Лекция 8.

ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ТРЕХГРАННИК. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ.

8.1. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Пусть траектория точки M заранее известна. Рассматривая траекторию как криволинейную координатную ось, примем любую точку O траектории за начало отсчета и установим положительное и отрицательное направления отсчета.

Положение точки M однозначно определяется дуговой координатой, которая равна взятой с соответствующим знаком длине дуги траектории, отделяющей в данный момент времени точку M от начала отсчета M (Рис. 8.1). Движение точки будет задано, если задана зависимость дуговой координаты от времени: $s = s(t)$. Описанный способ задания движения называется естественным.

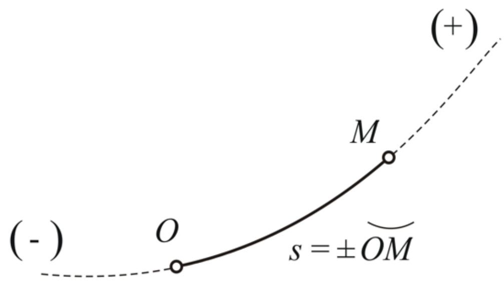

Рис.8.1. Траектория движения точки в естественной форме дана

Пример 8.1.

Точка движется по окружности радиуса r (Рис. 8.2). Дуговая координата изменяется по закону

$$S = \frac{\pi r}{2} sin \frac{\pi t}{2} \tag{8.1}$$

Начало и направление отсчета координаты S указаны на чертеже. Проанализировать движение точки при $t \geq 0$.

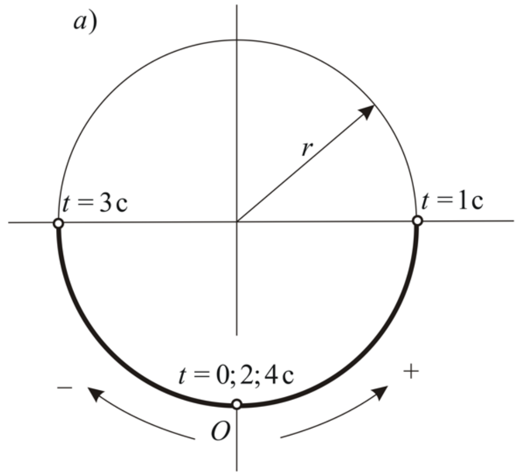

Рис. 8.2. Естественный способ задания движения точки

Имеет смысл для наглядности построить график движения (Рис. 8.3). Как видно из графика, точка начинает движение из начала отсчета дуговой координаты в положительном направлении (обход окружности против хода часовой стрелки). В этом направлении точка движется в течение одной секунды, за которую она успевает пройти дугу $S_1 = \frac{\pi r}{2}$, что составляет четверть длины окружности.

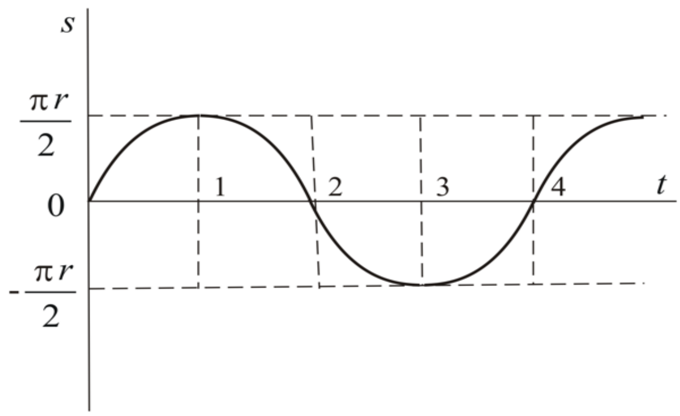

Рис. 8.3. График движения точки

Затем дуговая координата (8.1) начинает убывать, т.е. точка движется в противоположную сторону (к началу отсчета). При $t_2 = 2\ c$ дуговая координата обращается в нуль, т.е. точка попадает в начало отсчета O. Далее дуговая координата становится отрицательной, возрастая по модулю, т.е. точка удаляется от точки О в отрицательном направлении отсчета (по ходу часовой стрелки). К моменту $t_3 = 3\ c$ это удаление становится максимальным, равным четверти длины окружности.

