Практическое занятие №1

Программная реализация численного решения краевой задачи для ОДУ 2-го порядка на основе МКР.

Методические указания к выполнению практической работы 1.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

Практическая работа 1 связана с пониманием и получением навыка решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей, в умении составления системы конечно-разностных уравнений при разбиении отрезка [0,*l*] на (N-1)-частей с постоянным шагом h=*l*/(N-1).

Используя метод конечных разностей, решение дифференциального уравнения сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_i, *i*=1, 2, … , *N*.

В практической работе решается краевая задача 1.1

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = f(x); \quad x \in (0, \ell), \\ y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases} \Big\} - \textit{краевые} \quad \textit{условия} \qquad (1.1)$$

Решение задачи (1.1) состоит в составлении системы конечно-разностных уравнений при разбиении отрезка [0,*l*] на (N-1)-частей с постоянным шагом h=*l*/(N-1) и нумерацией точек разбиения *i*: *i*=1, 2, … , *N*. Вводим обозначения: x_i – координата *i*-ой точки разбиения, $p_i = p(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Тогда, заменяя в задаче (1.1) для каждой точки разбиения дифференциальное уравнение соответствующим разностным, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_i, *i*=1, 2, … , *N*:

$$\begin{cases} y_1 = g_1, & i = 1, \\ \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i y_i = f_i, & i = 2,3,\ldots,\ N-1, \\ y_N = g_2, & i = N. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Для дальнейшего решения целесообразно привести в системе (1.2) подобные члены и умножить уравнения для внутренних точек на h^2. Запишем полученную систему в матричном виде:

$$A\bar{y} = \bar{b}$$

или в более подробном виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \qquad (1.3)$$

где

$$a_{11} = a_{NN} = 1, \quad a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 1, \quad a_{i,i} = -2 + h^2 p_i, \quad i = 2,3,\ldots,N-1,$$

$$b_1 = g_1 = 0, \quad b_N = g_2 = 0, \quad b_i = h^2 f_i, \quad i = 2,3,\ldots,N-1.$$

Далее решается система линейных алгебраических уравнений.

В практической работе 1 необходимо выполнить:

1. Решить задачу вручную для n точек. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=9.

Условие задачи практической работы 1

Решить краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = f(x); \quad x \in (0, \ell), \\ y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases} - \textit{краевые} \quad \textit{условия}$$

методом конечных разностей.

Для ручного варианта принять $p(x) = -8x, \quad f(x) = 4x^2(x-1) - 1$.

Для компьютерного варианта:

$$p(x) = -\frac{s}{\ell^2 + 4x(\ell - x)},$$

$$f(x) = -c \cdot [2 - p(x) \cdot x \cdot (\ell - x)],$$

$$c = (s + g)/25,$$

$$\ell = 1,$$

g=3, s=12.

1. Решить задачу вручную для n точек. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=9.

Варианты ответов практической работы 1

Для ручного счета ответ:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{32}, \quad y_3 = \frac{1}{8}, \quad y_4 = \frac{3}{32}, \quad y_5 = 0$$

Для компьютерного счета:

```
0.0000   0.0656   0.1125   0.1406   0.1500   0.1406   0.1125   0.0656
0.0000
```

Указание практической работы 1

Ручной счет выполняется для n=5 точек, компьютерный для n=9.

Решением является вектор **y**, который для рассматриваемой задачи, соответствует прогибу балки под приложенной нагрузкой. Направление оси **y** вниз является положительным как для этой задачи, так и для всех последующих, поэтому для этой задачи решение должно быть симметричным относительно центра балки и положительным.

Для компьютерного счета значение прогиба в средней точке должно равняться (g+s)/100.

Полное решение задачи практической работы 1

Решить краевую задачу

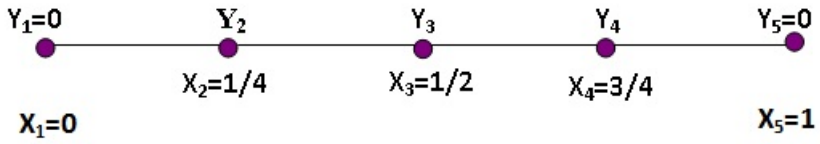
$$\begin{cases} y'' + p(x)y = f(x); \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{aligned} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} - \textit{краевые} \quad \textit{условия} \end{cases} \tag{1.1}$$

методом конечных разностей.

Для $p(x) = -8x, \quad f(x) = 4x^2(x-1) - 1$.

***Ручной счет* (n=5)**

Разбиваем отрезок [0,l] на 4 части: (n=5, h=0.25).



Тогда вычисляем для внутренних точек значения $p_i(x)$ и $f_i(x)$:

$$i = 2, \quad x_2 = 1/4, \quad p_2 = p(1/4) = -2, \quad f_2 = f(1/4) = -19/16,$$

$$i = 3, \quad x_3 = 1/2, \quad p_3 = p(1/2) = -4, \quad f_3 = f(1/2) = -3/2,$$

$$i = 4, \quad x_4 = 3/4, \quad p_4 = p(3/4) = -6, \quad f_4 = f(3/4) = -25/16.$$

Заменяя вторую производную второй разностью, получим систему конечно-разностных уравнений относительно величин y_1, y_2, y_3, y_4, y_5:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ \dfrac{y_1 - 2y_2 + y_3}{0.25^2} - 2y_2 = -19/16, \\ \dfrac{y_2 - 2y_3 + y_4}{0.25^2} - 4y_3 = -3/2, \\ \dfrac{y_3 - 2y_4 + y_5}{0.25^2} - 6y_4 = -25/16, \\ y_5 = 0. \end{cases}$$

Исключая $y_1 = 0$ и $y_5 = 0$ и приводя подобные члены, получим:

$$\begin{cases} -34y_2 + 16y_3 = -19/16, \\ 16y_2 - 36y_3 + 16y_4 = -3/2, \\ 16y_3 - 38y_4 = -25/16. \end{cases}$$

Решаем эту систему **методом Гаусса**.

Строим расширенную матрицу.

Расширенная матрица для нашей системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -34 & 16 & 0 & -19/16 \\ 16 & -36 & 16 & -3/2 \\ 0 & 16 & -38 & -25/16 \end{array}\right]$$

Прямой ход метода Гаусса

1-й шаг: из 2-й строки вычитаем 1-ю, умноженную на (–16/34)=(–8/17):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 16 & 0 & -19/16 \\ 0 & -484/17 & 16 & -35/16 \\ 0 & 16 & -38 & -25/16 \end{array}\right]$$

2-й шаг: из 3-й строки вычитаем 2-ю, умноженную на 16/(–17/484)= =(–68/121):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -34 & 16 & 0 & -19/16 \\ 0 & -484/16 & 16 & -35/17 \\ 0 & 0 & -3510/121 & -5265/1936 \end{array}\right]$$

Обратный ход метода Гаусса

$$y_4 = \left(-\frac{5265}{1936}\right) / \left(-\frac{3510}{121}\right) = \frac{3}{32},$$
$$y_3 = \left(-\frac{35}{17} - 16\frac{3}{32}\right) / \left(-\frac{484}{17}\right) = \frac{1}{8},$$
$$y_2 = \left(-\frac{19}{16} - 16\frac{1}{8}\right) / (-34) = \frac{3}{32}.$$

Ответ: $y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{32}, \quad y_3 = \frac{1}{8}, \quad y_4 = \frac{3}{32}, \quad y_5 = 0$.

Выполнение работы на ЭВМ

Пример М-файла (g=3, s=12):

```
g=input('ввести g=');
s=input('ввести s=');
c=(s+g)/25; dl=1; y0=0; yl=0;
n=9;
A=zeros(n,n);
A(1,1)=1.; A(n,n)=1.;
b=zeros(n,1);
b(1)=y0; b(n)=yl;
h=dl/(n-1);

for i=2:n-1
    A(i,i-1)=1.; A(i,i+1)=1.;
    x=h*(i-1);
```

```
    p= s./(dl^2+4*x.*(dl-x));
    f=-c*(2-p.*x.*(dl-x));
    A(i,i)=-2+h^2*p;
    b(i)=h^2*f;
end

y=A\b;
disp('матрица системы разностных уравнений')
for i=1:n
    fprintf('%8.3f',A(i,:));fprintf('\n')
end
disp('вектор правой части системы разностных уравнений')
fprintf('%8.3f',b);fprintf('\n')
disp('решение y:');fprintf('%12.4f',y);fprintf('\n')
```

Результаты счета (для g=3, s=12):

```
ввести g=3
ввести s=12
матрица системы разностных уравнений

1.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000
1.000 -2.130  1.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000
0.000  1.000 -2.107  1.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000
0.000  0.000  1.000 -2.097  1.000  0.000  0.000  0.000  0.000
0.000  0.000  0.000  1.000 -2.094  1.000  0.000  0.000  0.000
0.000  0.000  0.000  0.000  1.000 -2.097  1.000  0.000  0.000
0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  1.000 -2.107  1.000  0.000
0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  1.000 -2.130  1.000
0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  0.000  1.000

вектор правой части системы разностных уравнений
0.000 -0.027 -0.031 -0.032 -0.033 -0.032 -0.031 -0.027  0.000

решение y:
0.0000   0.0656   0.1125   0.1406   0.1500   0.1406   0.1125   0.0656
0.0000
```

Задания для самостоятельного решения практической работы 1

Решить краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = f(x); \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{краевые} \quad \textit{условия} \end{cases} \tag{1.1}$$

методом конечных разностей.

В практической работе 1 необходимо выполнить:

1. Решить задачу вручную для n точек. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=9.

Исходные данные (варианты заданий)

Принять для ручного и компьютерного способа решения задачи:

$$p(x) = -\frac{s}{\ell^2 + 4x(\ell - x)},$$

$$f(x) = -c \cdot [2 - p(x) \cdot x \cdot (\ell - x)],$$

$$c = (s + g)/25,$$

$$\ell = 1,$$

g – последняя цифра зачетной книжки отличная от нуля (g≠0), **s**– две последние цифры зачетной книжки отличные от нуля (s≠0).

Практическое занятие №2

Программная реализация численного решения задачи устойчивости сжатого стержня на основе МКР.

Методические указания к выполнению практической работы 2.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

В практической работе 2 рассматривается задача устойчивости сжатого стержня и нахождения минимальной критической силы:

$$\begin{cases} -Ry'' = Py, \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{краевые условия}. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Решение задачи (2.1) состоит в составлении системы конечно-разностных уравнений при разбиении отрезка $[0, \ell]$ на $(N+1)$ - частей с постоянным шагом $h = \ell/(N+1)$ и нумерацией точек разбиения *i*: *i*=0, 1, 2, …, *N*, *N*+1. Вводим обозначения: x_i – координата i-ой точки разбиения, $R_i = R(x_i)$. Тогда, заменяя в задаче (2.1) для каждой точки разбиения дифференциальное уравнение соответствующим разностным и учитывая нулевые граничные условия, а также умножая каждое *i*-ое уравнение на (h^2/R_i), получим алгебраическую обобщенную задачу на собственные значения *N*-го порядка:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = P\dfrac{h^2}{R_1} y_1, & i = 1, \\ -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = P\dfrac{h^2}{R_i} y_i, & i = 2, \ldots, N-1, \\ -y_{N-1} + 2y_N = P\dfrac{h^2}{R_N} y_N & i = N. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Система (2.2) может быть представлена в векторно-матричном виде:

$$A\bar{y} = PB\bar{y}, \tag{2.3}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{ii} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\bar{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_i \quad \ldots \quad y_{N-1} \quad y_N]^T, \qquad b_{ii} = h^2 / R_i .$$

В практической работе 2 необходимо выполнить:

1. Решить задачу вручную с применением степенного метода для нахождения минимальной критической силы. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=7.

