

Лекция 12.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ ДИНАМИКИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ВЕКТОРНОЙ, КООРДИНАТНОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ ФОРМАХ. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

12.1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ ДИНАМИКИ.

Как известно, под механическим движением понимают изменение с течением времени положения тела в пространстве по отношению к другим телам. Изучая движение какого-либо тела, необходимо указать другое тело – тело отсчёта, по отношению к которому рассматривается движение. С телом отсчёта жестко связывают систему координат. Тело отсчета, связанная с ним система координат и счетчик времени – часы образуют систему отсчёта. В классической механике считается, что время не зависит от движения и одинаково во всех точках пространства и во всех системах отсчёта.

Дадим определения основных моделей, используемых в теоретической механике.

Опр.1 Материальное тело, размерами и различием в движении отдельных точек которого можно пренебречь в рамках рассматриваемой задачи, называется материальной точкой.

Опр.2. Любое множество взаимодействующих материальных точек называется механической системой.

Опр.3. Если расстояние между любыми двумя точками механической системы не изменяется при любых механических

взаимодействиях, то такая механическая система называется геометрически неизменяемой.

Фундаментальным понятием механики является сила, которая представляет собой количественную меру механического взаимодействия материальных тел. Сила является причиной изменения движения тела, к которому она приложена.

Кроме внешних воздействий, то есть сил, характер движения любого тела определяется его инертностью, которая является одним из основных свойств движущейся материи. Это свойство проявляется в способности тела сохранять свое движение при отсутствии сил и изменять его под действием сил не мгновенно, а постепенно, тем медленнее, чем больше вещества содержится в теле. Одной из количественных мер инертности (инерции) тела является масса. Заметим, что масса полностью характеризует инерционные свойства тела при его поступательном движении.

12.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ ДИНАМИКИ.

Аксиома 1.

Существует система отсчета, по отношению к которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы.

Такая система отсчёта называется инерциальной, иногда её условно называют неподвижной.

Аксиома 2 (второй основной закон Ньютона).

В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно приложенной к точке силе:

$$m\vec{W} = \vec{F}. \quad (12.1)$$

Аксиома 3 (закон действия и противодействия).

Две материальные точки взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 4 (Принцип независимости действия сил).

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то ускорение точки равно сумме векторов ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности.

12.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ВЕКТОРНОЙ, КООРДИНАТНОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ ФОРМАХ.

Положение материальной точки в системе отсчета определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}$. Сила, действующая на точку может зависеть от положения точки, то есть от её радиуса-вектора $\vec{r}$, например, упругая сила, скорости точки (например, сила сопротивления) и от времени. Следовательно, основное уравнение динамики материальной точки (12.1) в общем случае можно записать в виде:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right) \quad (12.2)$$

Это равенство, представляющее собой физический закон, устанавливающий связь между массой точки, её ускорением и действующей на точку силой, можно одновременно рассматривать как дифференциальное

уравнение, в котором радиус–вектор r является искомой функцией, а время t – аргументом.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right) \quad (12.3)$$

Уравнение (12.3) называется дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.

В зависимости от выбора системы координат можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Записывая уравнение (12.2) в проекциях на оси ортогональной декартовой системы координат, получаем:

$$m \ddot{x} = F_x; \quad m \ddot{y} = F_y; \quad m \ddot{z} = F_z, \quad (12.4)$$

здесь x, y, z , – координаты точки; F_x, F_y, F_z – проекции на координатные оси приложенной к точке силы.

Уравнения (12.4) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в координатной форме.

Если траектория точки заранее известна, удобно использовать оси естественного трёхгранника. Напомним, что в этом случае положение точки определяется её дуговой координатой s , а проекция вектора скорости на

касательную к траектории V_τ , касательное W_τ и нормальное W_n ускорения точки определяются по формулам:

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}; \quad W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}; \quad W_n = \frac{V_\tau^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке. Таким образом, дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трёхгранника имеют вид:

$$m \frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau; \quad m \frac{V_\tau^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b, \quad (12.5)$$

где F_τ, F_n, F_b – проекции на оси естественного трёхгранника приложенной к точке силы.

Уравнения (12.5) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в естественной или натуральной форме.

12.4. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

12.4.1. ПЕРВАЯ (ПРЯМАЯ) ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Первая задача динамики точки, ее еще называют прямой задачей динамики точки, состоит в том, что, зная массу точки и закон движения точки, то есть кинематические уравнения вида

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (12.6)$$

определить силу или равнодействующую сил, действующую на точку. Или определить проекции силы F_x, F_y, F_z или равнодействующей силы, действующей на материальную точку.

Первая задача динамики точки, как видно, легко решается при помощи уравнений (12.4) и сводится к дифференцированию заданных функций, то есть к вычислению вторых производных по времени от заданных функций (12.6).

Данная задача динамики точки не требует задания дополнительных условий.

