

Лекция 6.

ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ КУЛОНА. ТРЕНИЕ ПОКОЯ, СКОЛЬЖЕНИЯ, КАЧЕНИЯ, ВЕРЧЕНИЯ.

6.1. ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ КУЛОНА.

Рассмотрим реакцию негладкой поверхности. Пусть некоторое тело, находящееся на неподвижной поверхности, нагружено неуравновешенной системой активных сил. Со стороны опорной поверхности на тело будет действовать система сил реакций, непрерывным образом распределённая по площадке контакта. При решении ряда задач делается упрощающее предположение о том, что поверхности тел являются идеально гладкими.

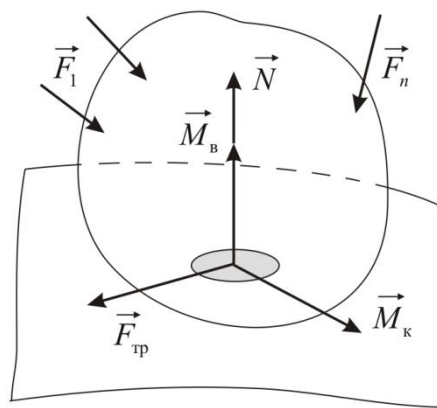


Рис.6.1. Реакция негладкой поверхности

При таком предположении силы действия и противодействия, возникающие при контакте, будут нормальны к площадке контакта и система сил реакций будет иметь равнодействующую, приложенную в некоторой точке площадки контакта, которая также будет нормальна к опорной поверхности. Следует отметить, что подобная модель не в состоянии объяснить ряд существенных явлений, например, почему останавливается тело, скользящее или катящееся по инерции по горизонтальной поверхности.

Рассмотрим более сложную модель взаимодействия соприкасающихся тел. Допустим, что силы взаимодействия, возникающие в точках площадки контакта, имеют не только нормальную, но и касательную составляющие. Приведём систему сил реакций к некоторому центру, расположенному на площадке контакта. В общем случае система сил реакций окажется эквивалентной одной силе $\vec{R}$ и одной паре сил с моментом $\vec{M}$, причём угол между $\vec{R}$ и $\vec{M}$ может быть любым. Разложим силу $\vec{R}$ на две составляющие, одна из которых $\vec{N}$ направлена по нормали к поверхности, а вторая $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена по касательной к поверхности (Рис. 6.1).

Составляющая $\vec{F}_{\text{тр}}$ называется силой трения. Момент $\vec{M}$ также разложим на две составляющие, одна из которых $\vec{M}_k$ направлена по касательной и называется моментом трения качения, а вторая $\vec{M}_n$ нормальна к поверхности и называется моментом трения верчения.

Силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$, а также моменты $\vec{M}_k$ и $\vec{M}_n$ являются реакциями связи и, следовательно, определяются приложенной к телу системой активных сил. Если тело покоится на поверхности, то это означает, что система активных сил уравновешивается системой сил реакций и, следовательно, при покое тела $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{M}_k$, $\vec{M}_n$ должны определяться из уравнений равновесия системы сил, состоящей из активных сил и сил реакций. Остаётся открытым вопрос об условиях, при которых состояние покоя тела не нарушается.

Следует отметить, что физическая природа трения сложна и далеко не полностью исследована. Существуют различные модели, призванные описать это явление. Остановимся подробно на весьма распространённой модели, так называемого, кулонова трения.

6.2. ТРЕНИЕ ПОКОЯ, СКОЛЬЖЕНИЯ, КАЧЕНИЯ, ВЕРЧЕНИЯ.

ТРЕНИЕ ПОКОЯ.