Условие задачи практической работы 2.

Определить минимальное собственное значение (критическую силу) оператора краевой задачи

$$\begin{cases} -Ry'' = Py, \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{краевые условия}. \end{cases}$$

методом конечных разностей,

где $R=x(l-x) = EJ(x)$ — жесткость балки.

1. Решить задачу вручную для нахождения минимальной критической силы. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=7.

Варианты ответов практической работы 2

Для ручного счета:

$P_{\min} \approx$ **1/0.501≈2,** $\bar{y} \approx (0,\ 0.516,\ 0.683,\ 0.516,\ 0)$.

Для компьютерного счета:

```
Вектор критических сил P

        56.0000
        42.0000
        30.0000
        20.0000
        12.0000
         2.0000
         6.0000
```

Указание практической работы 2

Ручной счет выполняется для n=5 точек, (значение двух точек уже известно из условия краевой задачи), компьютерный счет выполняется для n=7.

Ручной счет, используя степенной метод, позволяет найти одно значение критической силы - минимальное. Программа на MATLAB решает обобщенную проблему собственных чисел оператора краевой задачи, поэтому результатом является все собственные значения, что соответствует для данной задачи вектору критических сил из n значений, и

соответствующие собственные вектора, которые для данной задачи являются формами потери устойчивости.

Для компьютерного счета значение минимальной критической силы должно равняться (g+s). К этому значению должно быть близко решение ручного метода.

Полное решение задачи практической работы 2

Определить минимальное собственное значение (критическую силу) оператора краевой задачи

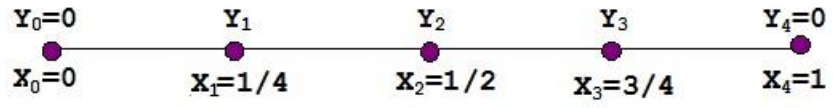
$$\begin{cases} -Ry'' = Py, \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{aligned} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{aligned}\right\} - \textit{краевые условия}. \end{cases}$$

используя метод конечных разностей, где

$R=x(l-x) = EJ(x)$ — жесткость балки.

Ручной счет (*n*=3)

Разбиваем отрезок [0,1] на 4 части: (n=5, h=0.25).



Тогда для внутренних точек имеем следующие зависимости:

$$x_1 = 1/4\,, \quad R_1 = 1/4 \cdot (1-1/4) = 3/16,$$
$$x_2 = 1/2\,, \quad R_2 = 1/2 \cdot (1-1/2) = 1/4,$$
$$x_3 = 3/4, \quad R_3 = 3/4 \cdot (1-3/4) = 3/16.$$

Конечно-разностные уравнения для точек i=1,2,3:

$$\begin{cases} -\frac{3}{16}\cdot\frac{y_2-2y_1}{0.25^2}=Py_1 \\ -\frac{1}{4}\cdot\frac{y_3-2y_2+y_1}{0.25^2}=Py_2 \\ -\frac{3}{16}\cdot\frac{-2y_3+y_2}{0.25^2}=Py_3 \end{cases}$$

После умножения каждого уравнения на соответствующую номеру уравнения величину h^2/R_i система получает более простой вид

$$\begin{cases} 2y_1-y_2=(1/3)Py_1 \\ -y_1+2y_2-y_3=(1/4)Py_2 \\ -y_2+2y_3=(1/3)Py_3 \end{cases}.$$

В матричном виде:

$A\bar{y}=PB\bar{y}$ или $(B^{-1}A)\bar{y}=P\bar{y}$,

где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},\quad \bar{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти $P_{\min}$ – минимальное собственное число матрицы ($B^{-1}A$) и соответствующий ему собственный вектор. Для этой цели можно воспользоваться **степенным методом**.

Примечание. Исходной задаче (как следует из материала курса Информатики) можно поставить в соответствие задачу:

$\tilde{A}\bar{y} = \mu\,\bar{y}$,

где $\tilde{A} = (B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}B$ и $\mu = 1/P$.

Определив степенным методом $\mu_{\max}$, получим $P_{\min} = 1/\mu_{\max}$ и соответствующий собственный вектор.

Обратная матрица к нашей матрице *A* является следующая:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда получаем

$$\tilde{A} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.125 & 0.083 \\ 0.167 & 0.25 & 0.167 \\ 0.083 & 0.125 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Итерационный процесс (степенной метод)

$\bar{v}^{(0)} = (1,1,1)$ – начальное приближение;

<u>k=0:</u> $\mu^{(0)} = \left|v^{(0)}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.732$,

$\bar{w}^{(0)} = \frac{1}{\mu^{(0)}}\bar{v}^{(0)} = (0.577,\ 0.577,\ 0.577)$,

$\bar{v}^{(1)} = \tilde{A}\bar{w}^{(0)} = (0.264,\ 0.336,\ 0.264)$;

<u>k=1:</u> $\mu^{(1)} = \left|v^{(1)}\right| = \sqrt{0.264^2 + 0.336^2 + 0.264^2} = 0.502$,

$\bar{w}^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)}}\bar{v}^{(1)} = (0.526,\ 0.669,\ 0.526)$,

$\bar{v}^{(2)} = \tilde{A}\bar{w}^{(1)} = (0.259,\ 0.343,\ 0.259)$;

<u>k=2:</u> $\mu^{(2)} = \left|v^{(2)}\right| = \sqrt{0.259^2 + 0.343^2 + 0.259^2} = 0.501$,

$$\overline{w}^{(2)} = \frac{1}{\mu^{(2)}}\overline{v}^{(2)} = (0.516,\ 0.683,\ 0.516)$$

.

Ответ: $P_{\min} \approx 1/0.501 \approx 2,\quad \overline{y} \approx (0,\ 0.516,\ 0.683,\ 0.516,\ 0)$.

(Ответ включает следующие из краевых условий нулевые значения для первой и последней компонент вектора $\overline{y}$: $y_0 = y_5 = 0$).

Выполнение задания на ЭВМ (n=7)

```
n=input('Введите число точек разбиения n= ');
dl=1;
h=dl/(n+1);
A=zeros(n,n);
B=zeros(n,n);
Y=zeros(n+2,n);
for i=1:n-1
    A(i,i+1)=-1;
    A(i+1,i)=-1;
end
    for i=1:n
            x=i*h;
            A(i,i)=2.;
            B(i,i)=h^2/((dl-x)*x);
    end
    disp('Матрица A');
    for i=1:n
            fprintf('%6.2f',A(i,:));
            fprintf('\n');
    end
    disp('Матрица B');
    for i=1:n
            fprintf('%6.2f',B(i,:));
            fprintf('\n');
    end


    [T,J]=eig(inv(B)*A);
    P=diag(J);
    Y(2:n+1,1:n)=T(1:n,1:n);
    disp('Матрица форм потери устойчивости Y');
    for i=1:n+2
            fprintf('%6.2f',Y(i,:));
```

```
            fprintf('\n');
    end
    disp(' Вектор критических сил P');
    fprintf('%12.4f \n',P);
```

```
    Введите число точек разбиения n= 7
```

```
Матрица A
   2.00 -1.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
  -1.00  2.00 -1.00  0.00  0.00  0.00  0.00
   0.00 -1.00  2.00 -1.00  0.00  0.00  0.00
   0.00  0.00 -1.00  2.00 -1.00  0.00  0.00
   0.00  0.00  0.00 -1.00  2.00 -1.00  0.00
   0.00  0.00  0.00  0.00 -1.00  2.00 -1.00
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.00 -1.00  2.00
Матрица B
   0.14  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
   0.00  0.08  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
   0.00  0.00  0.07  0.00  0.00  0.00  0.00
   0.00  0.00  0.00  0.06  0.00  0.00  0.00
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.07  0.00  0.00
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.08  0.00
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.14
Матрица форм потери устойчивости Y
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
   0.03  0.11 -0.24 -0.38 -0.47 -0.21 -0.42
  -0.20 -0.44  0.54  0.33 -0.13 -0.36 -0.48
   0.49  0.55 -0.03  0.49  0.34 -0.45 -0.30
  -0.66 -0.00 -0.54  0.00  0.54 -0.48 -0.00
   0.49 -0.55 -0.03 -0.49  0.34 -0.45  0.30
  -0.20  0.44  0.54 -0.33 -0.13 -0.36  0.48
   0.03 -0.11 -0.24  0.38 -0.47 -0.21  0.42
   0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 Вектор критических сил P
     56.0000
     42.0000
     30.0000
     20.0000
     12.0000
      2.0000
```

```
6.0000
```

Задания для самостоятельного решения практической работы 2

Определить минимальное собственное значение (критическую силу) оператора краевой задачи

$$\begin{cases} -Ry'' = Py, \quad x \in (0, \ell), \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{краевые условия}. \end{cases}$$

используя метод конечных разностей.

В практической работе 2 необходимо выполнить:

1. Решить задачу вручную с применением степенного метода для нахождения минимальной критической силы. Количество точек для ручного счета взять 5 (n=5).

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=7.

Исходные данные (варианты заданий)

$R = EJ(x) = \dfrac{s+g}{2} x(\ell - x)$ – жесткость балки,

ℓ =1 – длина балки,

g – последняя цифра зачетной книжки ($g \neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Практическое занятие №3

Программная реализация численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона на основе МКР.

Методические указания к выполнению практической работы 3.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

Практическая работа 3 состоит в решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области (рис.3.1),

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, & \Omega = (0 < x < \ell_1, 0 < y < \ell_2), \\ U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & x = 0 \\ \varphi_2(y), & x = \ell_1 \\ \varphi_3(x), & y = 0 \\ \varphi_4(x), & y = \ell_2, \end{cases} & - \text{краевые условия}, \end{cases} \tag{3.1}$$

используя метод конечных разностей.

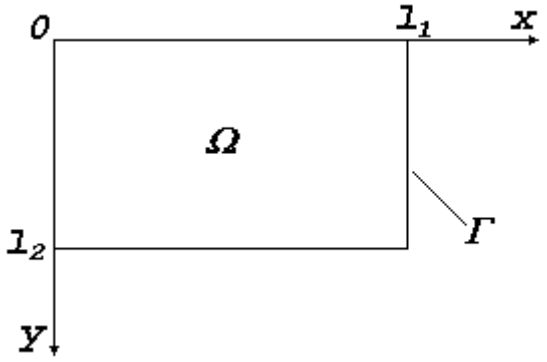


Рис. 3.1 Область задачи Дирихле.

