Лекция 11.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ФОРМУЛЫ ПУАССОНА. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА. ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО.

11.1. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Часто возникает необходимость рассматривать движение точки одновременно по отношению к двум или более системам отсчета, движущимся относительно друг друга. В таком случае движение точки называется сложным.

Пусть система отсчета $O_1x_1y_1z_1$ условно неподвижна, а система $Oxyz$ движется по отношению к неподвижной произвольным, но известным образом (Рис. 11.1).

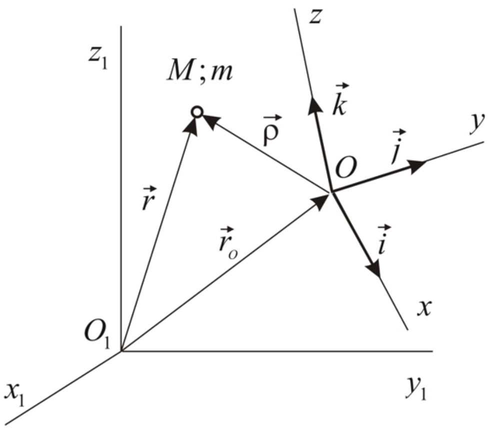

Рис. 11.1. Сложное движение точки

<u>Опр.1</u> ***Движение точки*** M ***по отношению к неподвижной системе отсчета называется абсолютным. Ее скорость и ускорение по отношению к неподвижной системе отсчета называются абсолютной скоростью*** $\vec{V}^a$ ***и абсолютным ускорением*** $\vec{W}^a$***.***

<u>Опр.2</u> ***Движение точки*** M ***по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным. Скорость и ускорение точки по***

отношению к подвижной системе отсчета называются относительной скоростью $\vec{V}^r$ ***и относительным ускорением*** $\vec{W}^r$ **.**

Точки подвижного пространства $Oxyz$ совершают переносное для точки M движение. Различные точки подвижного пространства имеют в данный момент времени в общем случае разные скорости и разные ускорения.

<u>Опр.3</u> Переносной скоростью $\vec{V}^e$ ***и переносным ускорением*** $\vec{W}^e$ ***точки*** M ***называется скорость и ускорение той точки*** m ***подвижного пространства. в которой в данный момент времени находится движущаяся точка*** M **.**

Связи между абсолютными, относительными и переносными скоростями и ускорениями устанавливаются соответствующими теоремами.

11.2. ФОРМУЛЫ ПУАССОНА.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы подвижных осей координат (Рис. 11.1). Найдем производные по времени от этих единичных векторов в основной (неподвижной) системе координат. Вычислим скорость точки A, лежащей на конце единичного вектора $\vec{i}$. Подвижное пространство можно рассматривать как свободное твердое тело, скорость любой точки которого определяется формулой:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{i}, \qquad (11.1)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости подвижной системы координат. С другой стороны, определяем скорость точки А, как производную от радиуса– вектора соответствующей точки, имеем:

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{V}_O + \frac{d\vec{i}}{dt}. \qquad (11.2)$$

Сравнивая полученные равенства (11.1), (11.2), находим

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}.$$

Аналогично получаем производные по времени от двух других единичных векторов. Таким образом,

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \qquad (11.3)$$

Формулы (11.3) называются формулами Пуассона.

11.3. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ.

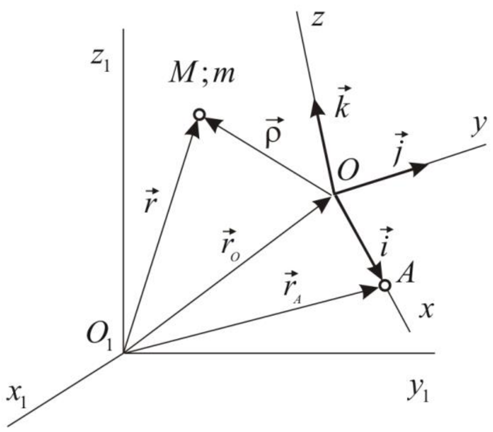

Рис. 11.2. Движение точки M относительно подвижной СК, которая движется относительно неподвижной СК

