

2. КИНЕМАТИКА

Лекция 7.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ.

7.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ.

Кинематика – один из разделов курса теоретической механики, в котором рассматривается движение тел без учета причин, приводящих к изменению этого движения, то есть без учета сил.

Под движением в механике понимаем изменение с течением времени положения тела в пространстве по отношению к другим телам. Это означает, что изучая движение какого-либо тела, необходимо указать другое тело — тело отсчета, по отношению к которому рассматривается движение. С телом отсчета жестко связана система координат. Тело отсчета, связанная с ним система координат и счетчик времени — часы образуют систему отсчета. Поскольку в классической механике считается, что время не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и во всех системах отсчета, то, говоря о системе отсчета, обычно задают только тело отсчета, а еще чаще, только систему координатных осей, связанных с телом отсчета.

Положение точки или тела по отношению к выбранной системе отсчета определяется некоторыми параметрами — координатами. Движение будет задано, если известен закон, по которому эти координаты изменяются с течением времени. Разработка методов, при помощи которых может быть задано движение точки или тела — одна из задач кинематики. Другая задача кинематики состоит в том, чтобы зная закон движения точки или тела, определить кинематические величины, характеризующие движение, то есть скорости, ускорения и так далее.

Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется траекторией точки. По виду траектории все движения точки делятся на прямолинейные и криволинейные. Изучение движения точки заключается в определении основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчета, а также ее скорости и ускорения в любой момент времени. Эта задача решается различными способами. Существуют три способа задания движения точки: естественный, векторный и координатный.

7.2. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Положение точки М в системе отсчета полностью определяется ее координатами. Если известна зависимость координат от времени, движение точки считается заданным. В зависимости от содержания решаемой задачи можно использовать любую систему координат (декартову, цилиндрическую, сферическую и т.д.), наиболее целесообразную для решения данной задачи. Мы, в основном, будем использовать прямоугольную декартову систему координат, в которой законы движения точки имеют вид:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad (7.1)$$

где t – это время.

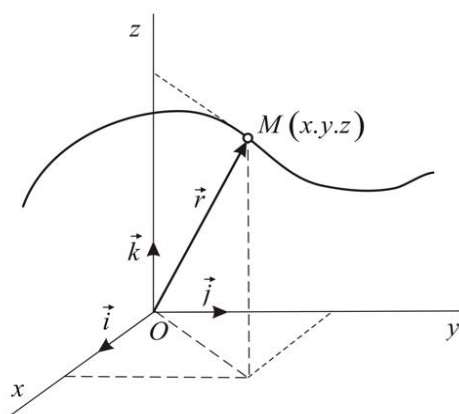


Рис. 7.1. Координаты произвольной точки M .

Вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат в точку M , называется радиусом–вектором точки. Координаты точки M одновременно являются проекциями радиуса–вектора на координатные оси (Рис. 7.1):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (7.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, их ещё называют орты координатных осей. По модулю данные векторы равны единице, они показывают в какую сторону направлены оси координат.

Опр. Непрерывная кривая, которую описывает точка при своем движении, называется траекторией точки.

Уравнения (7.1) представляют собой уравнения траектории в параметрической форме, где роль параметра играет время t . Придавая параметру t ряд последовательных значений, начиная с нуля, например, с интервалом в одну секунду, получаем ряд последовательных положений точки в пространстве или на плоскости. Соединяя построенные точки плавной кривой, получаем траекторию. Очевидны недостатки такого способа построения траектории. С одной стороны, он достаточно трудоемок, а с другой

стороны, его точность зависит от выбранного для вычислений временного интервала.

Намного удобнее получить уравнение траектории в координатной форме. Для этого необходимо из уравнений движения (7.1) исключить параметр t . При этом следует учитывать только те значения координат, которые соответствуют неотрицательным значениям параметра t .

Пример 7.1.

Даны законы движения точки в координатной форме:

$$x = t; \quad y = \frac{t^2}{2} - 1; \quad z = 0$$

Определить траекторию точки.

Решение

Исключая время из уравнений движения, с учетом

$$x = t$$

получаем уравнение параболы:

$$y = \frac{x^2}{2} - 1 \quad z = 0$$

Однако, уравнения движения и заданный интервал времени налагают ограничения на область допустимых значений координат:

$$\text{при } t \geq 0 \text{ имеем: } x \geq 0; y \geq -1$$

Таким образом, траекторией будет только правая ветвь параболы (Рис. 7.2).