Разобьем исходную прямоугольную область на мелкие прямоугольники с помощью сетки с шагом h_1 по 1- му направлению (x) и с шагом h_2 – по 2-му направлению (y):

$$h_1 = \frac{\ell_1}{n_1}, \quad h_2 = \frac{\ell_2}{n_2},$$

где (n_1+1) и (n_2+1) – число узлов сетки по 1-му и 2-му направлению, соответственно. Задаем начальное приближение $u_{ij}^{(0)}=0$ для внутренних точек и, присвоив заданные значения $u_{ij}=\varphi_{ij}$ для граничных точек, реализуем алгоритм метода Зейделя в виде:

$$u_{i,j}^{(k)}=\left(\frac{u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i+1,j}^{(k-1)}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j-1}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k-1)}}{h_2^2}-f_{i,j}\right)\Big/\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right), \qquad (3.2)$$

$$j=1,\ldots,n_1-1,\ i=1,\ldots,n_2-1,\ k=1,2,\ldots$$

Здесь и в дальнейшем k =1,2,…– номер итерации.

Счет ведется до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$z_k=\begin{cases}\max\limits_{\substack{0<j<n_1\\0<i<n_2}}\left|u_{i,j}^{(k)}-u_{i,j}^{(k-1)}\right|<\varepsilon\ , \text{ для ручногосчета}\\ \sum\limits_{i=1}^{n_2-1}\sum\limits_{j=1}^{n_1-1}\left|u_{i,j}^{(k)}-u_{i,j}^{(k-1)}\right|<\varepsilon\ , \text{ для счета на ЭВМ,}\end{cases}$$

где ε – заданная точность, величина z_k – оценка погрешности на k-м шаге.

В практической работе 3 необходимо:

1. Решить задачу вручную для n1=4, n2=2.

2. Решить задачу в MATLAB для $n1\times n2$ точек. Представить результаты счета для n1=8, n2=6.

Условие задачи практической работы 3.

Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области,

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, & \Omega = (0 < x < \ell_1, 0 < y < \ell_2), \\ U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & x = 0 \\ \varphi_2(y), & x = \ell_1 \\ \varphi_3(x), & y = 0 \\ \varphi_4(x), & y = \ell_2, \end{cases} & - \textit{краевые} \quad \textit{условия.} \end{cases}$$

используя метод конечных разностей.

Исходные данные (варианты заданий)

$F(x,y) = c$, где $c = -8\left(\frac{s}{\ell_1} + \frac{g}{\ell_2}\right)$;

$$U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 4\frac{g}{\ell_2} y(\ell_2 - y), \ (x = 0 \vee x = \ell_1) \wedge 0 \le y \le \ell_2 \\ \varphi_3(x) = \varphi_4(x) = 4\frac{s}{\ell_1} x(\ell_1 - x), \ 0 \le x \le \ell_1 \wedge (y = 0 \vee y = \ell_2) \end{cases};$$

$\ell_1 = \ell_2 = 1$;

Принять: g=10 и s=40.

1. Решить задачу вручную для n1=4, n2=2.

2. Решить задачу в MATLAB для $n1 \times n2$ точек. Представить результаты счета для n1=8, n2=6.

Варианты ответов практической работы 3

Для ручного счета количество точек 4x2

***Ответ*:**

$u_{11} \approx 36.928$, $u_{12} \approx 47.542$, $u_{13} \approx 39.017$

Для компьютерного счета для 8x6

Решение u

0.00	17.50	30.00	37.50	40.00	37.50	30.00	17.50	0.00
5.56	23.06	35.56	43.06	45.56	43.06	35.56	23.06	5.56
8.89	26.39	38.89	46.39	48.89	46.39	38.89	26.39	8.89
10.00	27.50	40.00	47.50	**50.00**	47.50	40.00	27.50	10.00
8.89	26.39	38.89	46.39	48.89	46.39	38.89	26.39	8.89
5.56	23.06	35.56	43.06	45.56	43.06	35.56	23.06	5.56
0.00	17.50	30.00	37.50	40.00	37.50	30.00	17.50	0.00

Указание практической работы 3

Краевые условия заданы симметричные, в вершинах прямоугольной области равны нулю. В середине области для компьютерного счета значение u равно g+s.

Средняя точка при ручном счете должна быть близка по значению к центральной точке при компьютерном счете.

Полное решение задачи практической работы 3

Ручной счет(n_1=4, n_2=2) для $s = 40$, $g = 10$.

Получим вид нужных функций для нашей задачи:

$$f(x,y) = -8(\frac{s}{\ell_1} + \frac{g}{\ell_2}) = -8(10+40) = -400,$$

$$\varphi_1(y) = 4\frac{g}{\ell_2} y(\ell_2 - y) = 40y(1-y),$$

$$\varphi_3(x) = 4\frac{s}{\ell_1} x(\ell_1 - x) = 160\ x(1-x)$$

$h_1 = 1/4 = 0.25$. $h_1 = 1/2 = 0.5$

Вычисление краевых условий оформим в таблице:

$u_{00} = u_{20} =$ $\varphi_3(0) = 0$	$u_{00} = u_{04} =$ $\varphi_1(0)=0$
$u_{01} = u_{21} =$ $\varphi_3(0.25)=4*40*0.25*0.75=30$	$u_{10} = u_{14} =$ $\varphi_1(0.5)=4*10*0.5*0.5=10$
$u_{02} = u_{22} =$ $\varphi_3(0.5)=4*40*0.5*0.5=40$	$u_{20} = u_{24} =$ $\varphi_1(1)=0$
$u_{03} = u_{23} =$ $\varphi_3(0.75)=4*40*0.75*0.25=30$	
$u_{04} = u_{24} =$ $\varphi_3(1)=0$	

Поскольку

$h_1^2 = 0.25^2 = 0.0625$, $1/h_1^2 = 16$,

$h_2^2 = 0.5^2 = 0.25$, $1/h_2^2 = 4$,

$1/h_1^2 + 1/h_2^2 = 16 + 4 = 20$,

итерационная формула метода Зейделя (3.2) приводится к виду:

$$u_{i,j}^{(k)} = \frac{4(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k-1)}) + 16(u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k-1)}) + 400}{40};$$

***k*=0:** $u_{11}^{(0)} = u_{12}^{(0)} = u_{13}^{(0)} = 0$ **– начальные значения;**

Расчетная схема с номерами узлов (i, j) и полученными значениями изображена на рисунке 3.2

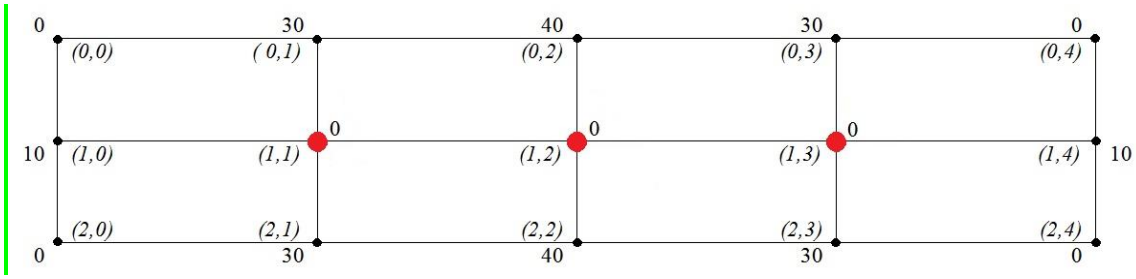


Рис. 3.1 Расчетная схема с начальными значениями для ручного счета.

k=1:

$$u_{11}^{(1)} = \frac{4(u_{01}+u_{21})+16(u_{10}+u_{12}^{(0)})+400}{40} = \frac{4(30+30)+16(10+0)+400}{40} = 20;$$

$$u_{12}^{(1)} = \frac{4(u_{02}+u_{22})+16(u_{11}^{(1)}+u_{13}^{(0)})+400}{40}$$
$$= \frac{4(40+40)+16(20+0)+400}{40} = 26;$$

$$u_{13}^{(1)} = \frac{4(u_{03}+u_{23})+16(u_{12}^{(1)}+u_{14})+400}{40}$$
$$= \frac{4(30+30)+16(26+10)+400}{40} = 30.4$$

k=2:

$$u_{11}^{(2)} = \frac{4(u_{01}+u_{21})+16(u_{10}+u_{12}^{(1)})+400}{40}$$
$$= \frac{4(30+30)+16(10+26)+400}{40} = 30.4;$$

$$u_{12}^{(2)} = \frac{4(u_{02}+u_{22})+16(u_{11}^{(2)}+u_{13}^{(1)})+400}{40}$$
$$= \frac{4(40+40)+16(30.4+30.4)+400}{40} = 42.32;$$

$$u_{13}^{(2)} = \frac{4(u_{03}+u_{23})+16(u_{12}^{(2)}+u_{14})+400}{40}$$
$$= \frac{4(30+30)+16(42.32+10)+400}{40} = 36.928;$$

***k*=3:**

$$u_{11}^{(3)} = \frac{4(u_{01}+u_{21})+16(u_{10}+u_{12}^{(2)})+400}{40}$$
$$= \frac{4(30+30)+16(10+42.34)+400}{40} = 36.928;$$

$$u_{12}^{(3)} = \frac{4(u_{02}+u_{22})+16(u_{11}^{(3)}+u_{13}^{(2)})+400}{40}$$
$$= \frac{4(40+40)+16(36.928+36.928)+400}{40} = 47.542;$$

$$u_{13}^{(3)} = \frac{4(u_{03}+u_{23})+16(u_{12}^{(3)}+u_{14})+400}{40}$$
$$= \frac{4(30+30)+16(47.542+10)+400}{40} = 39.017.$$

Ответ: $u_{11} \approx 36.928,\ u_{12} \approx 47.542,\ u_{13} \approx 39.017$

Последовательные результаты расчетов приведены также на рисунке 3.3 (рядом с номерами узлов (i, j)).

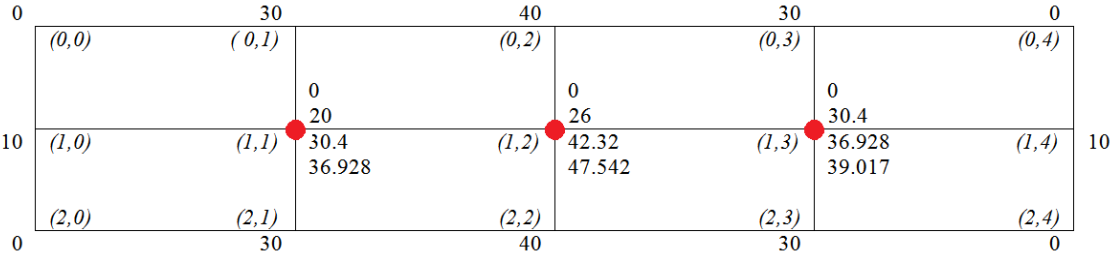


Рис. 3.3 Результаты расчета ручным способом.