Свойства силы трения устанавливаются по результатам следующего эксперимента. На горизонтальной поверхности находится тело, к которому приложены две активные силы: нормальная к поверхности сила $\vec{P}$, модуль которой в ходе эксперимента не изменяется (например, сила тяжести), и сила $\vec{Q}$ направленная параллельно поверхности, модуль которой в ходе эксперимента постепенно увеличивается (Рис. 6.2). Со стороны поверхности возникают в ответ нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

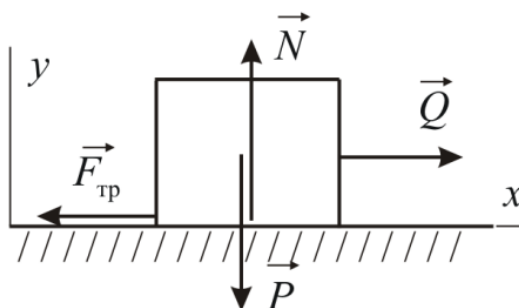


Рис. 6.2. Эксперимент, устанавливающий свойства силы трения

Установленные в результате обработки описанного эксперимента закономерности сводятся к следующим положениям или законам Амантона-Кулона.

1. Сила трения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и противоположна тому направлению, в котором активно действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Модуль силы трения при покое принимает всякий раз значение, необходимое для предотвращения скольжения тела по поверхности, но не может превзойти некоторого предельного значения, которое

достигается на грани перехода тела от состояния покоя к состоянию скольжения: $0 \leq \vec{F}_{\text{тр}} \leq \vec{F}_{\text{max}}$

3. Максимальное значение силы трения при покое пропорционально нормальному давлению тела на поверхность: $\vec{F}_{\text{max}} = f_0 N$, где f_0 – коэффициент трения при покое, который определяется экспериментально. Коэффициент f_0 зависит от материала тел, шероховатости, влажности, температуры трущихся поверхностей, но на его значение в широких пределах не влияют размеры площадки контакта тел.

4. При скольжении тела по шероховатой поверхности сила трения пропорциональна силе нормальной реакции поверхности: $F_{\text{тр ск}} = f N$ и направлена в сторону, противоположную скольжению. Динамический коэффициент трения f (коэффициент трения скольжения), помимо прочего, может зависеть от относительной скорости скольжения.

Таким образом, условие равновесия тела при наличии силы трения состоит в том, что найденная из уравнений равновесия сила трения не должна превосходить своего максимально возможного значения $\vec{F}_{\text{тр}} \leq \vec{F}_{\text{max}} \leq f \vec{N}$

Законам трения можно придать геометрическую интерпретацию, вводя понятия угла и конуса трения. Углом трения φ называют угол максимального отклонения (при отсутствии скольжения) полной реакции $\vec{R}$ от своей нормальной составляющей $\vec{N}$. Учитывая закон Кулона, получаем (Рис.6.3):

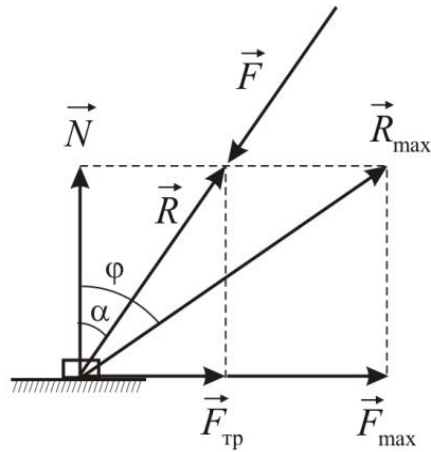


Рис. 6.3. Угол и конус трения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = f_0 \quad (6.1)$$

В зависимости от действия активных сил направление полной реакции $\vec{R}$ может меняться. Множество всех возможных направлений максимальной силы полной реакции $\vec{R}_{\max}$ образует коническую поверхность – конус трения.