Радиус-вектор точки M представляется по правилу сложения векторов (правило треугольника) в виде (Рис. 11.2)

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho},$$

где

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Используя определение скорости, найдем абсолютную скорость точки M:

$$\vec{V}^a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Так как вектор $\vec{\rho}$ задан в подвижной системе отсчета, то для вычисления его абсолютной производной используем формулу (11.2):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}, \tag{11.4}$$

где

$$\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{V}^r \tag{11.5}$$

представляет собой, согласно определению, относительную скорость точки *M*. Таким образом, абсолютная скорость точки *M* определяется по формуле:

$$\vec{V}^a = \vec{V}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} + \vec{V}^r.$$

Для определения переносной скорости закрепим точку в подвижной системе отсчета, т.е. положим в последней формуле $\vec{V}^r = 0$, тогда

$$\vec{V}^e = \vec{V}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \tag{11.6}$$

Заметим, что формула (11.6) представляет собой скорость точки свободного твердого тела (точки M подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает точка M).

Таким образом, доказали теорему о сложении скоростей при сложном движении точки.

Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки.

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}^a = \vec{V}^r + \vec{V}^e. \tag{11.7}$$

11.4. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА.

Абсолютное ускорение точки равно первой производной по времени от абсолютной скорости. Дифференцируя равенство (11.7) с учетом (11.6), получаем:

$$\begin{aligned}\vec{W}^a &= \frac{d\vec{V}^r}{dt} + \frac{d\vec{V}^e}{dt} = \frac{d\vec{V}^r}{dt} + \frac{d\vec{V}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{V}^r}{dt} + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{\rho}}{dt},\end{aligned} \tag{11.8}$$

где $\vec{W}_0$ – ускорение точки O; $\vec{\varepsilon}_e$ – вектор углового ускорения подвижной системы координат.

Вектор относительной скорости задан в подвижной системе отсчета, поэтому абсолютную производную вектора $\vec{V}^r$ находим по формуле (11.5):

$$\frac{d\vec{V}^r}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{V}^r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}^r, \tag{11.9}$$

где

$$\frac{\tilde{d}\vec{V}^r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{W}^r \tag{11.10}$$

представляет собой относительную производную по времени от относительной скорости, т.е. относительное ускорение точки.

Подставляя (11.4), (11.5), (11.9) и (11.10) в формулу (11.8), получаем:

$$\vec{W}^a = \vec{W}^r + \vec{\omega}_e \times \vec{V}^r + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left[\vec{V}^r + \left(\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}\right)\right]. \qquad (11.11)$$

Чтобы получить переносное ускорение точки, закрепим точку в подвижной системе отсчета, т.е. положим в формуле

$$\vec{V}^r = 0 \quad \text{и} \quad \vec{W}^r = 0:$$

$$\vec{W}^e = \vec{W}_o + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) = \vec{W}_o + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_{m/o} \qquad (11.12)$$

Заметим, что переносное ускорение, определяемое формулой (11.12), представляет собой ускорение точки M свободного твердого тела, с которым связана подвижная система отсчета.

Учитывая (11.12), представляем формулу (11.11) в виде:

$$\vec{W}^a = \vec{W}^r + \vec{W}^e + \vec{W}^c \qquad (11.13)$$

где вектор

$$\vec{W}^c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}^r \qquad (11.14)$$

называется ***ускорением Кориолиса.***

Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема о сложении ускорений при сложном движении точки.

Абсолютное ускорение точки в случае ее непоступательного переносного движения равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.

Поясним причину возникновения ускорения Кориолиса на простейшем примере.

