разности температур для данного теплообменного аппарата.

В формулу (4.10) введена поправка учитывающая снижение среднего температурного напора для теплообменников с перекрестным и смешанным токами по сравнению с теплообменниками с противотоком. Величина  $\varepsilon_{\Delta t}$

зависит от значений вспомогательных характеристик  $P = (t_x'' - t_x') / (t_T' - t_T'')$  и  $R = (t_T' - t_T'') / (t_x'' - t_x')$ .

Рассчитанная по формуле (4.10) средняя разность температур называется *среднелогарифмическим температурным напором* и применяется для различных схем аппаратов при постоянстве массовых расходов теплоносителей.

Вместо среднелогарифмического температурного напора в расчетах может быть использован среднеарифметический напор

$$\Delta t_{cp} = 0,5(\Delta t_{\sigma} + \Delta t_{\mu}),$$

если  $\Delta t_{\sigma} / \Delta t_{\mu} < 1,7$  что обеспечивает погрешность в сторону увеличения  $\Delta t_{cp}$  не более чем на 3 %.

Определение коэффициента теплопередачи  $k$  для теплообменных аппаратов является важным и ответственным моментом расчета. При осреднении величины  $k$  по поверхности теплообмена требуется тщательный учет изменения температур теплоносителей и геометрической конфигурации поверхности теплообмена.

Наиболее распространенными в теплообменниках являются трубные цилиндрические поверхности. Формулы для расчета коэффициента теплопередачи в этом случае несколько громоздки. Если стенка трубы не очень толста ( $d_{нар} / d_{вн} < 1,5$ ), то с достаточной точностью используются формулы, полученные для плоской стенки.

В процессе эксплуатации поверхность нагрева покрывается слоями накипи, сажи, золы и т. д., что создает дополнительные термические сопротивления теплопроводности, уменьшающие тепловой поток от горячего теплоносителя к холодному. Естественно, что при этом возрастает и гидравлическое сопротивление тепло- обменного аппарата.

Если для простоты расчета пренебречь влиянием слоев загрязнений, то полное термическое сопротивление теплопередаче можно записать в

следующем виде: при отнесении теплового потока к единице площади полной поверхности теплообмена  $F_T$  на стороне горячего теплоносителя

$$1/k_2 = 1/\eta_{oz}\alpha_2 + \delta/(F/F_2)\lambda + 1/(F_x/F_2)\eta_{ox}\alpha_x; \quad (4.11a)$$

при отнесении теплового потока к единице площади полной поверхности теплообмена на стороне холодного теплоносителя

$$1/k_2 = 1/\eta_{ox}\alpha_x + \delta/(F/F_x)\lambda + 1/(F_2/F_x)\eta_{oz}\alpha_2, \quad (4.11б)$$

Под площадью полной поверхности подразумевается площадь тепловоспринимающей или теплоотдающей поверхности, омываемая горячим или холодным теплоносителем и включающая в себя площади ребер и любой другой развитой поверхности. Площадь поверхности  $F$  соответствует средней площади основной или так называемой первичной поверхности, которая является базой для устройства на ней ребер, турбулизаторов и т. д., используемых для интенсификации теплоотдачи.

Если дополнительная развитая поверхность отсутствует и теплообменник изготовлен, например, из гладкостенных труб, то  $F = (F_r + F_x)/2$  и в этом случае коэффициенты эффективности полных поверхностей теплообмена  $\eta_{oz}$  и  $\eta_{ox}$  равны 1.

Если же поверхность теплообмена дополнительно развита, например оребрена, то из-за снижения температуры поверхности ребер по сравнению с температурой основной поверхности коэффициент эффективности развитой поверхности снижается.

Эффективность полной поверхности теплообмена можно рассчитать так:

$$\eta_0 = 1 - (F_p/F)(1 - \eta_p),$$

где  $\eta_p$  — эффективность ребра.