Допустим, что активные силы имеют равнодействующую $\vec{R}$, линия действия которой составляет угол α с нормалью к поверхности. Если тело находится в покое, то

$$F_{\text{тр}} - F \sin \alpha = 0; \quad (6.2)$$

Откуда определяем нормальную реакцию опоры

$$N - F \cos \alpha = 0 \quad (6.3)$$

причём,

$$\vec{F}_{\text{тр}} \leq \vec{F}_{\max} \leq f_0 \vec{N}. \quad (6.4)$$

Определяя из уравнений равновесия отношение модуля силы трения к модулю нормальной реакции и подставляя его в неравенство, получаем:

$$tg\alpha \leq f_0 \leq tg\varphi \text{ т.е. } \alpha \leq \varphi$$

$$tg\alpha \leq f_0 \leq tg\varphi, \quad \text{т.е. } \alpha \leq \varphi \quad (6.5)$$

Таким образом, для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо (и достаточно), чтобы система приложенных к телу активных сил имела равнодействующую, прижимающую тело к поверхности, линия действия которой лежит внутри конуса трения

Пример 6.1.

Установить, будет ли находиться в покое тело, изображённое на Рис. 6.2, если $P = 1000\text{Н}$; $Q = 70\text{Н}$; $f_0 = 0,1$

Предположим, что тело находится в покое; тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{KX} = 0 \quad Q - F_{\text{тр}} = 0 \quad (6.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{KY} = 0 \quad N - P = 0 \quad (6.7)$$

Откуда определяем силы:

$$N = P = 1000 \text{ Н};$$

$$F_{\text{тр}} = Q = 70 \text{ Н}.$$

Вычислим максимально возможную силу трения:

$$F_{\text{max}} = f_0 N = 100 \text{ Н}.$$

В рассматриваемом случае вычисленная из уравнений равновесия сила трения оказалась меньше максимально возможной, следовательно, условие равновесия $F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}} = f_0 N$ выполнено и тело находится в покое и

$$F_{\text{тр}} = 70 \text{ Н.}$$

Пример 6.2.

Сохраняя условия предыдущего примера, положим $Q = 110 \text{ Н}$.

Аналогично примеру 6.1, вычисляем $F_{\text{тр}} = 110 \text{ Н}$; $F_{\text{max}} = f_0 N = 100 \text{ Н}$.

Очевидно, что покой нарушится, так как необходимая для предотвращения скольжения сила оказалась больше максимально возможной силы трения. Таким образом, нарушено условие равновесия

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}} = f_0 N,$$

тело придёт в движение, а сила трения примет максимальное значение:

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{max}} = 110 \text{ Н.}$$

ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Говоря о свойствах трения качения, обычно подразумевают следующий опыт. Исследуется возможность равновесия диска (цилиндра) радиуса r , находящегося на плоской шероховатой поверхности и нагруженного одной активной силой, линия действия которой проходит через центр диска. При этом предполагается, что результаты такого опыта могут быть аппроксимированы на случай более сложного взаимодействия (например, если опорная поверхность имеет кривизну).

Приложенную к диску активную силу разложим на нормальную $\vec{P}$ и касательную $\vec{Q}$ составляющие. В ответ на давление $\vec{P}$ возникает нормальная составляющая реакции поверхности $\vec{N}$. При любой, сколь угодно малой, силе $\vec{Q}$ возникает сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ до некоторых пор (пока сила $\vec{Q}$ не

превзойдёт значения предельной силы трения) будет удерживать точки контакта от проскальзывания. При этом силы $\vec{Q}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ образуют пару сил, под действием которой диск начал бы катиться, если бы момент этой пары не уравнивал бы момент M_K трения качения (Рис. 6.4). По мере роста модуля силы $\vec{Q}$, возрастает и момент трения качения, достигая максимума при переходе тела от состояния покоя к состоянию качения.