Выполнение задания на ЭВМ (n1=8,n2=6).

```
%Задание количеств точек разбиения
n1=input('Введите  n1= ');
n2=input('Введите  n2= ');
%Задание габаритов области
dl1= input('Введите  dl1= ');
```

```
dl2= input('Введите  dl2= ');
g=input('Введите  g= ');
s=input('Введите  s= ');
h1=dl1/n1; h2=dl2/n2;
c=-8*(g/dl1+s/dl2);
%Задание граничных условий
for i=1:n2+1
        y=h2*(i-1);
        for j=1:n1+1
            x=h1*(j-1);
            u(i,j)=0.;
            if(j==1 | j==n1+1)
                u(i,j)=4*g/dl2*y*(dl2-y);
            end
            if (i==1|i==n2+1)
                u(i,j)=4*s/dl1*x*(dl1-x);
            end
        end
end

k=0;
id=0;
while (id==0)
            z=0.;
        for i=2:n2
            for j=2:n1
                r=u(i,j);
u(i,j)=((u(i-1,j)+u(i+1,j))/h2^2+(u(i,j-
1)+u(i,j+1))/h1^2-c)/ ...
                    (2/h1.^2+2/h2.^2);
                z=z+abs(u(i,j)-r);
            end
        end
        k=k+1;
        if (z<0.001 & k<100)
            id=1;
        end
end
fprintf('Количество итераций k=%4d \n',k);
disp('Решение u');
for i=1:n2+1
        fprintf('%6.2f', u(i,:));
        fprintf('\n');
end
```

Решение для g=10 и s=40

```
Введите  n1= 8
Введите  n2= 6
Введите  dl1= 1
Введите  dl2= 1
Введите  g= 10
Введите  s= 40

Количество итераций k=  63
Решение u
   0.00  17.50  30.00  37.50  40.00  37.50  30.00  17.50   0.00
   5.56  23.06  35.56  43.06  45.56  43.06  35.56  23.06   5.56
   8.89  26.39  38.89  46.39  48.89  46.39  38.89  26.39   8.89
  10.00  27.50  40.00  47.50  50.00  47.50  40.00  27.50  10.00
   8.89  26.39  38.89  46.39  48.89  46.39  38.89  26.39   8.89
   5.56  23.06  35.56  43.06  45.56  43.06  35.56  23.06   5.56
   0.00  17.50  30.00  37.50  40.00  37.50  30.00  17.50   0.00
```

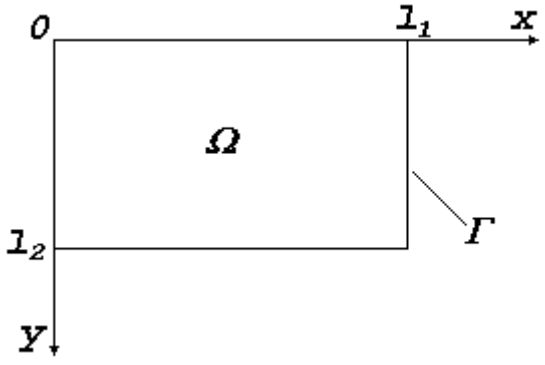
Задания для самостоятельного решения практической работы 3

Задание.

Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области,

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, & \Omega = (0 < x < \ell_1,\ 0 < y < \ell_2), \\ U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & x = 0 \\ \varphi_2(y), & x = \ell_1 \\ \varphi_3(x), & y = 0 \\ \varphi_4(x), & y = \ell_2, \end{cases} & - \textit{краевые условия.} \end{cases}$$

используя метод конечных разностей



В практической работе 3 необходимо:

1. Решить задачу вручную для n1=4, n2=2.

2. Решить задачу в MATLAB для $n1 \times n2$ точек. Представить результаты счета для n1=8, n2=6.

Исходные данные (варианты заданий)

$F(x,y)=c$, где $c=-8\left(\frac{s}{\ell_1}+\frac{g}{\ell_2}\right)$;

$$U_\Gamma=\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi_1(y)=\varphi_2(y)=4\frac{g}{\ell_2}y(\ell_2-y),\ (x=0\vee x=\ell_1)\wedge 0\le y\le \ell_2\\ \varphi_3(x)=\varphi_4(x)=4\frac{s}{\ell_1}x(\ell_1-x),\ 0\le x\le \ell_1\wedge (y=0\vee y=\ell_2)\end{cases};$$

$\ell_1=\ell_2=1$;

g– последняя цифра зачетной книжки ($g\neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Практическое занятие №4

Программная реализация численного решения задачи Коши (метод Эйлера) о поперечном изгибе консольной балки.

Методические указания к выполнению практической работы 4.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

Практическая работа 4 состоит в определении прогиба консоли от приложенной нагрузки (решение задачи Коши):

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{M(x)}{EJ(x)}\sqrt{[1+(y'(x))^2]^3}, \quad x > 0, \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{начальные} \quad \textit{условия}, \end{cases} \tag{4.1}$$

Заданный таким образом момент $M(x)$ соответствует следующим физическим воздействиям (в соответствии с рис. 4.1):

$$m = \frac{1}{\sqrt{b^3(1)}}, \quad P = -\frac{3c}{\sqrt{b^5(1)}}, \quad q(x) = \frac{3c}{\sqrt{b^7(1)}}(b(1) - \frac{5}{2}x), \quad b(x) = 1 + (cx)^2$$

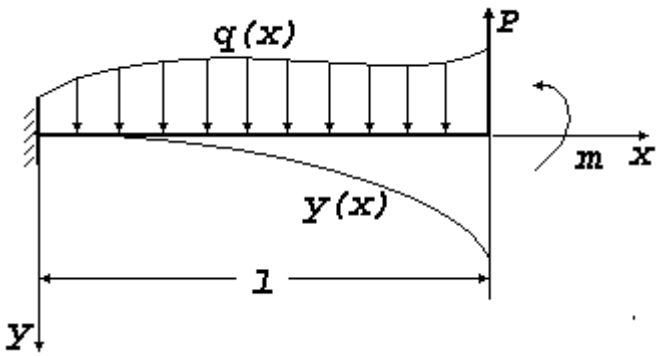


Рис.4.1

Сводим исходную задачу (4.1) к первому порядку (см. конспект лекций). Получим систему двух уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ y'(x) = z(x) \end{cases}, \quad x > 0 \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{начальные} \quad \textit{условия}, \end{cases} \tag{4.2}$$

где

$$f(x,z) = \frac{M(x)}{EJ(x)}\sqrt{(1+z^2(x))^3}.$$

Для определения z_i воспользуемся обычной формулой Эйлера, а для определения y_i будет естественным использовать уточненную формулу, т.е.

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ z_0 = 0, \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f(x_i, z_i) \quad , \quad i = 0,1,\ldots,N-1 \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2} \cdot (z_i + z_{i+1}). \end{cases} \tag{4.3}$$

.

В практической работе 4 необходимо выполнить:

1. Решить задачу вручную для n=4.

2. Решить задачу в MATLAB для n точек. Представить результаты счета для n=10.

Условие задачи практической работы 4

Определить прогиб консоли (решить задачу Коши)

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{M(x)}{EJ(x)}\sqrt{[1+(y'(x))^2]^3}, \quad x > 0, \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{начальные условия}, \end{cases}$$

$M(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[1+(cx)^2]^3}}$ – изгибающие моменты в балке;

$EJ = c^{-1}$ – жесткость балки; c=0.3– числовой параметр

Принять для расчета на ЭВМ число точек $n = 10$, для ручного счета – $n = 4$.

Варианты ответов практической работы 4

Ручной счет:

прогиб y=[**0 0.009375 0.0375 0.0843 0.15]**

Компьютерный счет:

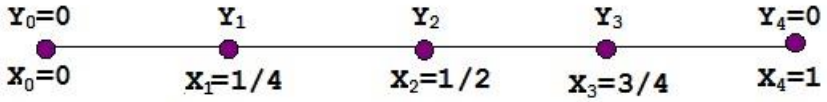
x	y	z
0	0	0
0.1000	0.0015	0.0300
0.2000	0.0060	0.0600
0.3000	0.0135	0.0900
0.4000	0.0240	0.1200
0.5000	0.0375	0.1500
0.6000	0.0540	0.1800
0.7000	0.0735	0.2100
0.8000	0.0960	0.2400
0.9000	0.1215	0.2700
1.0000	**0.1500**	0.3000

Указание практической работы 4

Значение прогиба при компьютерном и ручном способе в точке x=1 равен g+s.

Полное решение задачи практической работы 4

Пусть c=0.3. Разбиваем отрезок (0,1) на 4 части: n=4, h=0.25.



При этом EJ=1/0.3, $M(x)=(1+(0.3x)^2)^{-1.5}$, $f(x,z)=0.3M(x)(1+z^2)^{1.5}$.

Затем, используя приведенные выше формулы модифицированного метода Эйлера (4.3), получим

i=0:

$x_0=0$, $z_0=0$, $y_0=0$,

$M_0=(1+(0.3*0)^2)^{-1.5}=1$, $f_0=0.3*1*(1+0^2)^{1.5}=0.3$;

i=1:

$x_1=0.25$, $z_1=0+0.25*0.3=0.075$, $y_1=0+0.125(0+0.075)=0.009375$,

$M_1=(1+(0.3*0.25)^2)^{-1.5}=0.991$, $f_1=0.3*0.991*(1+0.075^2)^{1.5}=0.3$;

i=2:

$x_2=0.5$, $z_2=0.75+0.25*0.3=0.15$, $y_2=0.009375+0.125(0.075+0.15)=0.0375$,

$M_2=(1+(0.3*0.5)^2)^{-1.5}=0.967$, $f_2=0.3*0.967*(1+0.15^2)^{1.5}=0.3001$;

i=3:

$x_3=0.75$, $z_3=0.15+0.25*0.3001=0.225$,
$y_3=0.0375+0.125(0.15+0.225)=0.0843$,

$M_3=(1+(0.3*0.75)^2)^{-1.5}=0.9285$, $f_3=0.3*0.9285*(1+0.225^2)^{1.5}=0.299$;

i=4:

$x_4=1$, $z_4=0.225+0.25*0.299=0.3$, $y_4=0.0843+0.125(0.225+0.3)=0.15$.

Ответ: прогиб y=[**0 0.009375 0.0375 0.0843 0.15]**

Выполнение задания на ЭВМ

Пример соответствующей М-функции (ниже задано $g=3,\ s=12$):

```
function consol
dl=input('введите dl=');
N=input('введите N=');
x0=input('введите x0=');
y0=input('введите y0=');
z0=input('введите z0=');
dl,N,x0,y0,z0
h=dl/N
c=0.3;
disp('       x          y          z');
d=zeros(N+1,3); d1=zeros(N+1,1);
d2=zeros(N+1,1); d3=zeros(N+1,1);
for i=1:N+1
  d1(i)=x0;
  d2(i)=y0;
  d3(i)=z0;
  z=z0+h*f(x0,z0,c);
  y=y0+h*(z0+z)/2;
  x0=x0+h;
  z0=z;
  y0=y;
end
d=[d1 d2 d3];
disp(d);

function y=f(x,z,c)
y=c*M(x,c)*sqrt((1+z^2)^3);

function u=M(x,c)
u=1/sqrt((1+(c*x)^2)^3);
```

Результаты расчета:

```
введите dl  1
введите N  10
введите x0  0
введите y0  0
введите z0  0
```

```
dl =
     1

N =
    10

x0 =
     0

y0 =
     0

z0 =
     0

h =
    0.1000
```

x	y	z
0	0	0
0.1000	0.0015	0.0300
0.2000	0.0060	0.0600
0.3000	0.0135	0.0900
0.4000	0.0240	0.1200
0.5000	0.0375	0.1500
0.6000	0.0540	0.1800
0.7000	0.0735	0.2100
0.8000	0.0960	0.2400
0.9000	0.1215	0.2700
1.0000	0.1500	0.3000

Задания для самостоятельного решения практической работы 4

Задание. Определить прогиб консоли (решить задачу Коши) методом Эйлера.

