

Лекция 13.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ СИЛ.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

13.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть механическая система движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Для любой точки механической системы справедлив второй закон Ньютона:

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (13.1)$$

где m_k — масса точки с номером k ; $\vec{r}_k$ — её радиус–вектор;

$\vec{F}_k^e$ — равнодействующая всех внешних сил, как активных, так и реакций внешних связей, действующих на точку с номером k ; $\vec{F}_k^i$ — равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку.

Система уравнений (13.1) называется системой дифференциальных уравнений движения точек механической системы.

Прямое интегрирование системы уравнений (13.1) в большинстве случаев затруднительно, что связано как с возможно большим числом уравнений в

системе, так и с недостатком информации о внутренних силах, что происходит в большинстве случаев. Однако, во многих практически интересных случаях нет необходимости определять все интегралы системы (13.1), достаточно знать лишь некоторые из них. Это позволяют сделать общие теоремы динамики. Являясь прямым следствием системы (13.1), общие теоремы динамики устанавливают связь между основными кинематическими характеристиками механической системы и приложенными к ней внешними силами.

13.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ СИЛ.

Основная задача динамики механической системы состоит в том, чтобы, зная приложенные к системе силы (полностью или частично), определить движение каждой точки системы.

Все силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Опр.1 *Внутренними называют силы взаимодействия между точками данной механической системы.*

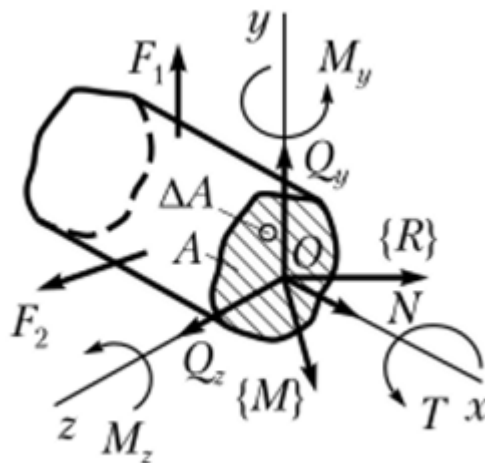


Рис.13.1. Внутренние силы, действующие на точки механической системы

Опр.2 Внешними называют силы, с которыми на точки данной механической системы действуют окружающие тела, не входящие в систему.

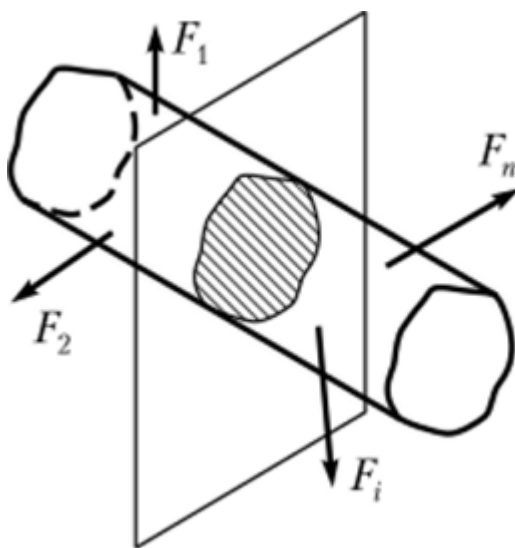


Рис.13.2. Внешние силы, действующие на механическую систему

Рассмотрим основные свойства внутренних сил. В основу одного из подходов к решению задачи об определении закона движения механической системы положена идея исключения из дифференциальных уравнений движения (13.1) внутренних сил системы.

Рассмотрим две любые точки M_i и M_j механической системы, состоящей из n материальных точек. В соответствии с третьим законом Ньютона они взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны (Рис.13.3). При этом по третьему закону Ньютона, то есть по закону действия и противодействия имеем соотношение между этими силами:

$$\vec{F}_{ij}^i = -\vec{F}_{ji}^i$$

или

$$\vec{F}_{ij}^i + \vec{F}_{ji}^i = 0.$$

Внутренние силы действуют на точки механической системы попарно, поэтому

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0. \quad (13.2)$$

Таким образом, доказали первое основное свойство внутренних сил, которое формулируется следующим образом.

