

Лекция 14.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО, ВРАЩАТЕЛЬНОГО И ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

14.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Рассмотрим простейшее движение твердого тела - поступательное. Как известно из курса кинематики, что поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной любой его точки. Таким образом, все вопросы динамики поступательного движения твердого тела решаются при помощи теоремы о движении центра масс механической системы

$$m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad (14.1)$$

которая связывает координаты центра масс тела с приложенными к нему внешними силами.

Записывая уравнение (14.1) в проекциях на координатные оси, получаем в общем случае три уравнения движения твердого тела:

$$m\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad m\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad m\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

В случае плоского или прямолинейного поступательного движения тела число дифференциальных уравнений движения будет, естественно, меньше.

Если траектория центра масс тела известна, имеет смысл использовать уравнение (14.1) в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$m \frac{dV_{c\tau}}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{\tau k}; \quad m \frac{V_{c\tau}^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{nk}; \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{bk},$$

где ρ – радиус кривизны траектории центра масс тела.

14.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием системы внешних сил $\vec{F}_1^e; \vec{F}_2^e; \dots; \vec{F}_n^e$, в которую входят как активные силы, так и реакций связей, наложенные на механическую систему.

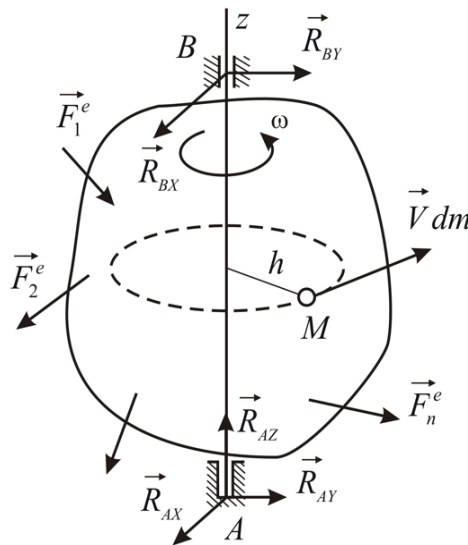


Рис. 14.1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Как известно, положение тела, имеющего ось вращения, определяется углом поворота. Для вывода дифференциального уравнения движения используем теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси, которую примем за координатную ось z (Рис.14.1):

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z \left(\vec{F}_k^e \right). \quad (14.2)$$

Вычислим кинетический момент тела относительно оси вращения. Количество движения $\vec{V}dm$ любой частицы M тела перпендикулярно оси вращения, причем, $v = \omega_z h$, где h – кратчайшее расстояние от частицы M до оси вращения. Таким образом,

$$L_z = \int_m v h dm = \omega_z \int_m h^2 dm = J_{zz} \omega_z.$$

Подставляя полученный результат в уравнение (14.2), получаем дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела:

$$J_{zz} \ddot{\varphi} = \sum M_z \left(\vec{F}_k^e \right). \quad (14.3)$$

Уравнение (14.3) называется **дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела**. Интегрируя это уравнение, находим угол φ как функцию времени и тем самым полностью определяем движение, поскольку в рассматриваемом случае система имеет одну степень свободы и ее положение вполне определяется углом φ . Заметим, что неизвестные реакции опор A и B в уравнение движения (14.3) не входят, так как они не создают момента относительно оси вращения, шарниры считаем идеальными.

14.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Рассмотрим теперь сложное движение твердого тела- плоскопараллельное. В кинематике было установлено, что положение твердого тела, совершающего

плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры примем координаты центра масс тела и угол поворота тела вокруг оси Cz_1 , перпендикулярной плоскости движения.

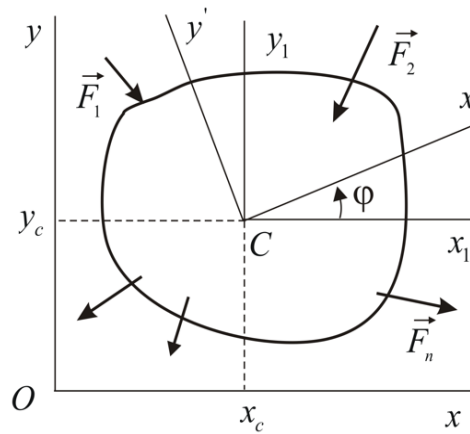


Рис. 14.2. Движение подвижной системы координат относительно неподвижной

Пусть система координат $Cx_1y_1z_1$, имеющая начало в центре масс тела, движется поступательно относительно неподвижной системы $Oxyz$. Положение тела будет полностью определено, если известны координаты центра масс тела (x_c, y_c) и угол φ между осью x_1 и осью x системы координат $Cxyz$, жестко связанной с телом и имеющей начало в центре масс тела (Рис.14.2).

В соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы, получаем уравнения, связывающие координаты центра масс тела с приложенными к нему внешними силами:

$$m\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad m\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e. \quad (14.4)$$

Остается определить движение тела по отношению к осям Кенига $Cx_1y_1z_1$, что можно сделать, используя теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс механической системы. Поскольку движение тела по отношению к осям $Cx_1y_1z_1$ представляет собой вращение вокруг оси Cz_1 , получаем:

$$J_{cz_1} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_{cz_1} (\vec{F}_k^e), \quad (14.5)$$

где J_{cz_1} — момент инерции тела относительно оси Cz_1 .

Уравнения (14.4) и (14.5) называются дифференциальными уравнениями плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела.

14.5. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ.

Введем определение работы силы и мощности силы. Для начала рассмотрим элементарную работу силы на элементарном перемещении ее точки приложения.

Опр.1 *Элементарной работой силы называется величина, равная скалярному произведению вектора силы на элементарное перемещение точки приложения силы:*

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (14.6)$$

В зависимости от используемого способа задания движения точки её скорость может быть вычислена по одной из следующих формул:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} = \dot{s} \vec{\tau}.$$

Таким образом, для вычисления элементарной работы силы получаем формулы:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_\tau ds.$$

Теперь рассмотрим работу силы на конечном перемещении точки ее приложения. Итак, работа силы на конечном перемещении M_1M_2 определяется как сумма соответствующих элементарных работ, т.е. как криволинейный интеграл, взятый вдоль дуги M_1M_2 траектории:

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1M_2} F_\tau ds = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (14.7)$$

Опр.2 Полной работой силы на конечном перемещении точки ее приложения называется скалярная величина, равная криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги M_1M_2 траектории движения точки:

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1M_2} F_\tau ds = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

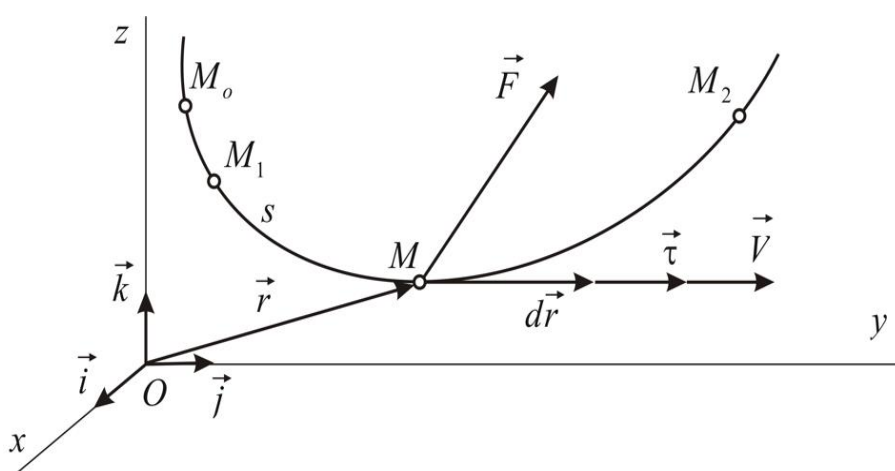


Рис. 14.3. Перемещение точки по криволинейной траектории её движения

В общем случае сила может зависеть от координат точки приложения силы, ее скорости и времени. Таким образом, для вычисления работы силы в общем случае необходимо знать траекторию точки приложения силы и закон ее движения по траектории. Однако, при решении большинства задач динамики именно закон движения точки и является искомым.

Рассмотрим силы, которые зависят только от положения точки, то есть от ее координат, и времени. Такие силы называются позиционными. Физическое

пространство, в котором на материальную точку действуют позиционные силы, называется силовым полем. В случае действия на точку позиционных сил интеграл (14.7) может быть вычислен, если известна только траектория точки приложения силы.

Особый класс составляют силы, работа которых не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечным положениями точки. Такие силы называются потенциальными.

Очевидно, что вычисление интеграла (14.7) лишь по известным начальному и конечному положениям точки возможно только в том случае, когда подинтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции координат:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\Pi(x, y, z). \quad (14.8)$$

Работа потенциальной силы, как следует из (14.7), (14.8) равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях:

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1 M_2} \delta A = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2.$$

14.6. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Введем определение кинетической энергии механической системы.

Опр.3 *Половина произведения массы точки на квадрат ее скорости называется кинетической энергией материальной точки.*

Опр.4 *Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех ее точек.*

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (14.9)$$

Теорема об изменении кинетической энергии относится к числу общих теорем динамики наряду с доказанными ранее теоремами об изменении количества движения и изменения момента количества движения.