Затем дуговая координата начинает возрастать. Точка снова поменяла направление движения и в момент $t_4 = 4\ c$ приходит в начало отсчета О.

После этого движение повторяется. Заметим, что траекторией точки в рассматриваемом случае будет только половина окружности, то есть её нижняя часть.

8.2. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ТРЕХГРАННИК.

Пусть точка М движется по траектории АВ, на которой установлена криволинейная система отсчета (Рис. 8.4).

В любой точке траектории существует единственная касательная. Обозначим $\vec{\tau}$ единичный вектор касательной; направлен $\vec{\tau}$ в сторону возрастания дуговой координаты. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью. Обозначим $\vec{n}$ единичный вектор главной нормали; $\vec{n}$ направлен в сторону вогнутости траектории. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется бинормалью. Ее единичный вектор $\vec{b}$ направлен так, чтобы векторы $\vec{\tau}, \vec{n}$ и $\vec{b}$ образовывали правую тройку.

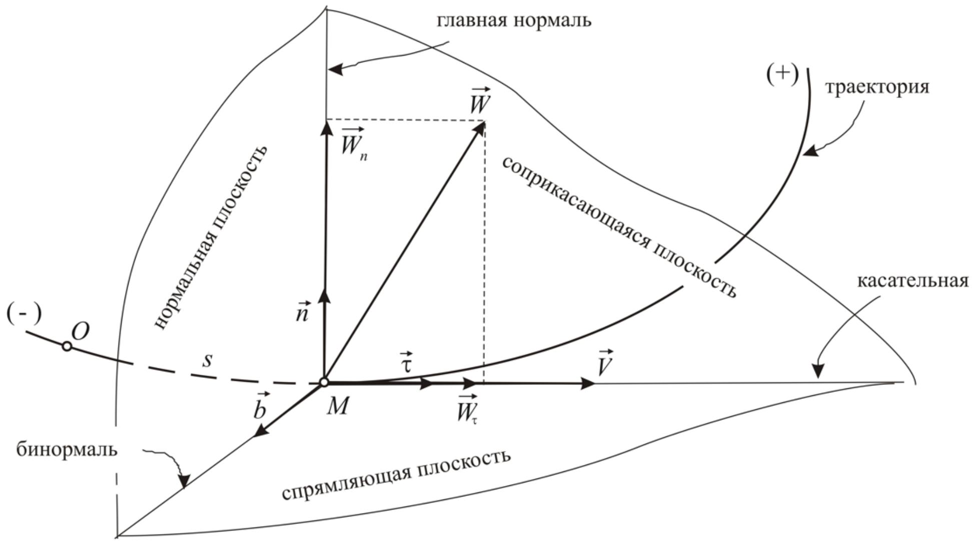

Рис. 8.4. Естественный трехгранник

Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости образуют естественный трехгранник. Касательная, главная нормаль и бинормаль – оси естественного трехгранника; $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$– орты этих осей.

Оси естественного трехгранника играют существенную роль в описании движения точки, поскольку в этих осях вектор скорости и вектор ускорения вычисляются наиболее удобным образом. Разложение этих векторов по осям естественного трехгранника имеет вид:

Вектор скорости точки проектируется на касательную ось естественного трехгранника:

$$\vec{V} = V_\tau \vec{\tau} \tag{8.2}$$

Вектор полного ускорения точки проектируется на касательную и нормальную оси естественного трехгранника, то есть вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости:

$$\vec{W} = W_\tau \vec{\tau} + W_n \vec{n} \tag{8.3}$$

где

V_τ– проекция вектора скорости на направление касательной к траектории;

W_τ– проекция вектора ускорения на направление касательной к траектории, ее называют касательным ускорением точки;

W_n– проекция вектора ускорения точки на направление главной нормали к траектории точки, ее называют нормальным ускорением точки.