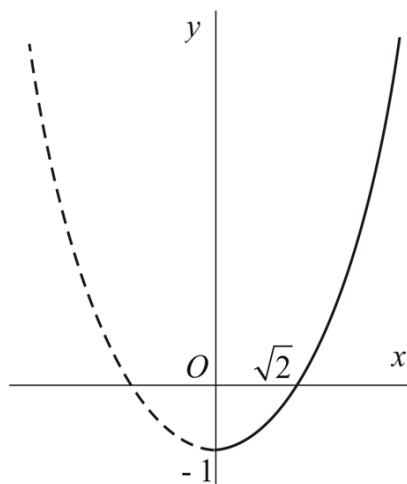


Рис. 7.2. Траектория движения точки

7.3. СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Быстроту движения точки характеризует ее скорость, к определению которой мы сейчас переходим.

Пусть в момент времени t точка находится в положении M , которое определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ переходит в положение M_1 , радиус-вектор которого $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$

(Рис. 7.3). Вектор $\Delta\vec{r}$ называется вектором перемещения точки за время Δt . Если разделить вектор перемещения на Δt , получим вектор того же направления, что и $\Delta\vec{r}$, который определяет среднюю по модулю и направлению скорость точки за время Δt .

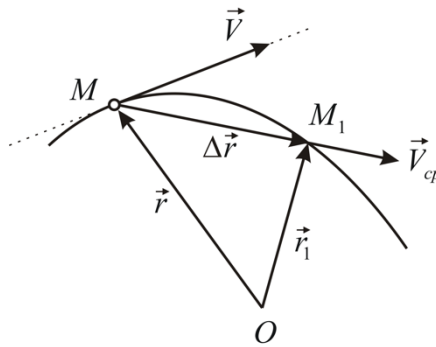


Рис.7.3. Вектор средней скорости точки

Понятно, что средняя скорость зависит от выбранного промежутка времени и тем точнее характеризует быстроту движения, чем меньшим выбран промежуток времени Δt .

Скоростью точки в данный момент времени называется предел отношения вектора перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло, при величине промежутка времени, стремящейся к нулю:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (7.3)$$

Таким образом,

Вектор скорости равен первой производной по времени от радиуса-вектора точки.

В пределе при $M \rightarrow M_1$ секущая MM_1 , по которой направлена средняя скорость, занимает положение касательной к траектории в точке M . Следовательно,

Вектор скорости направлен по касательной к траектории, причем в сторону движения точки.

Пусть движение точки задано в координатной форме, то есть уравнениями (7.1). Используя равенство (7.2) и учитывая, что орты координатных осей со временем не изменяются, получаем:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Таким образом, проекции вектора скорости на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt}\dot{x} \quad V_y = \frac{dy}{dt}\dot{y} \quad V_z = \frac{dz}{dt}\dot{z} \quad (7.4)$$

7.4. СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Быстроту изменения вектора скорости характеризует ускорение точки. Пусть в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\vec{V}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$, переходит в положение M_1 и имеет скорость $\vec{V}_1$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$, переходит в положение M_1 и имеет скорость

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}$$

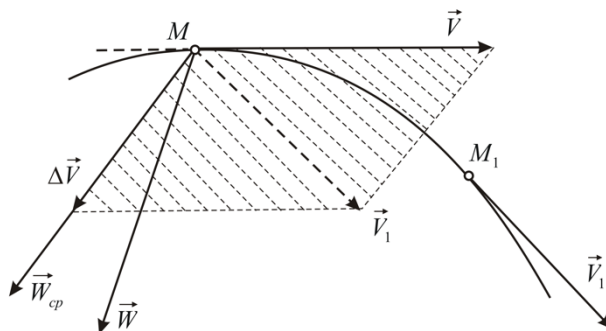


Рис. 7.4. Расположение вектора скорости и ускорения точки в соприкасающейся плоскости

Ускорением точки называется предел отношения приращения вектора скорости к промежутку времени, за который это приращение произошло, при величине промежутка времени, стремящейся к нулю:

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (7.5)$$

Таким образом,

Ускорение точки равно первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от радиуса-вектора точки.