Умножим каждое из дифференциальных уравнений движения точек механической системы скалярно на скорость соответствующей точки и сложим все полученные уравнения:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \cdot \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \vec{V}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot \vec{V}_k$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \vec{V}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot \vec{V}_k$$

Учитывая определения кинетической энергии механической системы и мощности силы, получаем:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k^e + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k^i. \quad (14.10)$$

Доказана *теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:*

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Умножая равенство (14.6) на dt и учитывая определение элементарной работы силы, получаем:

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_k^e + \sum_{k=1}^n \delta A_k^i, \quad (14.11)$$

то есть

Дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Для практических целей удобна интегральная форма записи теоремы об изменении кинетической энергии, которая получается путем интегрирования равенства (14.7) на некотором перемещении системы:

$$T - T_o = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \quad (14.12)$$

то есть

Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех приложенных к системе внешних и внутренних сил, совершенных на этом перемещении.

Рассмотрим пример на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

Пример.

Каток массы m_1 радиуса r_1 катится без скольжения по горизонтальной поверхности под действием приложенного к нему постоянного вращающего

момента M . Трос, намотанный на боковую поверхность, проходит через барабан массы m_2 радиуса r_2 . Барабан и каток – сплошные однородные цилиндры одинаковой массы. К свободному концу троса привязан груз массы m_3 .

Определить линейное ускорение груза 3.

Дано:

$$P_1 = 4 \text{ кН}; P_2 = 1 \text{ кН}; P_3 = 2 \text{ кН}; r_1 = 1 \text{ м}; r_2 = 0,4 \text{ м}; M = 20 \text{ кН}$$

Найти: w_3 .

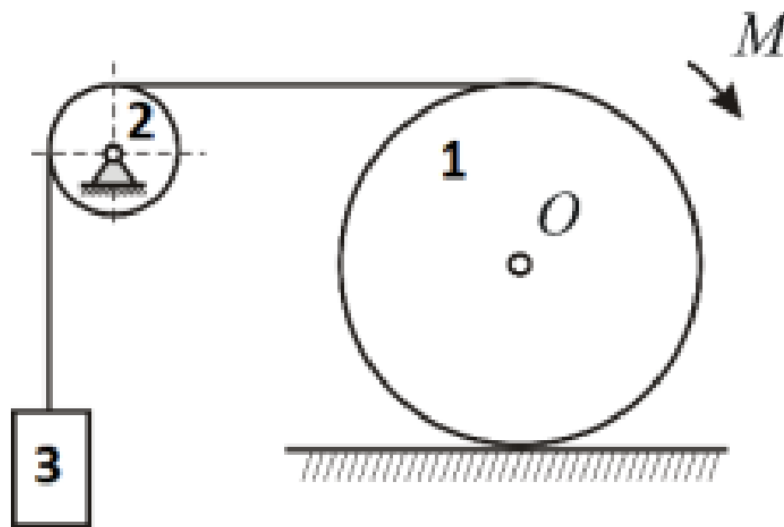


Рис. 14.4. Механическая система трех тел

Решение:

Используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

(14.13)

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i$$

Найдем кинематические соотношения между скоростями тел, входящих в состав данной механической системы (Рис. 14.5).

Так как каток 1 катится без проскальзывания, то точка К касания катка и горизонтальной поверхности является его мгновенным центром скоростей и

$$v_1 = \omega_1 \cdot r_1$$

Следовательно, имеем

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$$

Скорость точки А:

$$v_A = \omega_1 \cdot 2r_1 = \frac{v_1}{r_1} \cdot 2r_1 = 2 \cdot v_1$$

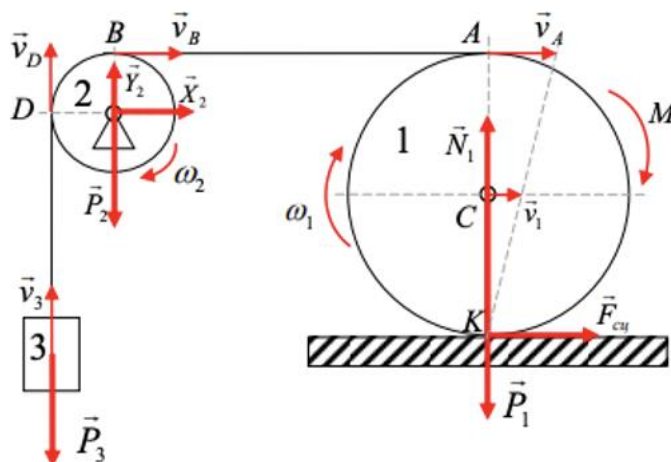


Рис. 14.5. Силы и скорости точек тел механической системы

Так как тросы, соединяющие систему, нерастяжимые, то

$$v_3 = v_D = v_B = v_A = 2 \cdot v_1$$

И угловая скорость барабана 2 по формуле Эйлера определяется по формуле:

$$\omega_2 = \frac{v_D}{r_2}$$

Выразим все скорости тел, входящих в состав данной механической системы, через скорость груза 3, так как ускорение этого тела необходимо определить по условию данной задачи. С учетом формулы Эйлера имеем:

$$\omega_2 = \frac{v_3}{r_2} \quad (14.14)$$

$$v_1 = \frac{v_A}{2} = \frac{v_3}{2} \quad (14.15)$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_3}{2 \cdot r_1} \quad (14.16)$$

Найдем кинетическую энергию всей механической системы.