Не останавливаясь на выводе формул, приведём конечные результаты для векторов скорости и ускорения точки.

Проекция вектора скорости на направление касательной к траектории точки равна первой производной по времени от дуговой координаты:

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{8.4}$$

Таким образом,

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \tag{8.5}$$

Касательное и нормальное ускорения точки определяются по формулам (8.6), (8.7):

$$W_\tau = \frac{d\,V_\tau}{dt} = \ddot{s} \tag{8.6}$$

$$W_n = \frac{{V_\tau}^2}{\rho} \tag{8.7}$$

Таким образом, вектор ускорения точки в естественных осях представляется в виде:

$$\vec{W} = \frac{d\,V_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{{V_\tau}^2}{\rho}\vec{n} \tag{8.8}$$

где ρ – радиус кривизны траектории в точке М. Не претендуя на строгость, попробуем пояснить это понятие. Среди линий постоянной кривизны особое место занимает окружность. Рассмотрим любую гладкую кривую (Рис. 8.5). Радиусом кривизны кривой в данной точке М называется радиус окружности, дуга которой в малой окрестности точки М совпадает с дугой заданной кривой. Заметим, что прямая также является кривой с постоянной кривизной. В каждой точке прямой радиус кривизны равен бесконечности ($\rho = \infty$).

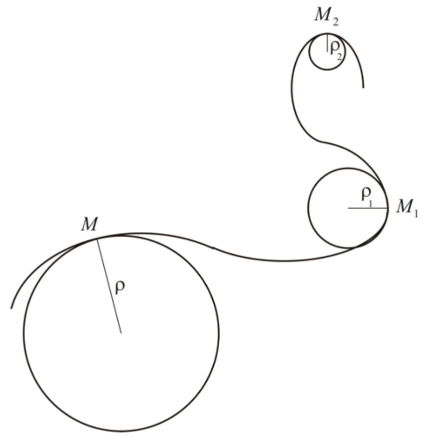

Рис. 8.5. Радиусы кривизны траектории движения точки

Как известно, производная по времени от какой-либо величины характеризует быстроту изменения со временем дифференцируемой величины. Ускорение характеризует изменение со временем вектора скорости. Вектор скорости может изменять со временем свой модуль и направление. Заметим, что касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное – изменение направления скорости. Единственное движение, при котором ускорение точки равняется нулю это равномерное прямолинейное движение. При любом неравномерном движении отлично от нуля касательное ускорение; при любом криволинейном движении отлично от нуля нормальное ускорение.

8.3 Вычисление скорости точки при естественном способе задания движения точки.

Определим скорость точки в случае, когда ее движение задано естественным способом, т. е. известны: ее траектория *AB,* начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения точки $s = f(t)$ (Рис 8.6)

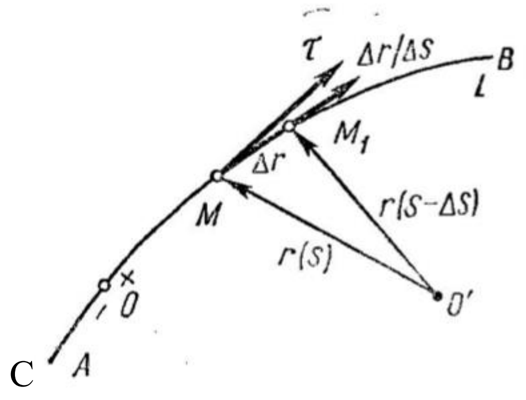

Рис 8.6. Приращение координаты за бесконечно малый промежуток времени

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ — положение M_1 дуговые координаты этих точек имеют следующие значения:

$$s = OM;\ s_1 = OM_1 = OM + MM_1 = s + \Delta s$$

Приращение дуговой координаты

$$\Delta s = \overset{\frown}{MM_1}$$

Проведем из произвольного центра 0' в точку M радиус-вектор и определим скорость точки в момент t по формуле:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \tag{8.9}$$

Введем в качестве промежуточной переменной дуговую координату s, от которой зависит радиус-вектор r движущейся точки действительно, каждому значению s соответствует определённое значение r, т.е. r можно рассматривать не только как функцию *t*, но и как функцию s, полагая *r = r (s)*.