Если траектория – плоская кривая, то вектор ускорения лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория – пространственная кривая, то при предельном переходе $M \rightarrow M_1$ плоскость, содержащая вектор среднего ускорения (на чертеже заштрихована), будет поворачиваться вокруг вектора $\vec{V}$ и в пределе займет положение, которое называется соприкасающейся плоскостью к траектории в точке M . Таким образом,

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся к траектории в данной точке плоскости, причем направлен в сторону вогнутости траектории.

Пусть движение точки задано в координатной форме, то есть уравнениями (7.1). Тогда

$$\vec{W} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}$$

Таким образом, проекции вектора ускорения на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующих проекций вектора скорости или, учитывая равенства (5.4), вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} \ddot{x} \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} \ddot{y} \quad W_z = \frac{dV_z}{dt} \ddot{z} \quad (7.6)$$

Пример 7.1

По заданным уравнениям движения точки построить траекторию, найдя ее уравнение в координатной форме. Определить и показать на чертеже положение точки в начальный момент и в момент времени t_1 . Для указанных моментов времени найти скорость и ускорение точки. Изобразить на чертеже соответствующие векторы $\vec{V}_0, \vec{W}_0$ и $\vec{V}_1, \vec{W}_1$.

Решение

Для получения уравнения траектории исключаем время t из данных уравнений.

Из уравнения для координаты x : $e^{0,5t} = -x$

Тогда второе уравнение примет вид:

$$y = 3 + 2 \cdot (e^{0,5t})^2 = 3 + 2 \cdot (-x)^2 = 3 + 2 \cdot x^2$$

Траекторией точки является парабола $y = 3 + 2x^2$ с вершиной в точке $(0;3)$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ положение точки:

$$x_0 = -e^{0,5 \times 0} = -1 \text{ (м)};$$

$$y = 3 + 2 \cdot e^0 = 5 \text{ (м)};$$

Следовательно, точка начинает двигаться из точки $(-1;5)$ и будет продолжать движение по левой ветви параболы.

Скорость найдем по проекциям скорости на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(-e^{0,5t}) = -0,5e^{0,5t} \text{ м/с}$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(3 + 2e^t) = 2e^t \text{ м/с}$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ проекции скорости точки:

$$V_{0x} = -0,5 \cdot e^{0,5 \cdot 0} = -0,5 \text{ м/с}$$

$$V_{0y} = 2 \cdot e^0 = 2 \text{ м/с}$$

Ее модуль равен:

$$V_0 = \sqrt{V_{0y}^2 + V_{0x}^2} = (-0,5)^2 + 2^2 = 2,06 \text{ м/с}$$

В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$

$$V_{1x} = -0,5 \cdot e^2 = -0,83 \text{ м/с}$$

$$V_{1y} = 2 \cdot e^1 = 2 \cdot e = 5,43 \text{ м/с}$$

Ее модуль равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{1y}^2 + V_{1x}^2} = (-0,83)^2 + 5,43^2 \approx 5,49 \text{ м/с}$$

Определяем ускорение точки по проекциям ускорения точки на координатные оси:

$$w_x = \dot{V}_x = \frac{d}{dt}(-0,5e^{0,5t}) = -0,25e^{0,5t} \text{ м/с}^2$$

$$w_y = \dot{V}_y = \frac{d}{dt}(2e^t) = 2e^t \text{ м/с}^2$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ проекции ускорения точки:

$$w_{0x} = -0,25 \cdot e^{0,5 \cdot 0} = -0,25 \text{ м/с}^2$$

$$w_{0y} = 2 \cdot e^0 = 2 \text{ м/с}^2$$

Его модуль равен:

$$w_0 = \sqrt{w_{0y}^2 + w_{0x}^2} = (-0,25)^2 + 2^2 = 2,02 \text{ м/с}$$

В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$

$$w_{1x} = -0,25 \cdot e^{0,5 \cdot 1} = -0,41 \text{ м/с}^2$$

$$w_{1y} = 2 \cdot e^1 = 2 \cdot e = 5,43 \text{ м/с}^2$$

Его модуль равен:

$$w_1 = \sqrt{w_{1y}^2 + w_{1x}^2} = (-0,41)^2 + 5,43^2 = 5,45 \text{ м/с}$$

Покажем на Рис.7.5 положение точки и векторов скорости и ускорения в начальный момент времени (масштаб построений: $1 \text{ м} - 1 \text{ см}$; $0,5 \text{ м/с} - 1 \text{ см}$; $0,5 \text{ м/с}^2 - 1 \text{ см}$), а на Рис.7. 6 – в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$