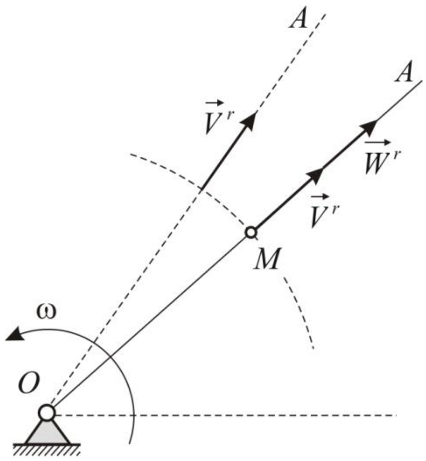

Рис. 11.3. Возникновение кориолисова ускорения при сложном движении точки

Абсолютная производная от вектора относительной скорости характеризует изменение с течением времени вектора $\vec{V}^r$ по отношению к неподвижной системе координат. Вектор относительной скорости может изменяться в ходе относительного движения в силу кривизны относительной траектории или неравномерности относительного движения. Эти изменения учитывает вектор относительного ускорения. Но вектор относительного ускорения не может учесть поворот вектора $\vec{V}^r$, происходящий вместе с поворотом подвижного пространства (Рис. 11.3). Это изменение, наблюдаемое только из неподвижной системы отсчета, учитывает половина ускорение Кориолиса.

С другой стороны, абсолютная производная от вектора переносной скорости характеризует изменение с течением времени вектора $\vec{V}^e$ по отношению к неподвижной системе координат. Вектор переносной скорости может изменяться в ходе переносного движения. Эти изменения учитываются ускорением точки m, т.е. переносным ускорением. Но переносное ускорение не может учесть изменение переносной скорости, происходящее за счет относительного движения. Дело в том, что, совершая относительное движение, точка M переходит из точки m стержня в другую точку m_1, где переносная скорость уже другая (Рис. 11.4). Это изменение учитывает вторая половина ускорение Кориолиса.

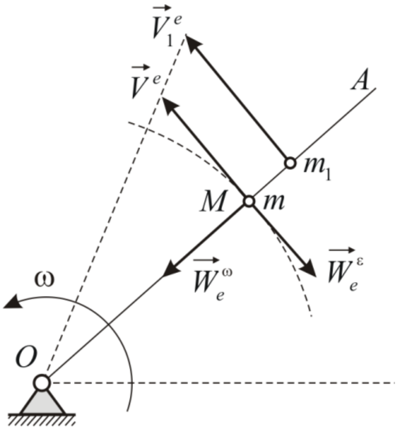

Рис. 11.4. Переносная и относительная скорость при сложном движении точки

Как следует из определения (11.14), вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости, содержащей вектор угловой скорости подвижной системы отсчета и вектор относительной скорости точки, причем направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{V}^r$ виден против хода часовой стрелки (Рис. 11.5). Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле:

$$\left|\vec{W}^c\right| = 2\left|\vec{\omega}_e\right| \left|\vec{V}^r\right| \sin\alpha, \qquad \text{где} \qquad \alpha = \left(\vec{\omega}_e, \vec{V}^r\right). \tag{11.15}$$

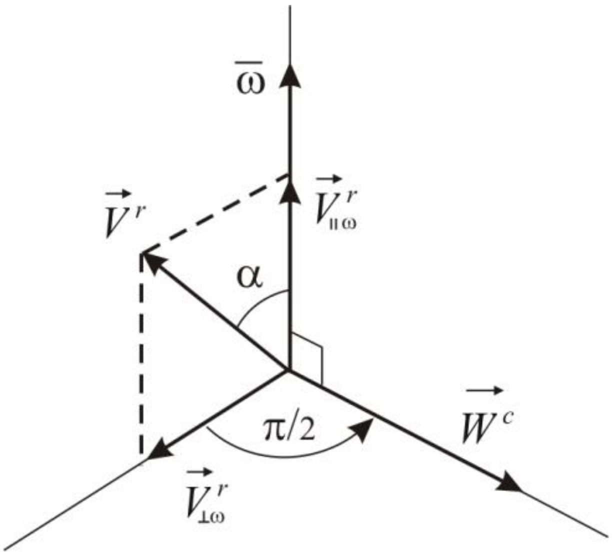

Рис. 11.5. Направление кориолисова ускорения

Отметим случаи обращения в нуль ускорения Кориолиса:

1. $\omega_e = 0$, т.е. подвижная система отсчета движется поступательно или мгновенно-поступательно;

2. Вектор угловой скорости подвижной системы отсчета коллинеарен вектору относительной скорости точки;

3. В моменты времени, когда относительная скорость точки обращается в нуль.