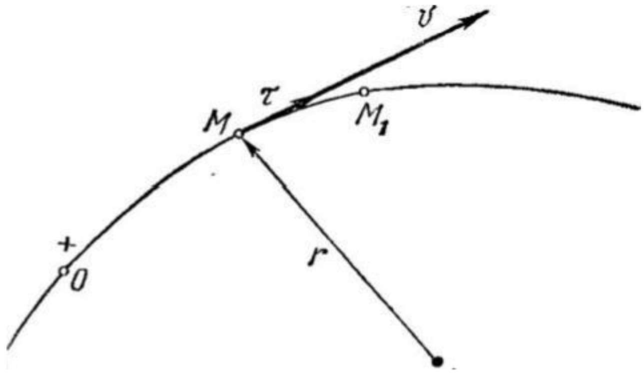

Рис.8.7. Скорость точки при естественном способе задания движения точки

Тогда получаем выражение для линейной скорости движущейся точки:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{ds} \times \frac{ds}{dt} \tag{8.10}$$

Здесь

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \tag{8.11}$$

Вектор $\Delta\vec{r}/\Delta s$направлен так же, как вектор $\Delta\vec{r}$. При $\Delta s \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки М в сторону увеличения дуговой координаты s. Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{M \to M_1} \frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1 \tag{8.12}$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{dr}/ds$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой

координаты. Вектор $\overrightarrow{dr}/ds$ является ортом этого направления. Обозначим этот орт $\vec{\tau}$ (Рис. 8.7):

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{dr}/ds \tag{8.13}$$

Получаем вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \vec{\tau} \times \frac{ds}{dt} \qquad (8.14)$$

Производная ds/dt в выражении представляет собой проекцию скорости v на касательную, т. е. определяет алгебраическую величину скорости. Условимся алгебраическую величину скорости обозначать символом v, а модуль скорости — буквой v. Тогда

$$\tilde{v} = ds/dt$$

а модуль линейной скорости точки находится в виде:

$$v = |\tilde{v}| = |ds/dt|$$

т. е. модуль скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени.

Орт касательной $\vec{\tau}$, как показано выше, всегда направлен в сторону увеличении дуговой координаты.

Если в некоторый момент времени $ds/dt > 0$, то в этот момент функция s возрастает, т. е. точка движется в сторону увеличения s и направление скорости $\vec{v}$ совпадает с направлением орта $\vec{\tau}$.

Если ds/dt <0, то в этот момент функция s убывает и направление скорости v противоположно направлению орта $\vec{\tau}$ (Рис. 8.7).

Если, непрерывно изменяясь производная ds/dt при переходе через значение $ds/dt = 0$ изменяет знак, то дуговая координата s в этот момент времени достигает максимума или минимума, т. е. изменяется направление движения точки.

Таким образом, знак $\tilde{v} = ds/dt$ указывает направление движения точки по траектории.

При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты $ds/dt > 0$, т. е, $ds/dt = |ds/dt|$во все моменты времени, а потому согласно, модуль скорости $v = ds/dt$.

8.4 Вычисление ускорения точки при естественном способе задания движения точки.

Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси. Для этого представим вектор скорости точки по формуле

$$\vec{v} = \vec{\tau} \bullet ds/dt \tag{8.15}$$

$$\vec{v} = \vec{\tau} \bullet ds/dt$$

Определим ускорение точки по формуле, продифференцировав по t произведение двух переменных величин:

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{dr}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{8.16}$$

Получаем

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{K} = \vec{n} \times \frac{1}{\rho} \tag{8.17}$$

Так как проекция скорости на касательную $\tilde{v} = ds/dt$ может отличаться от модуля скорости v только знаком, то

$$(ds/dt)^2 = v^2 \tag{8.18}$$

Подставив эти выражения, получим вектор ускорения в виде

$$\vec{w} = \vec{n} \times \frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{8.19}$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется нормальным ускорением, а другой направлен по касательной и называется касательным ускорением точки

$$\vec{w} = \overrightarrow{w_n} + \vec{w}_\tau$$

где нормальное ускорение точки

$$\overrightarrow{w_n} = \vec{n}\frac{\upsilon^2}{\rho}$$

а касательное ускорение точки

$$\vec{w}_\tau = \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{\tau}\frac{d\tilde{\upsilon}}{dt^2}$$

Скалярные множители υ^2/ρ и d^2s/dt^2, определяющих нормальное и касательное ускорение точки, представляют собой проекции ускорения точки на главную нормаль и касательную.

Проекция ускорения точки на бинормаль оказалась равной нулю, так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости.

$$w_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} \tag{8.20}$$

т. е. проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Эта проекция всегда положительна. роз этого следует, что нормальное ускорение точки всегда направлено к центру кривизны траектории и равно по модулю этой проекции.

Условимся алгебраическую величину касательного ускорения обозначать $\widetilde{w_\tau}$, а его модуль w_τ.

$$\widetilde{w_\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\tilde{\upsilon}}{dt^2} \tag{8.21}$$

т. е. проекция ускорения точки ха касательную равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени.

Эта проекция имеет знак плюс, если направления касательного ускорения точки $\vec{w}_\tau$ и орта $\vec{\tau}$ совпадают, и знак минус, если они противоположны. Очевидно, что

$$w_\tau = |\widetilde{w_\tau}| = \left|\frac{d^2 s}{dt^2}\right| = \left|\frac{d\tilde{v}}{dt^2}\right| \quad (8.22)$$

Таким образом, в случае естественного способа задания движения, когда известны траектория точки, а следовательно, ее радиус кривизны р в любой точке и уравнение движения $s = f\ (t)$, можно найти проекции ускорения точки на естественные оси и по ним определить модуль ускорения точки:

$$w = \sqrt{w_\tau{}^2 + w_n{}^2} \quad (8.23)$$

И направление вектора полного ускорения точки по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{w}; \vec{\tau}) = \frac{\widetilde{w_\tau}}{w} \quad (8.24)$$

$$\cos(\vec{w}; \vec{n}) = \frac{w_n}{w} \quad (8.25)$$

где $(\vec{\omega}; \vec{\tau})$ и $(\vec{\omega}; \vec{n})$ - углы, образованные направлением ускорения с принятыми направлениями касательной и главной нормали в данной точке.
Если проекции скорости v и касательного ускорения на касательную $\tilde{v} = ds/dt$ и $\widetilde{w_\tau} = d^2 s/dt^2$ имеют одинаковые знаки, то и направления этих векторов совпадают, т. е. точка движется ускоренно.

Если же их проекции $\tilde{v} = ds/dt$ и $\widetilde{w_\tau} = d^2 s/dt^2$ имеют различные знаки, то и направления $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ противоположны, т. е. точка движется замедленно.
Модуль касательного ускорения точки можно также определить по формуле

$$w_\tau = |dv/dt\ | \quad (8.26)$$

где v — модуль скорости точки.

При этом, если $dv/dt > 0$, т. е. модуль скорости возрастает, точка движется ускоренно, а если dv/dt <0 — замедленно.

При прямолинейном движении точки радиус кривизны траектории,р $= \infty$ и, следовательно,

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \qquad (8.27)$$

Нормальное ускорение существует лишь при криволинейном движении точки и характеризует изменение направления скорости.