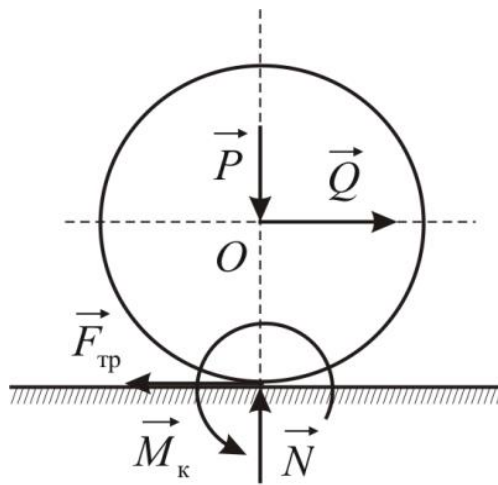


Рис. 6.4. Эксперимент, устанавливающий свойства момента трения качения

Экспериментально установлено, что максимальное значение момента трения качения пропорционально нормальному давлению тела на поверхность: $M_{k \max}$, где k – коэффициент трения качения, определяемый экспериментально. Заметим, что если коэффициент трения скольжения – величина безразмерная, то коэффициент трения качения имеет размерность длины. В справочниках обычно указывается отношение коэффициента трения качения к радиусу диска. Во всех случаях

$$k/r \ll f_0,$$

так что при увеличении силы $\vec{Q}$ покой нарушается и диск начинает катиться, но при этом сила трения продолжает удерживать от проскальзывания точки касания диска и поверхности. При дальнейшем увеличении силы $\vec{Q}$ сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ достигает максимума и начинается качение со скольжением.

Объяснить факт возникновения сопротивления качению цилиндра нельзя, оставаясь в рамках гипотезы о не деформируемости соприкасающихся поверхностей. В действительности цилиндр и опорная поверхность деформируются; существует некоторая площадка контакта конечного размера (Рис. 6.5). Под действием силы $\vec{Q}$ перераспределяются нормальные составляющие реакций. В результате точка приложения силы $\vec{N}$ смещается в сторону действия силы $\vec{Q}$ на некоторое расстояние h . Образуется пара сил $(\vec{P}; \vec{N})$ с моментом $M_k = hN$ которая до некоторых пор может уравнивать действие пары сил $(\vec{Q}; \vec{F}_{\text{тр}})$

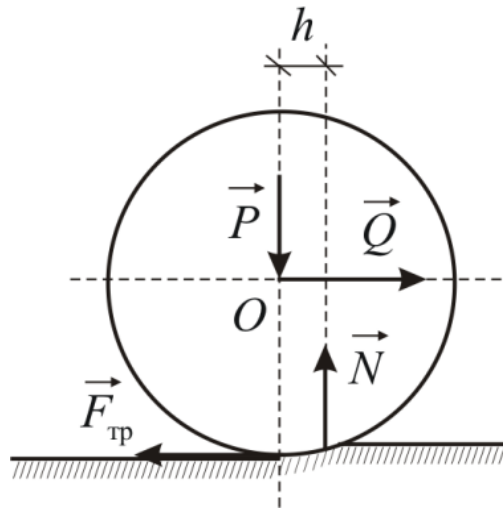


Рис. 6.5. Площадка контакта конечного размера

Смещение h имеет предел k , при достижении которого равновесие нарушается:

$$h \leq k; \quad Q_{\max} r = hN; \quad (6.8)$$

$$Q \leq Q_{\max} = \frac{k}{r} N \quad (6.9)$$

Таким образом, условие равновесия тела при наличии силы трения и сопротивления качению состоит в том, что найденная из уравнений равновесия сила трения не должна превосходить своего максимально возможного значения $F_{\text{тр}} \leq F_{\max} = fN$, а найденный из уравнений равновесия

момент сопротивления качению M_k не должен превосходить своего максимального значения

$$M_k \leq M_{k \max} = kN$$

Первое условие представляет собой условие отсутствия скольжения тела.

Второе – условие отсутствия качения тела.

Пример 6.3

Определить, при каких значениях угла α (Рис. 6.6) цилиндр радиуса r , лежащий на наклонной плоскости, остаётся в покое, если коэффициент трения качения равен k .