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{M(x)}{EJ(x)}\sqrt{[1+(y'(x))^2]^3}, \quad x > 0 \\ \left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}\right\} - \textit{начальные} \quad \textit{условия} \end{cases}$$

Исходные данные (варианты заданий)

$M(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[1+(cx)^2]^3}}$ – изгибающие моменты в балке;

$EJ = c^{-1}$ – жесткость балки; $c = 0.02(g+s)$ – числовой параметр,

$\ell = 1$ – длина балки;

g– последняя цифра зачетной книжки ($g \neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Принять для расчета на ЭВМ число точек $n = 10$, для ручного счета – $n = 4$.

Практическое занятие №5

Программная реализация численного решения задачи нестационарной теплопроводности на основе МКР.

Методические указания к выполнению практической работы 5.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

В практической работе 5 необходимо определить распределение температуры по толщине стены методом конечных разностей по **явной схеме** задачи 5.1 для заданного промежутка времени.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad - \textit{уравнение теплопроводности}, \\ 0 < x < \ell \ , \quad t > 0 \quad - \textit{пространственно} - \textit{временная область}, \\ \left.\begin{matrix} u(0,t) = \varphi_0(t) \\ u(\ell,t) = \varphi_\ell(t) \end{matrix}\right\}, \quad t \geq 0 \quad - \quad \textit{краевые условия}, \\ u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad - \quad \textit{начальные условия}, \end{cases} \tag{5.1}$$

где

$f(x,t) = 0$ – функция источника тепла,

$\alpha = 1$ – коэффициент температуропроводности,

$\begin{cases} \varphi_0(t) = g \\ \varphi_\ell(t) = s \end{cases}$ – краевые условия,

$\psi(x) = g + (g + 3s)x - 2(g + s)x^2$ – начальные условия,

$\ell = 1$ – толщина стены.

Разбиваем отрезок $(0, \ell)$ на n-частей. Шаг по пространственной координате x задаем одинаковым по всему отрезку, т.е. $h = \ell / n$. Для обеспечения устойчивости счета шаг по времени задаем равным $\tau = h^2 / 2a$. Тогда явная схема с учетом исходных данных примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} = \alpha \dfrac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k, & i = 1,\ldots,n-1 \\ & k = 0,1,\ldots \\ u_0^k = \varphi_0^k \\ u_n^k = \varphi_\ell^k \end{cases}, \quad k = 0,1,\ldots - \textit{краевые} \quad \textit{условия}$$

$$u_i^o = \psi_i, \quad i = 0,1,\ldots,n - \textit{начальные} \quad \textit{условия}$$

начальные значения температуры в точке x_i $(t_0 = 0)$:

$$u_i^0 = g + (g+3s)x_i - 2(g+s)x_i^2 \ , \quad 0 \le i \le n \ ;$$

значения температуры в точке x_i в момент времени t_{k+1} $(k \ge 0)$:

$u_i^{k+1} = \dfrac{u_{i-1}^k + u_{i+1}^k}{2}$, $0 < i < n$ – для внутренних точек,

$u_0^{k+1} = g$, $u_n^{k+1} = s$ – для граничных точек.

В практической работе 5 необходимо:

1. Решить задачу вручную, приняв для ручного счета n=4, k=0,1,2.

2. Решить задачу на компьютере для n=8, k=100. Распечатать результаты при k=0,1,10,20,30,…,90, 100.

Условие задачи практической работы 5

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad - \textit{уравнение} \quad \textit{теплопроводности}, \\ 0 < x < \ell \ , \quad t > 0 \quad - \textit{пространственно} - \textit{временная} \quad \textit{область}, \\ u(0,t) = \varphi_0(t) \\ u(\ell,t) = \varphi_\ell(t), \quad t \ge 0 \end{cases} \quad - \quad \textit{краевые} \quad \textit{условия}, \\ u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell \quad - \quad \textit{начальные} \quad \textit{условия}.$$

где

$f(x,t) = 0$ – функция источника тепла,

$\alpha = 1$ – коэффициент температуропроводности,

$\begin{cases}\varphi_0(t) = g \\ \varphi_\ell(t) = s\end{cases}$ – краевые условия,

$\psi(x) = g + (g+3s)x - 2(g+s)x^2$ – начальные условия,

$\ell = 1$ – толщина стены.

g**=3,** $s = 12$**.**

1.Решить задачу вручную, приняв для ручного счета n=4, k=0,1,2.

2. Решить задачу на компьютере для n=8, k=100. Распечатать результаты при k=0,1,10,20,30,…,90, 100.

Варианты ответов практической работы 5

Для ручного счета

k	t	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0	0	3	10.88	15	15.38	12
1	1/32	3	9.00	13.13	13.5	12
2	2/32	3	8.06	11.25	12.57	12
3	…	…	…	…	…	…

Для компьютерного счета:

Массив значений температуры в точках табуляции Uprn

```
 3.00   7.41  10.88  13.41  15.00  15.66  15.38  14.16  12.00
 3.00   6.94  10.41  12.94  14.53  15.19  14.91  13.69  12.00
 3.00   5.47   7.73   9.62  11.00  11.87  12.23  12.22  12.00
 3.00   4.73   6.37   7.85   9.09  10.10  10.87  11.48  12.00
 3.00   4.40   5.76   7.04   8.22   9.29  10.26  11.15  12.00
 3.00   4.25   5.48   6.68   7.83   8.93   9.98  11.00  12.00
 3.00   4.18   5.35   6.51   7.65   8.76   9.85  10.93  12.00
 3.00   4.15   5.30   6.44   7.57   8.69   9.80  10.90  12.00
 3.00   4.14   5.27   6.40   7.53   8.65   9.77  10.89  12.00
 3.00   4.13   5.26   6.39   7.51   8.64   9.76  10.88  12.00
 3.00   4.13   5.25   6.38   7.51   8.63   9.75  10.88  12.00
 3.00   4.13   5.25   6.38   7.50   8.63   9.75  10.88  12.00
```

Указание практической работы 5

Обратите внимание, что граничные условия температур постоянны и равны соответственно g и s.

Для компьютерного счета проверочным значением также является средняя точка по ширине стены, температура в которой должна равняться при k=100 (g+s)/2.

Полное решение задачи практической работы 5

Пусть g=3, $s=12$. При $n=4$ $h=1/4=0.25$. Тогда $\tau=h^2/2a=1/32$.

Начальные значения: $u_i^0=3+39x_i-30x_i^2$, $x_i=i/4$, $i=0,1,2,3,4$.

Граничные значения: $u_0^{k+1}=3$, $u_4^{k+1}=12$, $k=0,1,2,\ldots$

Для внутренних точек: $u_i^{k+1}=0.5(u_{i+1}^k+u_{i-1}^k)$, $i=1,2,3$, $k=0,1,2,\ldots$

Результаты счета представлены в таблице

k	t	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0	0	3	10.88	15	15.38	12
1	1/32	3	9.00	13.13	13.5	12
2	2/32	3	8.06	11.25	12.57	12
3	…	…	…	…	…	…

Выполнение задачи на ЭВМ

Текст М-файла:

```
clear
n=input('введите n=');
g= input('введите g=');
s= input('введите s=');
a=1.; h=1./n; tau=h^2/(2*a);
b=tau*a/h^2;
for i=1:n+1
    x=(i-1)*h;
%Задание распределение температуры при t=0
    u0(i)=g+(g+3*s)*x-2*(g+s)*x^2;
end
u1(1)=u0(1); u1(n+1)=u0(n+1);
```

```
kprn=0;
for k=1:101
    t=(k-1)*tau;
    if (mod(k-1,10)==0 | (k-1)==1)
        kprn= kprn+1;
%формирование массива моментов времени, в которых
% происходит выдача результатов

        Tprn(kprn)=t;
% формирование массива температур по толщине стены
% в моментах времени, в которых происходит выдача
% результатов
        for i=1:n+1
            Uprn(kprn,i)=u0(i);
        end
    end
    for i=2:n
        u1(i)=u0(i)+b*(u0(i-1)-2*u0(i)+u0(i+1));

    end
    for i=2:n
        u0(i)=u1(i);
    end
end
% Выдача результатов
disp('Массив координат точек табуляции времени Tprn');
fprintf('%8.4f \n',Tprn);

disp('Массив значений температуры в точках табуляции
Uprn');

for k=1:kprn
    fprintf('%6.2f',Uprn(k,:));
    fprintf('\n')
end
```

Результаты расчета для g=3,s=12:

```
введите n= 8
введите g= 3
введите s=12
Массив координат точек табуляции времени Tprn
0.0000
0.0078
0.0781
0.1563
0.2344
```

```
0.3125
0.3906
0.4688
0.5469
0.6250
0.7031
0.7813
```

Массив значений температуры в точках табуляции Uprn

3.00	7.41	10.88	13.41	15.00	15.66	15.38	14.16	12.00
3.00	6.94	10.41	12.94	14.53	15.19	14.91	13.69	12.00
3.00	5.47	7.73	9.62	11.00	11.87	12.23	12.22	12.00
3.00	4.73	6.37	7.85	9.09	10.10	10.87	11.48	12.00
3.00	4.40	5.76	7.04	8.22	9.29	10.26	11.15	12.00
3.00	4.25	5.48	6.68	7.83	8.93	9.98	11.00	12.00
3.00	4.18	5.35	6.51	7.65	8.76	9.85	10.93	12.00
3.00	4.15	5.30	6.44	7.57	8.69	9.80	10.90	12.00
3.00	4.14	5.27	6.40	7.53	8.65	9.77	10.89	12.00
3.00	4.13	5.26	6.39	7.51	8.64	9.76	10.88	12.00
3.00	4.13	5.25	6.38	7.51	8.63	9.75	10.88	12.00
3.00	4.13	5.25	6.38	7.50	8.63	9.75	10.88	12.00

Задания для самостоятельного решения практической работы 5

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad - \textit{уравнение теплопроводности}, \\ 0 < x < \ell \ , \quad t > 0 \quad - \textit{пространственно} - \textit{временная область}, \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = \varphi_0(t) \\ u(\ell,t) = \varphi_\ell(t) \end{array}\right., \quad t \geq 0 \Bigg\} \quad - \quad \textit{краевые условия}, \\ u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad - \quad \textit{начальные условия}. \end{cases}$$

методом конечных разностей по **явной схеме**.

В практической работе 5 необходимо:

1. Решить задачу вручную, приняв для ручного счета n=4, k=0,1,2.

2. Решить задачу на компьютере для n=8, k=100. Распечатать результаты при k=0,1,10,20,30,…,90, 100.