При равномерном движении точки $v = const$ и, следовательно,

$$w_n = |dv/dt| = 0$$

Касательное ускорение точки существует лишь при неравномерном движении тонки и характеризует изменение модуля скорости. В том случае, если требуется определить касательное и нормальное ускорения движения точки, заданного уравнениями движения, то сначала по формулам определяют модули скорости и ускорения точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \qquad (8.28)$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \qquad (8.29)$$

$$w_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right| = \left|\frac{v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\right|$$

$$w_\tau = \left|\frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{v}\right| \qquad (8.30)$$

где знак плюс, полученный в ответе после вычисления дроби, соответствует ускоренному движению точки, а знак минус - замедленному.

Нормальное ускорение точки определяется по формуле

$$w_n = \sqrt{w^2 + w_\tau{}^2}$$

Радиус кривизны кривой находим по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

Пример 8.1

Определить и построить графики зависимостей $W_\tau(t), V_\tau(t), S(t), L(t)$, где L -пройденный путь. Показать положение точки на траектории в начальный момент и в момент времени t^*. Для указанных моментов времени определить и изобразить на чертеже векторы скорости, касательного и нормального ускорений, а также вектор полного ускорения для указанных моментов времени.

$$S=\pi r\cdot(t-1)^2 \text{ (м)}; \qquad t^* = t = 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ с}.$$

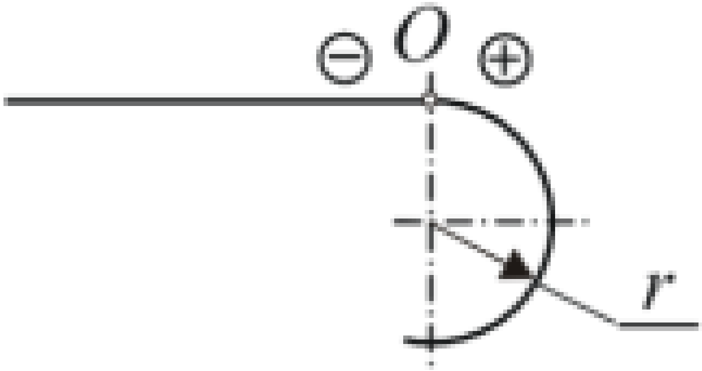

Рис 8.8. Естественный способ задания движения точки

Решение

Проекция скорости на касательную к траектории:

$$V(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r\cdot(t-1)^2) = 2\pi r\cdot(t-1) \text{ м/с}$$

График – прямая

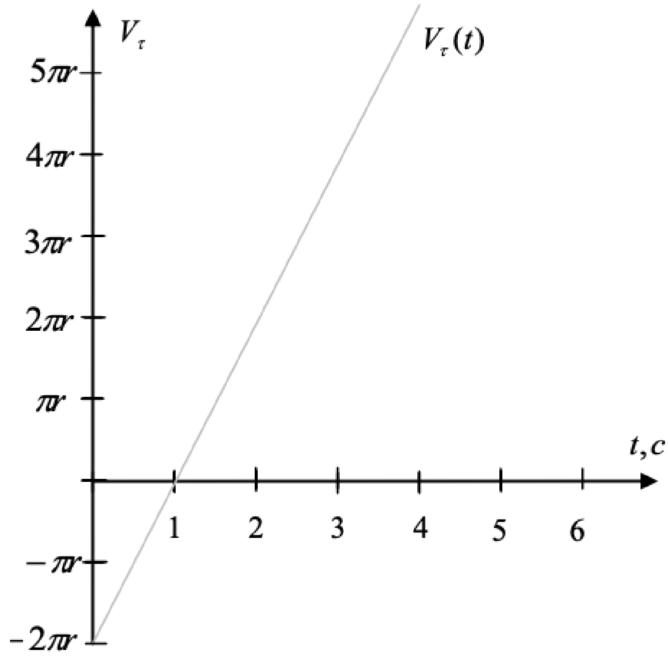

Рис 8.9. Зависимость скорости точки от времени ее движения

Касательное ускорение:

$$W(t)=\frac{dV_\tau}{dt}=\frac{d}{dt}(2\pi r\cdot(t-1))=2\pi r\ (м/с)$$

То есть получили, что для любого момента времени касательное ускорение – постоянная величина. Изображаем ее на графике.