Отметим, что закон движения материальной точки может быть задан одним из трех способов: векторным, координатным или естественным (или натуральным) способом. То есть не обязательно координатным, пример которого рассматриваем. Например, можно задать движение точки естественным или натуральным способом задания движения точки (Рис.12.1).

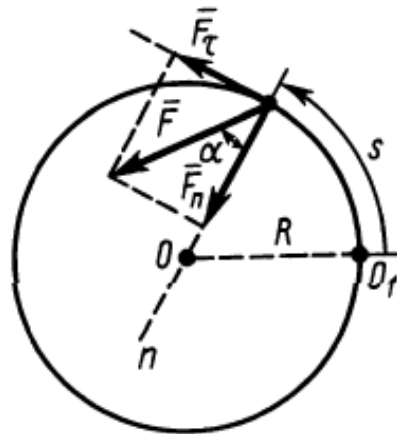


Рис. 12.1. Естественный способ задания движения точки

Рассмотрим пример решения первой задачи динамики точки.

Пример 1.

Пусть точка М, имеющая массу m , движется в плоскости Oxy так, что уравнениями ее движения являются

$$x = a \cos kt;$$

$$y = bsinkt,$$

где a, b, k — постоянные положительные величины; t — время.

Определить силу, под действием которой точка совершает это движение.

Решение.

Дан координатный способ задания движения точки. Найдем уравнение траектории движения точки, исключая время как параметр из данных уравнений движения точки:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1.$$

Траекторией точки является эллипс с полуосями a и b . Изобразим его на чертеже (Рис.12.2).

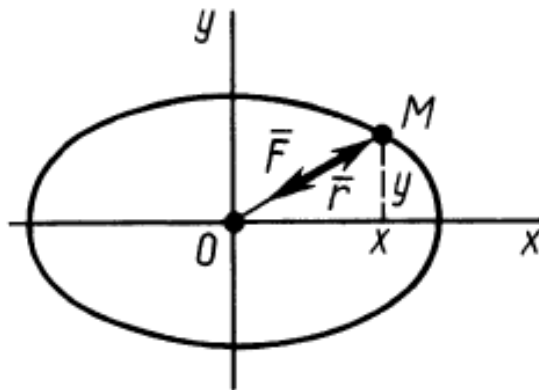


Рис. 12.2 Движение точки по заданному закону

На основании дифференциальных уравнений движения точки (12.4), учитывая, что точка движется в плоскости, и, поделив каждое уравнение на массу, получим:

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mk^2 a \cos kt;$$

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mk^2 b \sin kt$$

Более кратко выражение силы в проекциях на оси координат можно записать, если ввести соответствующие координаты движущейся точки из условия задачи, то есть

$$F_x = -mk^2 x;$$

$$F_y = -mk^2 y.$$

Тогда по теореме Пифагора, так как проекции силы взаимно перпендикулярны, получим, что модуль силы, действующей на точку, равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

где r — радиус-вектор движущейся точки. Косинусы углов силы $\vec{F}$ с осями координат определим через направляющие косинусы.

$$\cos(\vec{F}, ^x) = F_x/F = -x/r;$$

$$\cos(\vec{F}, ^y) = F_y/F = -y/r.$$

Отсюда можно заключить, что сила $\vec{F}$ имеет направление, противоположное радиус— вектору $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Окончательно получаем:

$$\vec{F} = -mk^2 \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{F} = -mk^2 \vec{r}.$

12.4.2. ВТОРАЯ (ОБРАТНАЯ) ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Вторая задача динамики материальной точки или, ее еще называют обратной к первой задаче динамики точки, состоит в том, что, зная массу точки и приложенную к этой точке силу, или равнодействующую сил, необходимо определить закон ее движения, то есть найти кинематические уравнения (12.6).

Опять отметим, что в зависимости от конкретной задачи можно определить закон движения точки одним из трёх способов ее задания.

Решение задачи сводится к интегрированию системы (12.4), т.е. системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки x, y, z , а аргументом время t . Мы предполагаем, что в общем случае точка движется в пространстве и рассматриваем координатный способ задания движения точки.

Выполняя интегрирование, получаем координаты точки как функции времени, но решение будет зависеть от шести произвольных постоянных, которые называют постоянные интегрирования.

Чтобы сделать соответствующую задачу динамики определённой, то есть получить единственное решение задачи, необходимо, кроме действующих на точку сил, задать также начальные условия задачи, т.е. задать начальное положение точки и ее начальную скорость.

Приведем пример решения второй задачи динамики материальной точки.

Пример 2.

Пусть тяжелое тело скользит по гладкой поверхности, которая наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту.