11. 5. ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо проекцию $\vec{V}^r_{\perp\omega}$ ***вектора относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости подвижной системы отсчета, повернуть в сторону вращения на угол*** $\frac{\pi}{2}$**.**

Особенно удобно применять правило Жуковского в тех часто встречающихся случаях, когда вектор относительной скорости перпендикулярен вектору угловой скорости подвижной системы отсчета (Рис. 11.6).

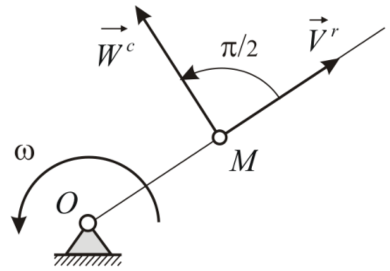

Рис. 11.6

Пример 11.1

По заданным уравнениям движения точки построить траекторию, найдя ее уравнение в координатной форме. Определить и показать на чертеже положение точки в начальный момент и в момент времени t_1. Для указанных моментов времени найти скорость и ускорение точки. Изобразить на чертеже соответствующие векторы: $\overline{V_0}$, $\overline{W_0}$ и $\overline{V_1}$, $\overline{W_1}$.

Дано: $x = ct; y = b + h \cdot cos\pi t; h = 2;\ \ b = -2;\ c = 1;\ \ t_1 = 0{,}5\ c$.

Решение

1. Заданные уравнения движения:

$$x = t; y = b + h \cdot cos\pi t$$

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Проводим преобразования

$$\begin{cases} t = x, \\ y = -2 + 2cos\pi t \end{cases}$$

тогда получаем

$$y = -2 + 2cos\pi x.$$

Имеем уравнение траектории движения точки – косинусоиду. На рисунке 11.7. Показываем положение точки в начальный момент $(t_0 = 0)$ и в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с.

2. Определяем положение точки в момент времени $t_0 = 0$.

$x_0 = 0;\ y = -2 + 2cos0^{\circ} = 0$.

Следовательно, получим:

$$M_0(0;0).$$

3. Определяем положение точки в момент времени

$$t_1 = 0{,}5\ c$$

$x_1 = 0{,}5$ м; $y = -2 + 2cos\frac{\pi}{2} = -2$ м .

Значит, координаты точки $M_1(0{,}5;-2)$.

4. Определяем скорости и ускорения точки дифференцированием уравнений движения точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = (t)` = 1;\ V_y = \frac{dy}{dt} = (-2 + 2cos\pi t)` = -2\pi sin\pi t;$$

$$W_y = \frac{dV_x}{dt} = (1)` = 0;\ W_y = \frac{dV_y}{dt} = (-2\pi sin\pi t)` = -2\pi^2 cos\pi t.$$