(масштаб построений: $1 \text{ м} - 1 \text{ см}$; $10 \text{ м/с} - 1 \text{ см}$; $20 \text{ м/с}^2 - 1 \text{ см}$)

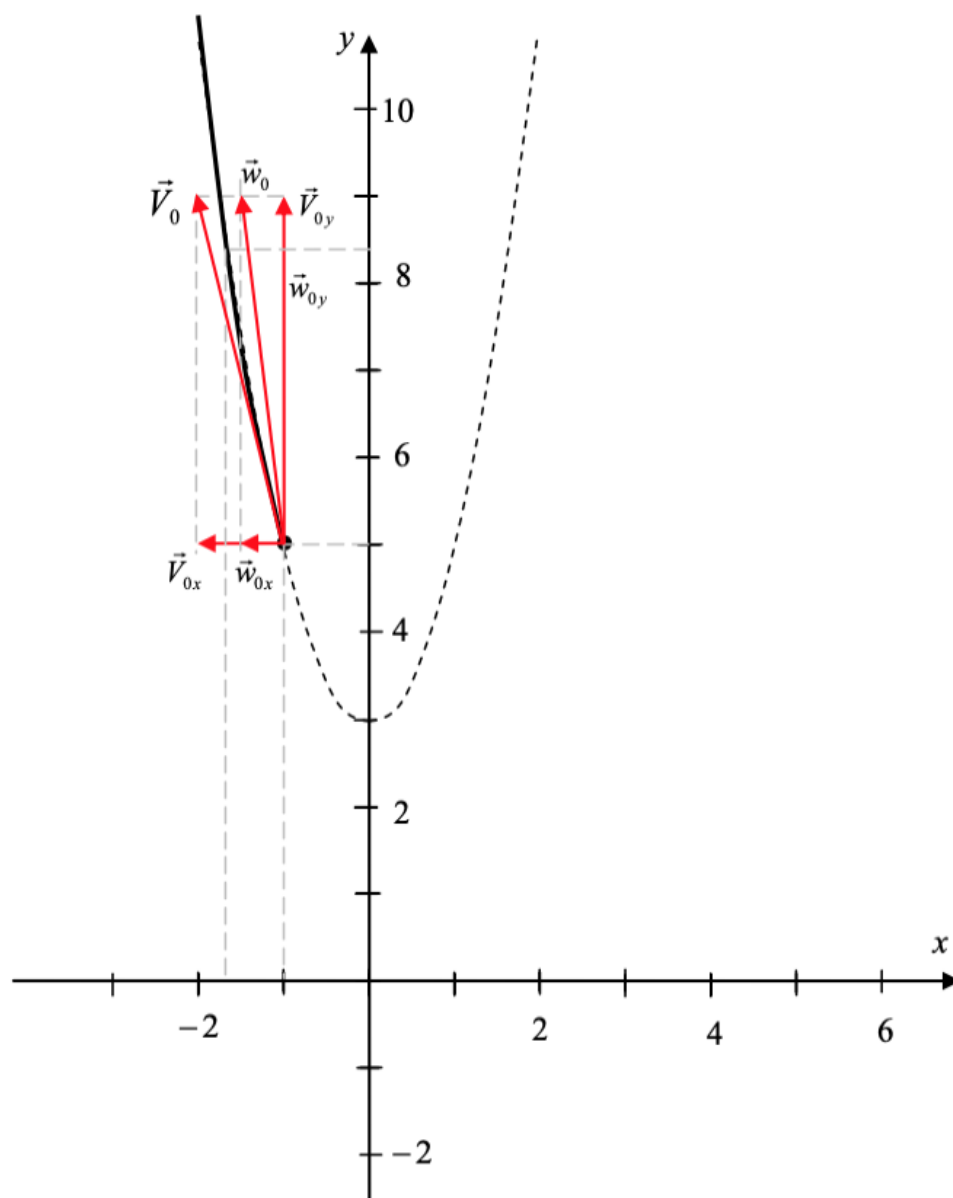


Рис 7.5. Расположение векторов скорости и ускорения точки в начальный момент времени