Исходные данные (варианты заданий)

$f(x,t)=0$ – функция источника тепла,

$\alpha=1$ – коэффициент температуропроводности,

$\begin{cases}\varphi_0(t)=g\\ \varphi_\ell(t)=s\end{cases}$ – краевые условия,

$\psi(x)=g+(g+3s)x-2(g+s)x^2$ – начальные условия,

$\ell=1$ – толщина стены.

g– последняя цифра зачетной книжки ($g\neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Практическое занятие №6

Программная реализация численного решения задачи линейного программирования.

Методические указания к выполнению практической работы 6.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

Практическая работа 6 посвящена решению задачи линейного программирования.

Необходимо найти точку максимума функции цели z:

$$z(x_1, x_2) = sx_1 + gx_2$$

при заданных ограничениях $\begin{cases} -x_1/g - x_2/s + 0.25 \le 0 \\ -sx_1 + 2gx_2 - gs \le 0 \\ 2sx_1 - gx_2 - gs \le 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$,

Задачу необходимо решить

1. вручную геометрическим методом в соответствии с примером в теоретической части.
2. на компьютере с помощью системы MATLAB.

Для компьютерного счета

Представим задачу в матричной формулировке, т.е.

найти

$$\max z = (\bar{c}, \bar{x})$$

при ограничениях

$$A\bar{x} \le \bar{b}$$

и дополнительном условии

$$\bar{x} \ge 0,$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1/g & -1/s \\ -s & 2g \\ 2s & -g \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ gs \\ gs \end{pmatrix}.$$

Условие задачи практической работы 6

Необходимо найти точку максимума функции цели z**:**

$$z(x_1, x_2) = sx_1 + gx_2$$

при заданных ограничениях $\begin{cases} -x_1/g - x_2/s + 0.25 \le 0 \\ -sx_1 + 2gx_2 - gs \le 0 \\ 2sx_1 - gx_2 - gs \le 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$,

Для $g = 12$, $s = 3$.

Варианты ответов практической работы 6

Ответ: x_1=12, x_2=3, $z_{\max} = z(12,3) = 3 \cdot 12 + 12 \cdot 3 = 72$.

Указание практической работы 6

Для ручного счета воспользуйтесь геометрическим методом.

Для компьютерного счета используйте функцию MATLAB **linprog.** Результаты компьютерного и ручного способа решения должны совпасть

Полное решение задачи практической работы 6

Ручной счет

Для решения воспользуемся **геометрическим методом**. Для $g = 12$, $s = 3$. Тогда условия задачи принимают следующий вид:

функция цели: $z(x_1, x_2) = 3x_1 + 12x_2$, ограничения: $\begin{cases} -x_1/12 - x_2/3 + 0.25 \le 0 \\ -3x_1 + 24x_2 - 36 \le 0 \\ 6x_1 - 12x_2 - 36 \le 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Строим многоугольник ограничений Ω (допустимую область значений x_1 и x_2) прямую $z = 0$.

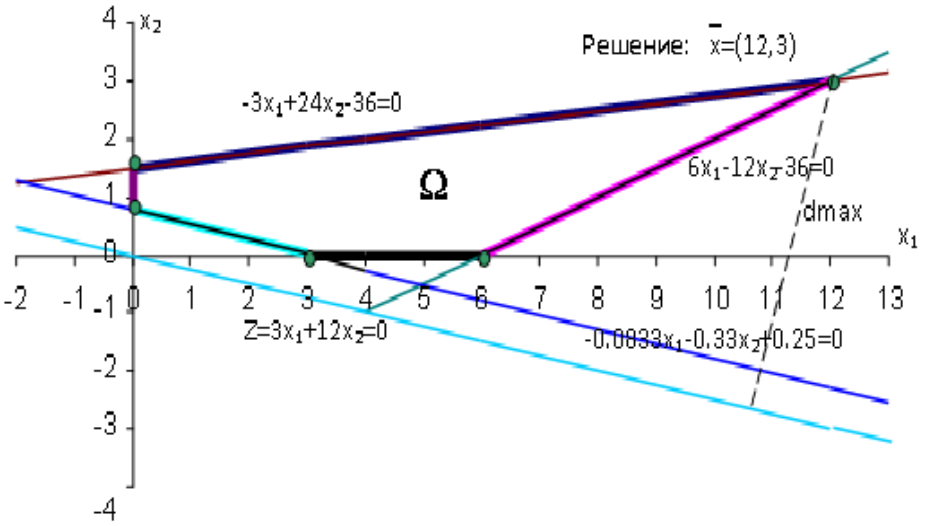


Рис. 6.1

Из чертежа видно, что среди точек многоугольника ограничений наиболее удаленной точкой от прямой $z = 0$ является вершина многоугольника с координатами x_1=12, x_2=3. В этой точке величина функции цели z является максимальной.

Ответ: x_1=12, x_2=3, $z_{\max} = z(12,3) = 3 \cdot 12 + 12 \cdot 3 = 72$.

Компьютерный счет

Программа на MATLAB представлена ниже:

```
%Задание количества неизвестных
n=input('Введите n=');
%Задание количества ограничений
m= input('Введите m=');
g= input('введите g=');
s= input('введите s=');
```

```
%Формирование вектора коэффициентов функции цели
c=[s;g];
%Формирование матрицы  коэффициентов ограничений
A=[-1/g  -1/s; -s  2*g; 2*s  -g];
%Формирование вектора правых частей ограничений
b=[-0.25; g*s ; g*s];
%Распечатка исходных данных
disp('Вектор коэффициентов функции цели, c');
fprintf('%12.4f \n',c);
disp('Матрица  коэффициентов ограничений, A');
for k=1:m
    fprintf('%12.4f',A(k,:));
    fprintf('\n')
end
disp('Вектор правых частей ограничений, b ');
fprintf('%12.4f \n',b);

%Задание вектора ограничений снизу на координаты
lb= zeros(2,1);
%Обращение к функции MATLAB для решения зпадачи
%линейного программирования
[x,z]=linprog(-c,A,b,[],[],lb);

%Распечатка результатов
disp('Вектор решения, x');
fprintf('%12.4f \n',x);
fprintf('Максимальное значение функции цели,z=%12.4f',
z);
```

Результаты расчета

```
Введите n= 2
Введите m= 3
введите g= 3
введите s=12
Вектор коэффициентов функции цели, c
    12.0000
     3.0000
Матрица  коэффициентов ограничений, A
   -0.3333   -0.0833
  -12.0000    6.0000
   24.0000   -3.0000
Вектор правых частей ограничений, b
   -0.2500
   36.0000
   36.0000
```

```
Optimization terminated.

Вектор решения, x
    3.0000
   12.0000
Максимальное значение функции цели,z=    -72.
```

Задания для самостоятельного решения практической работы 6

Найти точку максимума функции цели z: $z(x_1, x_2) = sx_1 + gx_2$

при ограничениях $\begin{cases} -x_1/g - x_2/s + 0.25 \le 0 \\ -sx_1 + 2gx_2 - gs \le 0 \\ 2sx_1 - gx_2 - gs \le 0 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$,

g– последняя цифра зачетной книжки($g \neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Практическое занятие №7

Программная реализация численного решения задачи о поперечном изгибе балки на основе МКЭ.

Методические указания к выполнению практической работы 7.

Прежде чем приступать к выполнению практической работы, необходимо:

- Изучить теоретический материал.

Практическая работа 7 состоит в решении задачи об изгибе растянуто-изогнутой балки в вариационной постановке

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}(EJy'(x)^2 + Py(x)^2)dx - \int_0^{\ell} M(x)y(x)dx \qquad (7.1)$$

методом конечных элементов, где

$EJ = g/8$ – жесткость балки,

$P = 48s$ – заданная сила,

$M(x) = \frac{g+s}{25}[2EJ + Px(\ell - x)]$ – изгибающий момент в балке,

$\ell = 1$ – длина балки.

Разбиваем балку на $(n-1)$ элементов равной длины, т.е.

$h_i = h = \ell/(n-1)$.

Составляем конечно-элементную систему уравнений (матрицу жесткости и вектор нагрузки):

$$K^G \bar{y} = \bar{R}^G \qquad (7.2)$$

пользуясь формулами для определения локальной матрицы жесткости (заметим, что здесь она постоянная) и локального вектора нагрузки:

$$K^i = K = \frac{EJ}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{Ph}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_1 & K_0 \end{bmatrix} \qquad (7.3)$$

$$\textbf{где} \quad K_0 = \frac{EJ}{h} + \frac{Ph}{3}, \quad K_1 = -\frac{EJ}{h} + \frac{Ph}{6}$$

$$\overline{R}^i = \begin{pmatrix} R_1^i \\ R_2^i \end{pmatrix} = R_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } R_i = \frac{M_i h}{2}, \quad M_i = M\left(x_i + \frac{h}{2}\right),$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$.

При этом, учитывая граничные условия (закрепления):

$y(0) = y(\ell) = 0$, или $y_1 = 0$ и $y_n = 0$,

следует сделать корректировку в полученной системе, а именно

$K_{11}^G = K_{nn}^G = 1,$

$K_{1i}^G = K_{i1}^G = K_{ni}^G = K_{in}^G = 0$ для $1 < i < n$,

$R_1^G = R_n^G = 0.$

В итоге глобальная матрица жесткости и глобальный вектор нагрузки будут иметь следующую структуру

$$K^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2K_0 & K_1 & & & & \vdots \\ \vdots & K_1 & 2K_0 & K_1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & K_1 & 2K_0 & K_1 & \vdots \\ \vdots & & & & K_1 & 2K_0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

$$R^G = \begin{bmatrix} 0 \\ R_1 + R_2 \\ R_2 + R_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{n-2} + R_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

В практической работе 7 необходимо составить конечно-элементную систему уравнений (матрицу жесткости и вектор нагрузки) и решить полученную систему.

1. Решить задачу в MATLAB для n точек (N-1 конечных элементов). Представить результаты для N=9, то есть для 8 конечных элементов.
2. Решить задачу вручную для N=4, то есть для 3 конечных элементов.

Условие задачи практической работы 7

Решить задачу об изгибе растянуто-изогнутой балки в вариационной постановке

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} (EJy'(x)^2 + Py(x)^2)dx - \int_0^{\ell} M(x)y(x)dx,$$

методом конечных элементов, где

$EJ = g/8$ – жесткость балки,

$P = 48s$ – заданная сила,

$M(x) = \frac{g+s}{25}[2EJ + Px(\ell - x)]$ – изгибающий момент в балке,

$\ell = 1$ – длина балки,

g=12, s=3

1. Решить задачу в MATLAB для n точек (N-1 конечных элементов). Представить результаты для N=9, то есть для 8 конечных элементов.
2. Решить задачу вручную для N=4, то есть для 3 конечных элементов.

Варианты ответов практической работы 7

Ручной счет

Ответ: $y_1 = 0, \quad y_2 = 0.139, \quad y_3 = 0.139, \quad y_4 = 0.$

Компьютерный счет

```
Вектор решения y
      0.0000
      0.0665
      0.1133
      0.1414
      0.1508
      0.1414
      0.1133
      0.0665
      0.0000
```

Указание практической работы 7

В средней точке балки при компьютерном решение результат должен совпадать с g+s с точностью до 0.01.

Полное решение задачи практической работы 7

Ручной счет

Пусть $EJ = 1.5$, $P = 144$, $M(x) = 0.6[3 + 144x(1-x)]$.