По определению скалярная величина T равна сумме кинетических энергий всех трех тел, входящих в состав механической системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Учитываем:

1) Каток 1 движется плоскопараллельно, поэтому по теореме Кенига имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

Так как каток 1 – однородный диск, то его осевой момент инерции равен:

$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$$

Учитывая полученные соотношения между скоростями тел (14.13) – (14.15), получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{V_3^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{V_3^2}{4r_1^2} = \frac{1}{8} \cdot m_1 \cdot V_3^2 + \frac{1}{16} \cdot m_1 \cdot V_3^2 = \frac{3}{16} \cdot m_1 \cdot V_3^2$$

2) Барабан 2 вращается вокруг неподвижной оси, поэтому по определению кинетической энергии при вращательном движении твердого тела имеем:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Так как барабан 2 – однородный диск, то его момент инерции:

$$J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

Учитывая соотношения связи угловой скорости второго тела и линейной скорости груза 3, то есть формулу (14.14), получим:

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{V_3^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot V_3^2$$

3) Груз 3 движется поступательно. Тогда по определению для кинетической энергии при поступательном движении твердого тела имеем:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Тогда кинетическая энергия всей механической системы, состоящей из трех тел записывается в виде:

$$T = \frac{3}{16} \cdot m_1 \cdot V_3^2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 = \left(\frac{3}{8} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + m_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot V_3^2$$

Для данной системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями,

$$\sum_{k=1}^n N_k^i = 0$$

Поэтому найдем суммарную мощность всех внешних сил действующих на три тела, входящие в состав данной механической системы.

Итак, на данную механическую систему действуют движущий момент M , силы тяжести тел $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, реакция горизонтальной поверхности $\vec{N}_1$, реакции опора барабана 2: $\vec{X}_2, \vec{Y}_2$, сила сцепления катка 1 и горизонтальной поверхности $\vec{F}_{\text{сц}}$.

При вычислении мощности внешних сил заметим, что сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ имеет нулевую мощность, поскольку точка приложения этой силы в любой момент времени имеет нулевую скорость. Равны нулю мощности реакций опоры колеса 2 и его силы тяжести $\vec{P}_2$, так как они приложены к неподвижной точке. Мощности силы тяжести колеса 1 $\vec{P}_1$ и реакции горизонтальной поверхности $\vec{N}_1$ так же равны нулю, так как они направлены перпендикулярно скорости центра масс катка 1.

$$N(\vec{P}_3) = -\vec{P}_3 \cdot \vec{V}_3,$$

$$N(M) = M \cdot \omega_1,$$

Тогда учитывая соотношения для скоростей тел, входящих в состав механической системы (14.14) – (14.16), получим

$$\sum_{k=1}^n N_k^e = -P_3 \cdot V_3 + M \cdot \omega_1 = -P_3 \cdot V_3 + M \cdot \frac{V_3}{2 \cdot r_1} = \left(\frac{M}{2 \cdot r_1} - P_3 \right) \cdot V_3$$

Тогда дифференциальное уравнение (14.13) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{3}{8} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + m_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot V_3^2 \right) = \left(\frac{M}{2 \cdot r_1} - P_3 \right) \cdot V_3$$

Или

$$\left(\frac{3}{8} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + m_3\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot V_3 \frac{dV_3}{dt} = \left(\frac{M}{2 \cdot r_1} - P_3\right) \cdot V_3$$

$$\left(\frac{3}{8} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + m_3\right) \cdot \frac{dV_3}{dt} = \frac{M}{2 \cdot r_1} - P_3$$

Так как

$$m_1 = \frac{P_1}{g}; m_2 = \frac{P_2}{g}; m_3 = \frac{P_3}{g} \text{ и } \frac{dV_3}{dt} = w_3, \text{ то}$$

$$w_3 = \frac{\frac{M}{2 \cdot r_1} - P_3}{\frac{3}{8} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 + P_3} \cdot g$$

Учитывая исходные данные, получим:

$$w_3 = \frac{\frac{20}{2 \cdot 1} - 2}{\frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2} \cdot 9,8 = 19,6 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $w_3 = 19,6 \text{ м/с}^2$