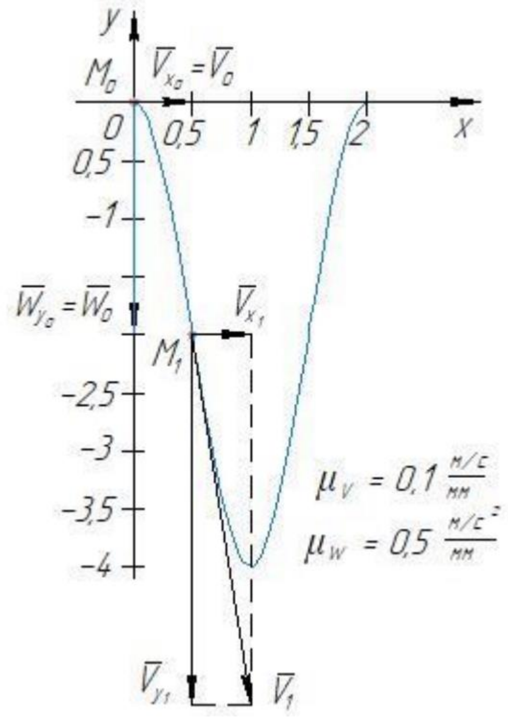

Рис. 11.7. Направления скоростей и ускорений точки при сложном ее движении

5. Определяем скорости и ускорения точки в заданные моменты времени.

При $t_0 = 0$:

$$V_{x0} = 1\frac{м}{с};\ V_{y0} = -2 \cdot 3{,}14 \cdot sin0^\circ = 0;\ V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1\ ^{м}/_{с};$$

$W_{x0} = 0;\ W_{y0} = -2 \cdot 3{,}14^2 \cdot cos0^{\circ} = -19{,}72\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2};$

$W_0 = \sqrt{W_{x0}^2 + W_{y0}^2} = \sqrt{0^2 + (-19{,}72)^2} = 19{,}72\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2};$

При $t_1 = 0{,}5$с:

$V_{x1} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}};\ V_{y1} = -2 \cdot 3{,}14 \cdot sin90^{\circ} = -6{,}28\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}};$

$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{1^2 + (-6{,}28)^2} = 6{,}36\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}};$

$W_{x1} = 0;\ W_{y0} = -2 \cdot 3{,}14^2 \cdot cos90^{\circ} = 0;$

$W_1 = \sqrt{W_{x1}^2 + W_{y1}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$

Векторы $\overline{V_0}$, $\overline{W_0}$ и $\overline{V_1}$, $\overline{W_1}$ показаны на рисунке

Ответ: $\overline{V_0}$=1 ${}^{\text{м}}/_{\text{с}}$;, $\overline{W_0}$=19,72 ${}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$; $\overline{V_1} = 6{,}36\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}}$; $\overline{W_1} = 0.$

Пример 11.2

Определить и построить графики зависимостей $W_\tau(t), V_\tau(t), s(t), L(t),$ где L – пройденный путь. Показать положение точки на траектории в начальный момент и в момент времени t*. Для указанных моментов времени определить и изобразить на чертеже векторы скорости, касательного и нормального ускорений, а также вектор полного ускорения для указанных моментов времени.

Дано: $s = \pi r(t-1)^2;\ t_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}};\ t_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}};\ t_3 = \frac{1}{2};\ t_4 = \frac{3}{2};\ t_4 = 2;$

$t^* = t_3,\ t$ - в секундах, s – в метрах.

Определить и изобразить на чертеже векторы скорости, касательного и нормального ускорений, а также вектор полного ускорения для указанных моментов времени.

Решение

1. Для построения графиков зависимостей определяем скорость и касательное ускорение точки:

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \left(2\pi r(t-1)\right)` = 2\pi r, {}^{м}/_{c^2};$$

Составляем таблицу значений для моментов времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5.

Таблица 11.1

Параметр	$t_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, c$	$t_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, c$	$t_3 = \frac{1}{2}, c$	$t_4 = \frac{3}{2}, c$	$t_5 = 2, c$
s, *м*	$0{,}5\pi r$	$0{,}33\pi r$	$0{,}25\pi r$	$0{,}25\pi r$	πr
V_τ, *м/с*	$-1{,}41\pi r$	$-1{,}15\pi r$	$-\pi r$	πr	$2\pi r$
W_τ, *м/с*^{2}	$2\pi r$	$2\pi r$	$2\pi r$	$2\pi r$	$2\pi r$
L, *м*	$0{,}5\pi r$	$0{,}83\pi r$	$1{,}33\pi r$	$1{,}58\pi r$	$2{,}58\pi r$

Графики зависимостей представлены на рисунках 11.8– 11.11.