При $n = 4$ (три элемента – рис.7.1) $h = 1/3$.

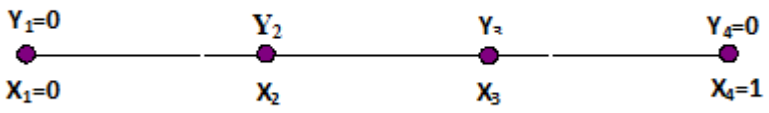


Рис. 7.1

Локальная матрица жесткости в соответствии с формулами (7.3):

$$K = \frac{1.5}{0.333}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{144}{6}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.5 & 3.5 \\ 3.5 & 20.5 \end{bmatrix}$$

Локальные векторы нагрузок в соответствии с формулами (7.3):

$$\underline{i=1},\quad x_1 + \frac{h}{2} = \frac{1}{6},\ M_1 = 0.6[3 + 144\cdot\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})] = 13.8,\quad R^1 = \frac{13.8}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.3\\2.3\end{pmatrix};$$

$$\underline{i=2},\quad x_2 + \frac{h}{2} = \frac{1}{2},\ M_2 = 0.6[3 + 144\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})] = 23.4,\quad R^2 = \frac{23.4}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.9\\3.9\end{pmatrix};$$

$$\underline{i=3},\quad x_3 + \frac{h}{2} = \frac{5}{6},\ M_3 = 0.6[3 + 144\cdot\frac{5}{6}(1-\frac{5}{6})] = 13.8 = M_1,\quad R^3 = R^1 = \begin{pmatrix}2.3\\2.3\end{pmatrix}.$$

Сформируем разрешающую систему уравнений в соответствии с формулами (7.4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 3.5 & 0 \\ 0 & 3.5 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.2 \\ 6.2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из симметричности задачи следует, что $y_2 = y_3$. Тогда из второго уравнения системы получим

$$41y_2 + 3.5y_2 = 6.2 \rightarrow y_2 = 0.139.$$

Ответ: $y_1 = 0,\quad y_2 = 0.139,\quad y_3 = 0.139,\quad y_4 = 0.$

Компьютерный счет

```
function lab3_7_1
```

```
%Задание количества неизвестных
n=input('Введите n=');
g= input('введите g=');
s= input('введите s=');
%Задание длины балки
dl=input('введите dl=');
EJ=g/8;
%Задание осевой силы
P=48*s;
% Формирование глобальной матрицы жесткости
%и вектора нагрузок
Kg=zeros(n,n);
Rg=zeros(n,1);
h=dl/(n-1);
Ph=P*h/6;
EJh=EJ/h;
K0=EJh+2*Ph;
K1=Ph-EJh;
Kg(1,1)=1.; Kg(n,n)=1.;
for i=2:n-1
    x=(i-1.5)*h;
    Rg(i)=(M(x,g,s,dl,EJ,P)+M(x+h,g,s,dl,EJ,P))*h/2;
    if(i>2)
        Kg(i,i-1)=K1;
    end
    Kg(i,i)=2*K0;
    if (i<n-1)
        Kg(i,i+1)=K1;
    end
end
%Распечатка глобальной матрицы жесткости
%и вектора нагрузок

disp('Глобальная матрица жесткости Kg');
for i=1:n
    fprintf('%6.2f ',Kg(i,:));
    fprintf('\n');
end
disp('Глобальный вектор нагрузок Rg');
fprintf('%12.4f \n',Rg);

%Решение разрешающей системы линейных алгебраических
% уравнений, распечатка результата
y=Kg\Rg;
disp('Вектор решения y');
```

```
fprintf('%12.4f \n',y);


function Res=M(x,g,s,dl,EJ,P)
Res=(g+s)/25.*(2*EJ+P*x*(dl-x));
end
end


Введите n=9
введите g=3
введите s=12
введите dl=1

dl =

     1

Глобальная матрица жесткости Kg
  1.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00
  0.00  54.00   9.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00
  0.00   9.00  54.00   9.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00
  0.00   0.00   9.00  54.00   9.00   0.00   0.00   0.00   0.00
  0.00   0.00   0.00   9.00  54.00   9.00   0.00   0.00   0.00
  0.00   0.00   0.00   0.00   9.00  54.00   9.00   0.00   0.00
  0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   9.00  54.00   9.00   0.00
  0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   9.00  54.00   0.00
  0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00   1.00
Глобальный вектор нагрузок Rg
      0.0000
      4.6125
      7.9875
     10.0125
     10.6875
     10.0125
      7.9875
      4.6125
      0.0000
Вектор решения y
      0.0000
      0.0665
      0.1133
      0.1414
      0.1508
      0.1414
      0.1133
      0.0665
```

```
0.0000
```

Задания для самостоятельного решения практической работы 7

Решить задачу об изгибе растянуто-изогнутой балки в вариационной постановке

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}(EJy'(x)^2 + Py(x)^2)dx - \int_0^{\ell} M(x)y(x)dx,$$

методом конечных элементов.

Исходные данные (варианты заданий)

$EJ = g/8$ – жесткость балки,

$P = 48s$ – заданная сила,

$M(x) = \frac{g+s}{25}[2EJ + Px(\ell - x)]$ – изгибающий момент в балке,

$\ell = 1$ – длина балки,

g– последняя цифра зачетной книжки($g \neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

В практической работе 7 необходимо составить конечно-элементную систему уравнений (матрицу жесткости и вектор нагрузки) и решить полученную систему.

1. Решить задачу в MATLAB для n точек (N-1 конечных элементов). Представить результаты для N=9, то есть для 8 конечных элементов.
2. Решить задачу вручную для N=4, то есть для 3 конечных элементов.

Практическое занятие №8

Разбор типовой задачи контрольного задания №1.

Численное решение краевой задачи для уравнения Пуассона.

Алгоритм формирования системы разностных уравнений на основе использования единичных векторов. Предварительные сведения.

Пусть A – матрица размерности $n \times n$ и $\bar{e}^j$ – j-й единичный вектор размерности n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{e}^j(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда $A\bar{e}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ – j-й столбец матрицы A.

Рассмотрим алгоритм формирования системы разностных уравнений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона на плоскости.

1. Общий вид формулировки краевой задачи для уравнения Пуассона.

Уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 u(x, y) = F(x, y) \ , \tag{8.1}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа} \tag{8.2}$$

Заметим, что оператор Лапласа часто обозначается символом Δ, т.е. равнозначны все три формулировки оператора Лапласа:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{8.3}$$

Пусть краевая задача рассматривается в некоторой области Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$ (рис. 8.1).

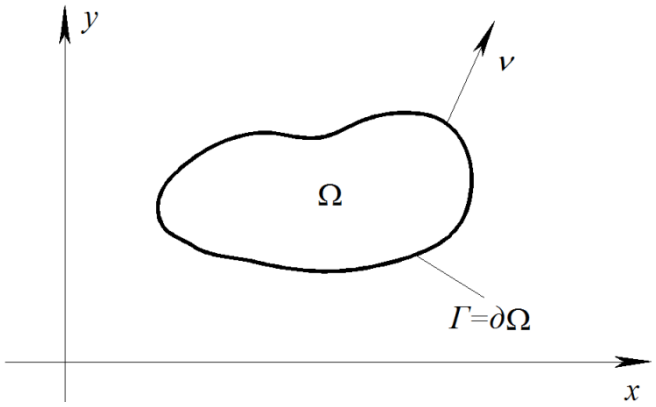


Рис. 8.1. Пример области, на которой рассматривается задача Пуассона.

Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор нормали к границе области Ω,

$$\nu_1 = \cos(\nu, x); \quad \nu_2 = \cos(\nu, y). \tag{8.4}$$

В зависимости от условий на краях области (краевых условий) краевая задача может иметь разные названия. В частности:

– задача Дирихле (первая краевая задача):

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, \quad (x, y) \in \Omega \\ U_\Gamma = g; \end{cases} \tag{8.5}$$

– задача Неймана (вторая краевая задача):

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, \quad (x, y) \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial \nu}\right|_\Gamma = f, \end{cases} \tag{8.6}$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \nu_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial U}{\partial y} - \text{производная по нормали.} \qquad (8.7)$$

Если на одной части границы заданы условия задачи Дирихле, а на другой – условия задачи Неймана, тогда таким образом сформулированная краевая задача называется *смешанной краевой задачей*.

2. Решение задачи Дирихле методом конечных разностей.

Рассмотрим задачу Дирихле в прямоугольной области Ω (рис. 8.2). Тогда ее математическую формулировку можно представить в виде:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = F, & \Omega = (0 < x < \ell_1,\ 0 < y < \ell_2), \\ U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & x = 0 \\ \varphi_2(y), & x = \ell_1 \\ \varphi_3(x), & y = 0 \\ \varphi_4(x), & y = \ell_2, \end{cases} & -\textit{краевые условия.} \end{cases} \qquad (8.8)$$

Здесь все величины заданы, кроме функции $U(x,y)$ (искомая функция).

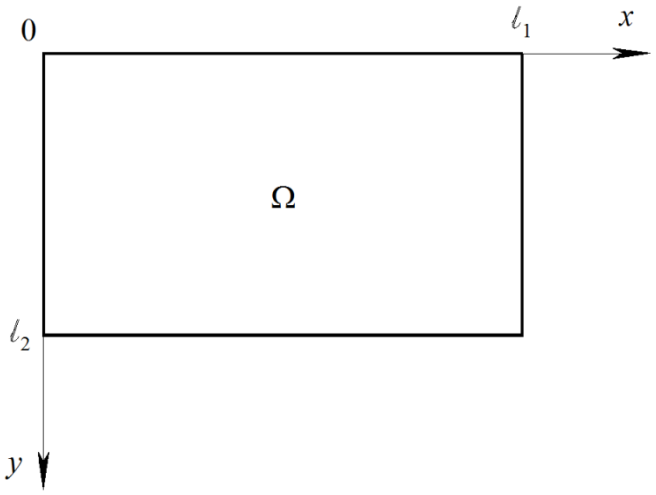


Рис. 8.2. Прямоугольная область, на которой рассматривается задача Дирихле.

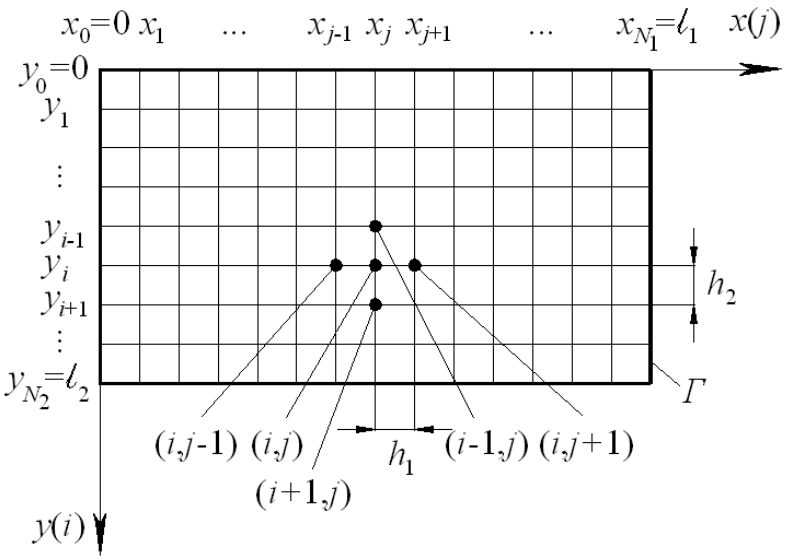


Рис. 8.3. Дискретизация рассматриваемой области.