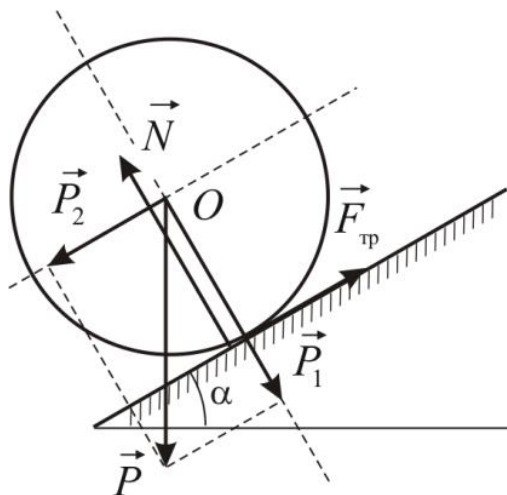


Рис.6.6.Цилиндр, лежащий на шероховатой плоскости

В рассматриваемом случае

$$Q = P_2 = P \sin \alpha;$$

$$N = P_1 = P \cos \alpha$$

Равновесие возможно, если

$$Qr \leq kN$$

то есть имеем

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{r} kN. \quad (6.10)$$

Полученным результатом можно пользоваться для экспериментального определения коэффициента трения качения.

Пример 6.3

Однородный стержень AB , вес которого равен P , опирается на горизонтальный пол и вертикальную стену. В точке B привязана невесомая нить, удерживающая стержень в равновесии. Нить переброшена через блок D и растягивается грузом C , вес которого равен Q . Определить величины, указанные в таблице, при которых конструкция будет ещё оставаться в покое. Коэффициент трения в точках контакта с трением равен f .

Точка контакта с трением – B .

$$\alpha = 60^\circ; \beta = 45^\circ;$$

Требуется определить $f_{\min}$ если $Q = 4P$.

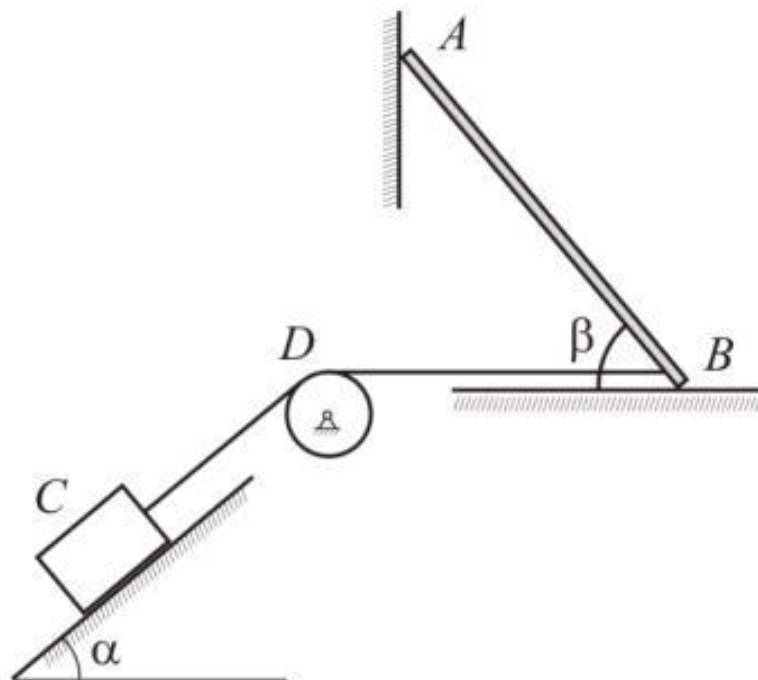


Рис 6.7. Равновесие конструкции с учетом трения

Решение

Рассмотрим равновесие однородного стержня AB . Так как стержень – однородный, то сила тяжести $\vec{P}$ приложена к середине стержня AB . В точке А действует реакция гладкой вертикальной поверхности $\vec{R}_A$, направленная перпендикулярно этой поверхности, в точке В – действует реакция опорной поверхности $\vec{R}_B$, направленная перпендикулярно этой поверхности, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и натяжение нити $\vec{T}$ (Рис.6.8).

Найдём минимальное значение $f_{\min}$, при котором ещё возможно равновесие. Если разгружать тело AB (уменьшать $\vec{P}$), то при потере равновесия точка В будет скользить влево.