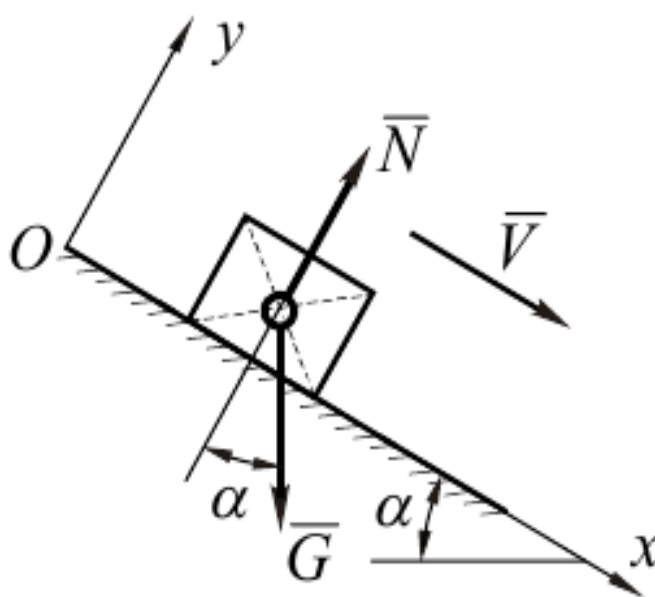


Рис. 12.3. Тяжелое тело скользит по гладкой поверхности

Определить за какое время T тело пройдет путь $s = 9,6$ м, если в начальный момент его скорость равнялась $V_0 = 2$ м/с.

Решение.

Представим тело в произвольном положении на наклонной плоскости (Рис. 12.3). Поскольку движение тела по плоскости является поступательным, а при поступательном движении ускорения всех точек тела одинаковые, то движение такого тела будем рассматривать как движение материальной точки. Отметим, что данное допущение будет справедливым и для следующих задач этой темы.

Покажем силы (Рис.12.3), которые действуют на тело: силу притяжения $\vec{G}$ и нормальную реакцию наклонной плоскости $\vec{N}$.

Ось Ox направим в сторону движения тела по наклонной плоскости.

В начальный момент времени ($t=0$) материальная точка находилась в начале системы координат (точка O), а ее скорость равнялась нулю, то есть $V_0 = 2$ м/с. Таким образом, при $t=0$ начальные условия будут иметь вид:

$$x_0 = 0; V_{x0} = V_0 = 2 \text{ м/с.}$$

Запишем уравнение движения тела в векторной форме:

$$m\vec{W} = \vec{G} + \vec{N}.$$

Спроектируем записанное уравнение на ось Oх:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dV_x}{dt} = G \sin \alpha = mg \sin \alpha.$$

Учитывая, что сила тяжести вычисляется по формуле $G = mg$ получим, сокращая на массу материальной точки, что

$$\frac{dV_x}{dt} = g \sin \alpha$$

Найдем зависимость скорости V_x от времени t . Для этого разделим переменные в последнем уравнении и проинтегрируем:

$$dV_x = g \sin \alpha dt$$

$$\int dV_x = g \sin \alpha \int dt$$

$$V_x = g t \sin \alpha + C_1.$$

Используя начальные условия, определим постоянное положение интегрирования C_1 . Для этого подставим их в последнее уравнение.

Поскольку при

$$t = 0 \qquad V_{x0} = 2 \text{ м/с}$$

то:

$$2 = g \sin \alpha \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Таким образом, уравнение для изменения скорости материальной точки будет иметь вид:

$$V_x = g t \sin\alpha + 2.$$

Находим зависимость координаты x от времени:

$$V_x = g t \sin\alpha + 2$$

$$dx = g t \sin\alpha dt + 2 dt$$

$$\int dx = g \sin\alpha \int t dt + 2 \int dt$$

$$\int dx = g \sin\alpha \int t dt + 2 \int dt$$

Постоянное значение при интегрировании C_2 определим из начальных условий данной задачи. Поскольку при $t = 0, x_0 = 0$, то:

$$0 = g \cdot 0 \cdot \sin\alpha + 2 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Окончательно, для координаты x будем иметь зависимость:

$$x = g \frac{t^2}{2} \sin\alpha + 2t.$$

Определим время T , при котором $x = s = 9,6$ м:

$$9,6 = 9,81 \frac{T^2}{2} \sin 30^\circ + 2 T.$$

Или, решая данное уравнение относительно времени, из квадратного уравнения определяем время:

$$2,45T^2 + 2T - 9,6 = 0$$

Отсюда:

$$T_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2,45 \cdot 9,6}}{2,45} = \frac{-1 + 4,95}{2,45}$$

$$T_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 2,45 \cdot 9,6}}{2,45} = \frac{-1 - 4,95}{2,45}$$

Поскольку время может быть только положительным, оно не может быть отрицательным, то:

$$T = \frac{-1 + 4,95}{2,45} = 1,6 \text{ с.}$$

Ответ: $T = 1,6 \text{ с.}$

С точки зрения математики вторая задача динамики является более сложной, чем первая, так как она сводится к интегрированию заданных функций. Известно, что существует класс трансцендентных функций, интегралы от которых вообще не берутся. В этом случае вторую задачу динамики решают численным способом. Более того. Вторая задача динамики точки требует задания дополнительных условий задачи, то есть начальное

положение точки и начальную ее скорость, чего не требовала первая задача динамики точки.