Разобьем исходную прямоугольную область на мелкие прямоугольники с помощью сетки с постоянным шагом h_1 по первому направлению (по координате x) и с постоянным шагом h_2 – по второму направлению (по координате y):

$$h_1 = \ell_1/(N_1-1); \quad h_2 = \ell_2/(N_2-1), \tag{8.9}$$

где N_1 и N_2 – число узлов сетки по 1-му и 2-му направлению, соответственно (рис. 8.3).

Будем рассматривать задачу (8) в *узлах сетки* – в точках пересечения линий разбиения области. Каждый узел сетки имеет номер, определяемый двумя величинами (i, j), где $j = 1,..., N_1$ – номер узла по направлению оси x, $i = 1,..., N_2$ – номер узла по направлению оси y.

Введем обозначения:

$$U_{ij} = U(x_j, y_i); \quad F_{ij} = F(x_j, y_i); \quad \varphi_{ij} = \varphi(x_j, y_i). \tag{8.10}$$

Вторые производные для внутренних узлов сетки (i, j) по каждому направлению заменим вторыми разностями, т.е.

$$\frac{\partial^2 U(x_j, y_i)}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h_1^2}; \quad \frac{\partial^2 U(x_j, y_i)}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h_2^2}.$$

(8.11)

Тогда краевая задача в конечных разностях примет вид:

– для внутренних узлов:

$$\frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h_1^2} + \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h_2^2} = F_{ij}, \; j = 2,...,N_1 - 1, \; i = 2,...N_2 - 1;$$

(8.12)

– для граничных узлов:

$$U_{ij} = \varphi_{ij} = \begin{cases} \varphi_1(y_i), & j = 1, \\ \varphi_2(y_i), & j = N_1, \\ \varphi_3(x_j), & i = 1, \\ \varphi_4(x_j), & i = N_2. \end{cases} \qquad (8.13)$$

Таким образом, для определения U_{ij} требуется решить систему из $n = N_1 \times N_2$ уравнений с $n = N_1 \times N_2$ неизвестными:

$$A\bar{u} = \bar{f}, \qquad (8.14)$$

где

$$u_i = U_{i_2 i_1}, \qquad f_i = \begin{cases} \varphi_1(y_{i_2}), \; i_1 = 1, \; 1 \le i_2 \le N_2 \\ \varphi_2(y_{i_2}), \; i_1 = N_1, \; 1 \le i_2 \le N_2 \\ \varphi_3(x_{i_1}), \; i_2 = 1, \; 1 \le i_1 \le N_1 \\ \varphi_4(x_{i_1}), \; i_2 = N_2, \; 1 \le i_1 \le N_1 \\ F(x_{i_1}, y_{i_2}), \; 1 < i_1 < N_1, 1 < i_2 < N_2 \end{cases},$$

$i = i_1 + N_1(i_2 - 1)$ – сплошной номер, $i_1 = 1,..., N_1$, $i_2 = 1,..., N_2$

Задание.

Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области (рис. 8.2),

Варианты задания.

$$\ell_1 = \ell_2 = 1; \quad F(x,y) = c, \quad \text{где} \quad c = -8\left(\frac{s}{\ell_1} + \frac{g}{\ell_2}\right);$$

$$U_\Gamma = \varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 4\dfrac{g}{\ell_2}\, y(\ell_2 - y), \ (x = 0 \vee x = \ell_1) \wedge 0 \le y \le \ell_2 \\ \varphi_3(x) = \varphi_4(x) = 4\dfrac{s}{\ell_1}\, x(\ell_1 - x), \ 0 \le x \le \ell_1 \wedge (y = 0 \vee y = \ell_2); \end{cases}$$

g – последняя цифра зачетной книжки ($g \neq 0$),

s – две последние цифры зачетной книжки (s≠0).

Принять для расчета на ЭВМ число отрезков $n_1 = 9$ и $n_2 = 7$

Выполнение работы.

Пример М-файла (ниже задано $g = 10$, $s = 40$):

```
function dirichlet_poisson

L=input('ввести длины сторон L=[L1 L2]=');

n=input('ввести количество узлов по каждому направлению n=[n1
n2]=');

s=input('ввести номер студента по журналу s=');

g=input('ввести номер группы g=');

h=L./(n-1) % h=[h1 h2]- шаги разбиения по сторонам

n2=n(1)*n(2) %общее количество неизвестных

P=-8*(s/L(1)+g/L(2)) % параметр нагрузки

% формирование системы разностных уравнений

[A,f]=form_SLAU(n,P,L,h,s,g);

fprintf('\n матрица системы разностных уравнений \n')
```

```
for i=1:n2
%    fprintf('%8.4f',A(i,:)),fprintf('\n')
end
disp('вектор правой части системы разностных
уравнений'),%disp(f)
% решение
u=A\f;
% запись вектора решения в виде таблицы
U=res_pr(u,n);
disp('решение U:'),disp(U)


% визуализация решения
[x1 x2] = meshgrid(0:h(1):L(1), 0:h(2):L(2));


figure()
contourf(x1,x2,U)
grid on
title('CONTOURF:  function U')
colormap cool
colorbar;
axis image;
xlabel('X'),ylabel('Y')
%================================================================
===========
%---------------------- блок подфункций ----------------------
-----------
%================================================================
===========
function U=res_pr(u,n)
U=zeros(n(2),n(1));
```

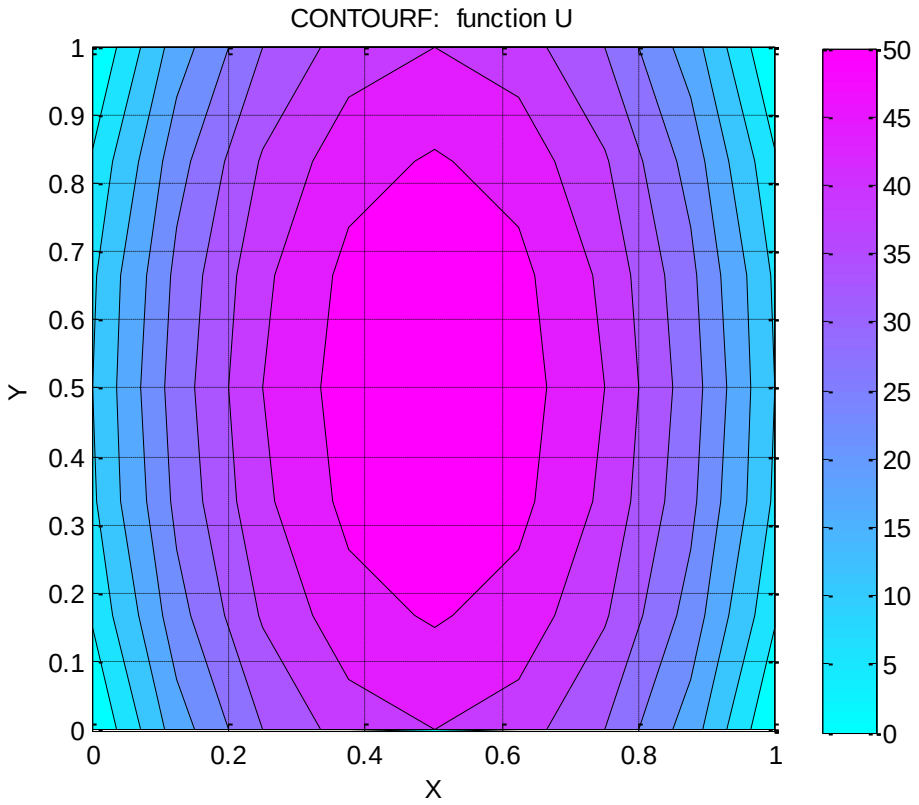
```
for i2=1:n(2)
    for i1=1:n(1)
        i=i1+n(1)*(i2-1);
        U(i2,i1)=u(i);
    end
end

function [A,f]=form_SLAU(n,P,L,h,s,g)
n2=n(1)*n(2);
% формирование матрицы по столбцам
A=zeros(n2);ej=zeros(n(2),n(1));
jj=0;
for j2=1:n(2)
    for j1=1:n(1)
        jj=jj+1; % номер столбца (сплошная нумерация)
        ej(j2,j1)=ej(j2,j1)+1;
        ii=0;
        for i2=1:n(2)
            for i1=1:n(1)
                ii=ii+1; % номер строки (сплошная нумерация)
                if i2>1&&i2<n(2)&&i1>1&&i1<n(1) %внутренние узлы
                    A(ii,jj)=A(ii,jj)+(ej(i2,i1-1)-
2*ej(i2,i1)+ej(i2,i1+1))/h(1)^2+(ej(i2-1,i1)-
2*ej(i2,i1)+ej(i2+1,i1))/h(2)^2;
                else %граничные узлы
                    A(ii,jj)=A(ii,jj)+ej(i2,i1);
                end
            end
        end
```

```
        ej(j2,j1)=ej(j2,j1)-1;
    end
end

% формирование вектора правой части
f=P*ones(n2,1);
for i2=[1 n(2)]
    x2=h(2)*(i2-1);
    for i1=1:n(1)
        x1=h(1)*(i1-1);
        ii=i1+n(1)*(i2-1);
        f(ii)=4*s/L(1)*x1*(L(1)-x1);
    end
end
for i1=[1 n(1)]
    x1=h(1)*(i1-1);
    for i2=1:n(2)
        x2=h(2)*(i2-1);
        ii=i1+n(1)*(i2-1);
        f(ii)=4*g/L(2)*x2*(L(2)-x2);
    end
end
%=========================
```

Результаты счета:

```
ввести длины сторон L=[L1 L2]=[1 1]
ввести количество узлов по каждому направлению n=[n1 n2]=[9 7]
```

```
ввести номер студента по журналу s=40

ввести номер группы g=10

h =

    0.1250    0.1667

n2 =

    63

P =

  -400


 матрица системы разностных уравнений

вектор правой части системы разностных уравнений

решение U:

         0   17.5000   30.0000   37.5000   40.0000   37.5000
30.0000   17.5000         0

    5.5556   23.0556   35.5556   43.0556   45.5556   43.0556
35.5556   23.0556    5.5556

    8.8889   26.3889   38.8889   46.3889   48.8889   46.3889
38.8889   26.3889    8.8889

   10.0000   27.5000   40.0000   47.5000   50.0000   47.5000
40.0000   27.5000   10.0000

    8.8889   26.3889   38.8889   46.3889   48.8889   46.3889
38.8889   26.3889    8.8889

    5.5556   23.0556   35.5556   43.0556   45.5556   43.0556
35.5556   23.0556    5.5556

         0   17.5000   30.0000   37.5000   40.0000   37.5000
30.0000   17.5000         0

>>
```


CONTOURF: function U
Y
X
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0.2
0.4
0.6
0.8
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50