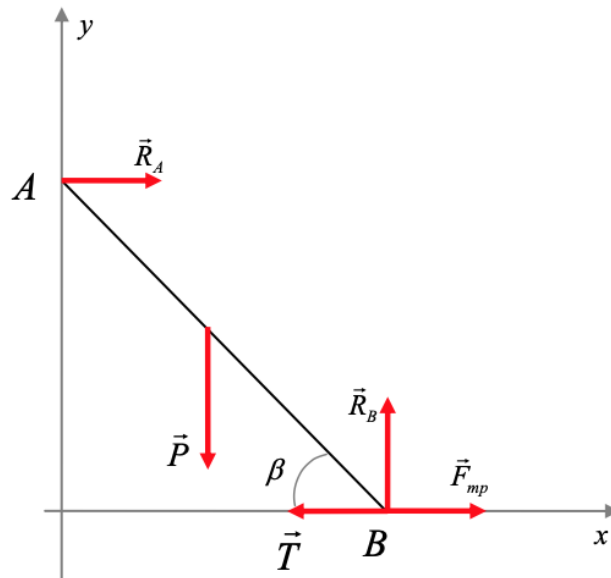


Рис 6.8. Все силы, которые действуют на конструкцию в равновесии

Так как данная конструкция по условию задачи находится в равновесии, то из условий равновесия имеем:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_A - T + F_{mp} = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_B - P = 0$$

$$\sum m_B(F_k) = 0, \quad -R_A \cdot AB \cdot \sin \beta + P \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos \beta = 0$$

Тогда из трех линейно независимых уравнений с тремя неизвестными находим три искомые силы, получаем

$$R_A = P \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta$$

$$R_B = P$$

При потере равновесия $F_{\text{тр}} = F = f_{\text{min}} \cdot R_B = f_{\text{min}} \cdot P$, тогда получим:

$$P \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta - T + f_{\text{min}} \cdot P = 0$$

Для нахождения силы натяжения нити рассмотрим равновесие бруса С. На него действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция наклонной поверхности $\vec{N}$ и сила натяжения нити T' (Рис.6.9). Так как трение в блоке D не учитывается и нить нерастяжимая, то $T = T'$.

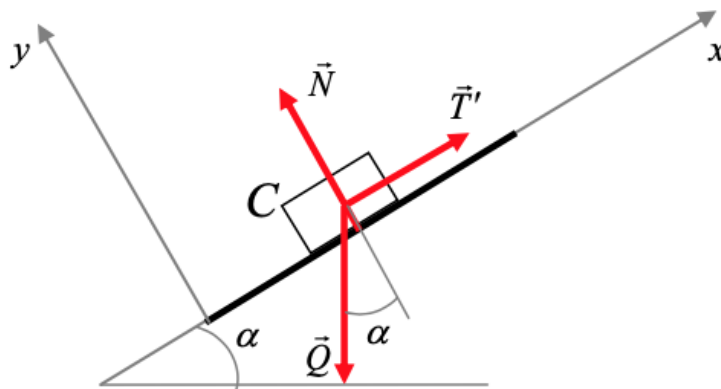


Рис 6.9. Нахождение силы натяжения нити

Составим уравнения равновесия для данной конструкции. Так, уравнение проекций сил на ось x имеет вид:

$$\sum F_{kx} = 0, Q \cdot \sin \alpha - T' = 0$$

Откуда получим: $T = T' = Q \cdot \sin \alpha$

Найдем:

$$f_{min} = \frac{Q \sin \alpha - 0,5P \operatorname{ctg} \beta}{P} = \frac{Q}{P} \sin \alpha - 0,5 \operatorname{ctg} \beta = \frac{4P}{P} \sin \alpha - 0,5 \operatorname{ctg} \beta =$$

$$= 4 \sin \alpha - 0,5 \operatorname{ctg} \beta = 4 \sin 60^\circ - 0,5 \operatorname{ctg} 45^\circ = 2,96$$

Итак, получили:

$$f_{min} = 2,96$$

Так как коэффициент трения скольжения больше 1, то при заданных условиях система тел не может находиться в покое.