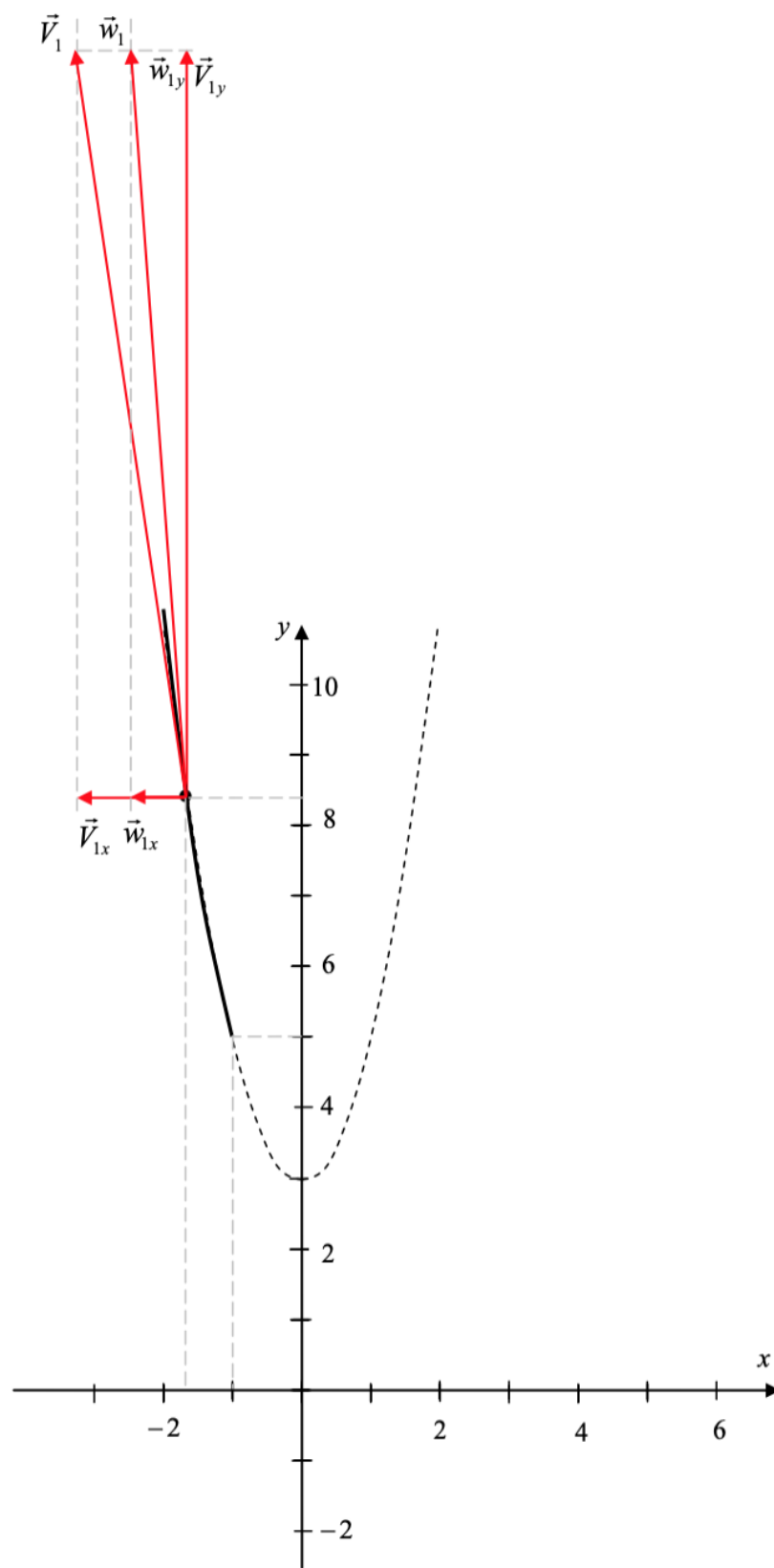


Рис 7.6. Расположение векторов скорости и ускорения точки в данный момент времени