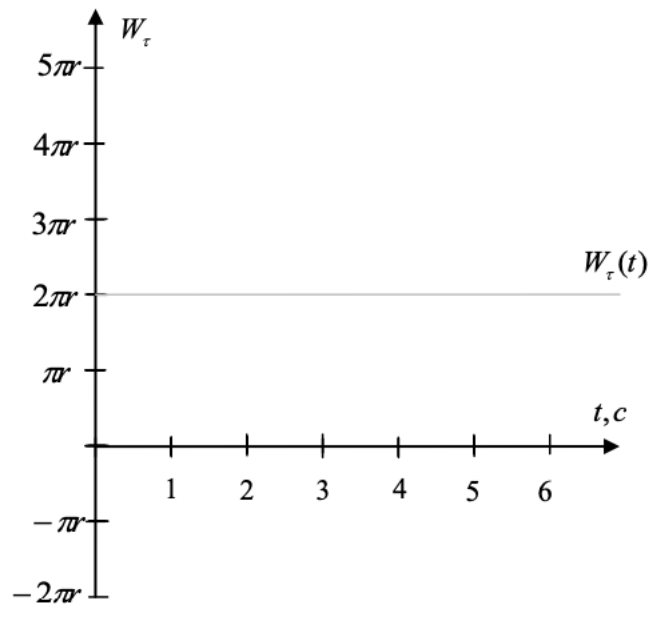

Рис 8.10. Зависимость касательного ускорения точки от времени

Дуговая координата $S = \pi r \cdot (t - 1)^2$ (м) .

График движения точки – парабола. Рисуем её.

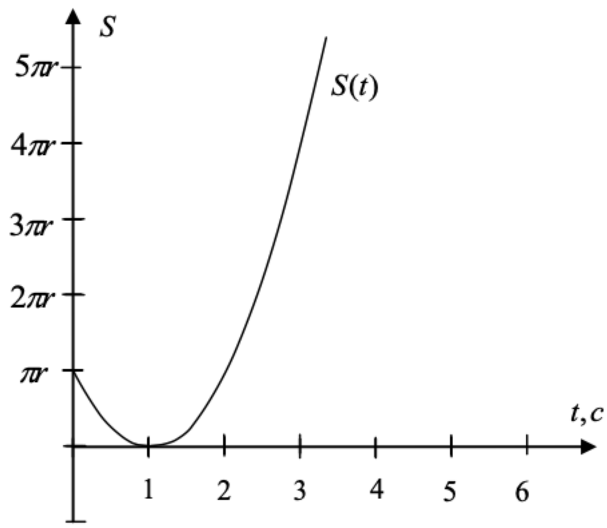

Рис 8.11. Зависимость криволинейной координаты от времени

При $0 \leq t \leq 1\ c$ дуговая координата - убывающая функция и путь

на этом промежутке времени будет равен:

$$L(t)=S(0)-S(t)=\pi r\cdot(0-1)^2 -\pi r\cdot(t-1)^2 =\pi r-\pi r\cdot(t-1)^2 \text{ (м)}$$

При $t \geq 1c$ будет равен

$$L(t)=S(t)+L(1)=\pi r\cdot(t-1)^2 +\pi r-\pi r\cdot(1-1)^2 =\pi r\cdot(t-1)^2 +\pi r\text{(м)}$$

Значит пройденный путь описывается функцией:

$$L(t) = \begin{cases} \pi r - \pi r(t-1)^2 \text{ (м)}, & 0 \leq t \leq 1c \\ \pi r(t-1)^2 + \pi r \text{ (м)}, & t \geq 1c \end{cases}$$