Свойство 1. Геометрическая сумма всех внутренних сил механической системы равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0.$$

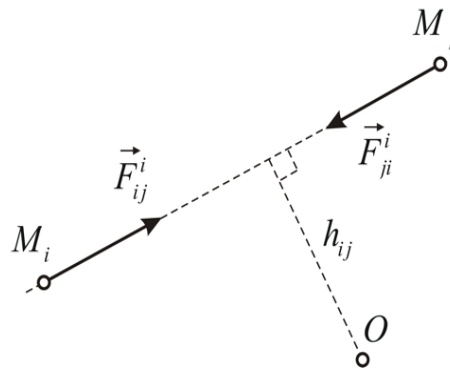


Рис. 13.3. Взаимодействие двух точек, входящих в состав механической системы

Найдем сумму моментов сил $\vec{F}_{ij}^i$ и $\vec{F}_{ji}^i$ относительно произвольно выбранной точки O . Как следует из определения, моменты этих сил противоположны по направлению и равны по модулю. Следовательно, их сумма равна нулю. Учитывая, что внутренние силы всегда действуют на точки, входящие в состав механической системы попарно, получаем второе основное свойство внутренних сил:

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = 0. \quad (13.3)$$

Таким образом, второе основное свойство внутренних сил формулируется следующим образом.

Свойство 2. *Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил механической системы относительно произвольно выбранного центра равна нулю.*

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k^i) = 0.$$

13.3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Сложим левые и правые части системы n - уравнений (13.1):

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

Учитывая первое основное свойство внутренних сил (13.2), получаем:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (13.4)$$

Преобразуем левую часть равенства (13.4). Учитывая, что масса точки считается постоянной, и что получаем:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (m_k \vec{V}_k) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \right).$$

Произведение массы точки на вектор ее скорости $\vec{q} = m\vec{V}$ называется количеством движения материальной точки.

Опр.3 *Количеством движения механической системы называется сумма количеств движения всех ее точек:*

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k. \quad (13.5)$$

Равенство (13.4) принимает вид:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (13.6)$$

Доказана *теорема об изменении количества движения механической системы:*

Производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех приложенных к системе внешних сил.

13.4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Умножим каждое из уравнений системы (13.1) слева векторно на радиус-вектор соответствующей точки и сложим все полученные уравнения:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^t + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i.$$

Учитывая второе основное свойство внутренних сил (13.3), получаем:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k^e). \quad (13.7)$$

Опр.4 *Вектор $\vec{l}_o = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m \vec{V}$ называется моментом количества движения материальной точки относительно центра O.*

Заметим, что техника вычисления момента количества движения относительно центра или оси такая же, как техника вычисления момента силы относительно центра или оси.

Опр.5 Сумма моментов количеств движения всех точек механической системы называется моментом количества движения или кинетическим моментом механической системы относительно центра O:

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \times \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k. \quad (13.8)$$

Вычислим производную по времени от кинетического момента:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{V}_k \right) + \left(\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \right]$$

Первое слагаемое в квадратной скобке равно нулю, так как векторно перемножаются два коллинеарных вектора. Таким образом,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum \vec{r}_k \times m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}.$$

Сравнивая последний результат с левой частью равенства (13.7), получаем:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O \left(\vec{F}_k^e \right). \quad (13.9)$$

Доказана ***теорема об изменении кинетического момента механической системы:***

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно произвольно выбранного неподвижного центра

равна сумме моментов всех приложенных к системе внешних сил относительно того же центра.

13.5. ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Инерционные свойства материального тела определяются не только его массой, но и характером распределения этой массы в теле. Существенную роль в описании такого распределения играет положение центра масс тела.

Центром масс механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (13.10)$$

где m — масса механической системы.

Нетрудно видеть, что положение центра масс тела, помещенного в однородное поле силы тяжести, совпадает с положением его центра тяжести. При определении положения центра масс тела можно пользоваться всеми методами, разработанными для определения положения центра тяжести твердого тела или механической системы, такими как метод симметрии, метод разбиений, метод отрицательных масс и так далее.

Дифференцируя равенство (13.10) по времени

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = m \vec{V}_c.$$

и, сравнивая результат с определением количества движения системы, получаем простой способ вычисления количества движения механической системы:

$$\vec{Q} = m \vec{V}_c, \quad (13.11)$$

где $\vec{V}_c$ – скорость центра масс механической системы; m – ее масса.

Подставляя (13.11) в теорему об изменении количества движения механической системы (13.6), получаем закон движения центра масс:

$$m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (13.12)$$

то есть доказали следующее утверждение:

Центр масс механической системы движется также, как материальная точка, масса которой равна массе механической системы, и к которой приложена сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на механическую систему.

Сформулированное утверждение обычно называют *теоремой о движении центра масс механической системы*.