И ее график

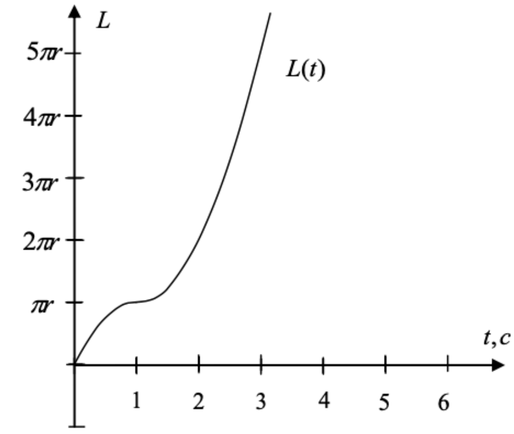

Рис 8.12. Зависимость пути $L = L(t)$от времени

Покажем положение точки на траектории в начальный момент и в момент времени $t^* = t_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

S(0)=πr·(0–1) =πr(м), центральный угол равен: $\frac{S(0)}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$

$$S\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{\pi r}{3}$$

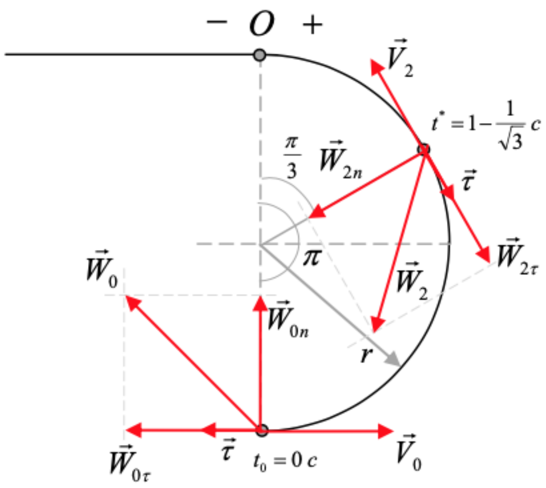

Рис 8.13. Изображение всех кинематических характеристик точки

Скорость точки в начальный момент времени: V(0)=2πr·(0–1)=–2πr (м/с)

В момент времени $t^* = t_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ *(с)*:

$$V_\tau\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\pi r\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi r\ \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$$

Касательное ускорение одинаково для обоих моментов времени:

$$W_{0\tau}=W_{2\tau}=2\pi r \text{ м/с}^2$$

Нормальное ускорение в начальный момент времени равно:

$$W_{0n}=\frac{{V_0}^2}{\rho}=\frac{(2\pi r)^2}{r}=4\pi^2 r\ \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$$

и направлено к центру полуокружности.

Модуль полного линейного ускорения точки в начальный момент времени равен:

$$W=\sqrt{{W_{0n}}^2+{W_{0\tau}}^2}=\sqrt{(2\pi r)+(4\pi r)}=2\pi r 1+4\pi\ (\text{м/с}^2).$$

Нормальное ускорение в момент времени $t^*=t_3=\frac{1}{2}\ c$ равно:

$$W_{0n}=\frac{{V_0}^2}{\rho}=\frac{(2\pi r)^2}{r}=4\pi^2 r\ \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$$

и направлено к центру полуокружности.

Модуль полного линейного ускорения точки в момент времени

$t^*=t_2=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\,(c)$ равен:

$$W_2=\sqrt{{W_{2\tau}}^2+{W_{2n}}^2}=\sqrt{(2\pi r)^2+\left(\frac{4}{3}\pi^2 r\right)^2}=\frac{2}{3}\pi r\sqrt{9+4\pi^2}\ \left({}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\right)$$

Ответ: $W_2 = \frac{2}{3}\pi r\sqrt{9 + 4\pi^2}$ $\quad {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$