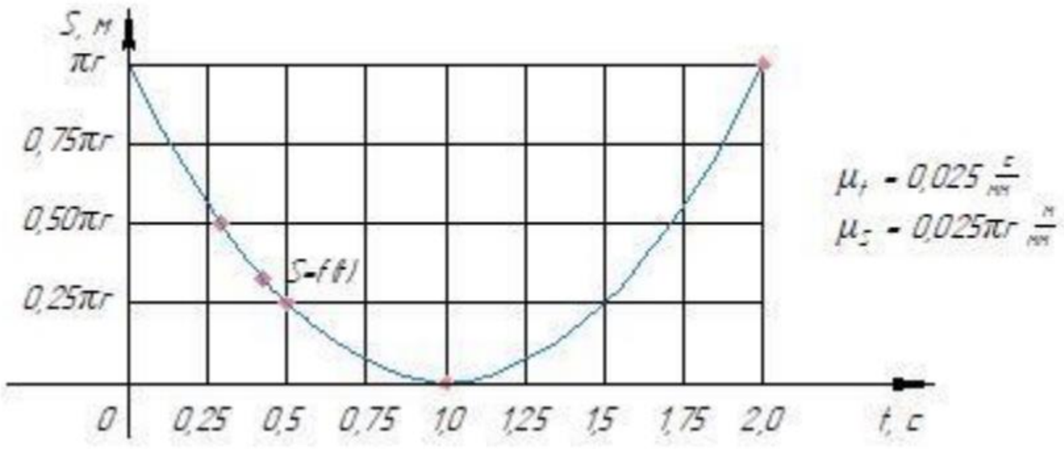

Рис 11.8. График зависимости криволинейной координаты от времени

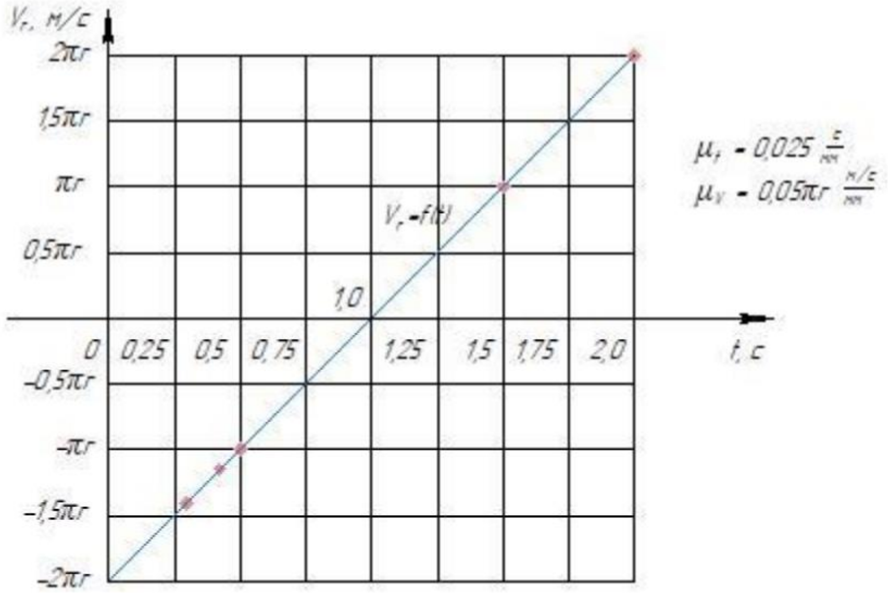

Рис. 11.9. График зависимости скорости от времени

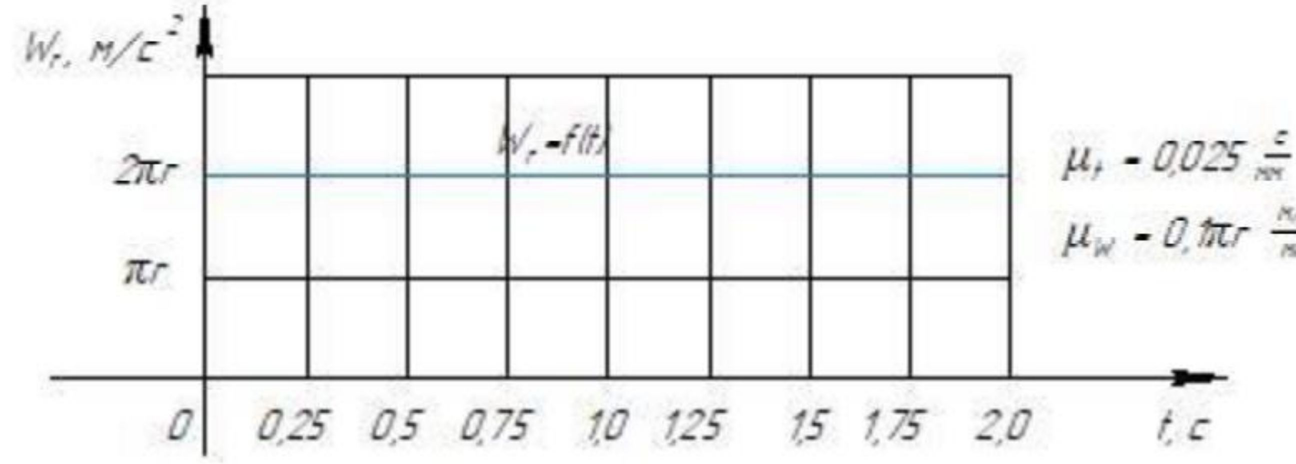

Рис. 11.10. График зависимости относительного ускорения от времени

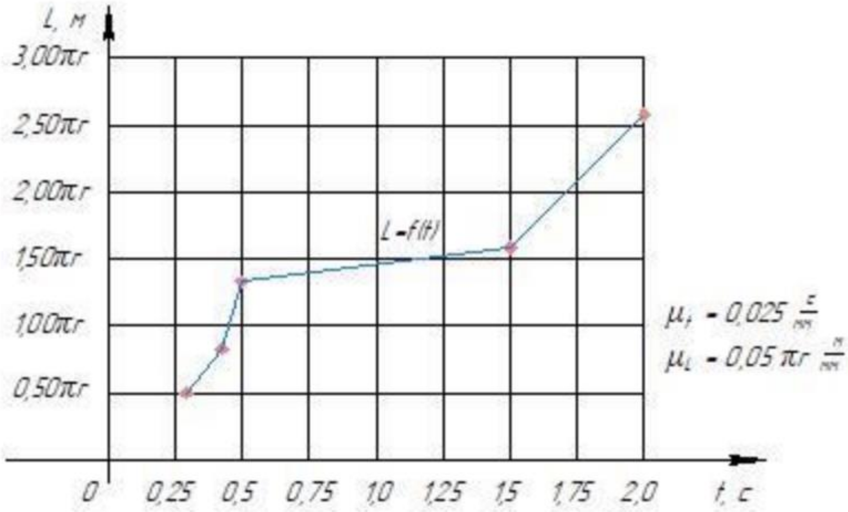

Рис. 11.11. Зависимость $L = L(t)$

2. Определяем положение точки в начальный момент и момент времени $t^* = t_3 = \frac{1}{2}, c$.

При $t_0 = 0$:

$s_0 = \pi r,$ так как периметр полуокружности $\pi r,$ то точка в начальном положении относительно исходной точки О повернется на

$$\varphi_0 = \frac{\pi r}{\pi r} \cdot 180° = 180°.$$

При $t^* = t_3 = \frac{1}{2}, c$.

$s_1 = \frac{\pi r}{4}$, следовательно, $\varphi_0 = \frac{\pi r}{4\pi r} \cdot 180° = 45°$.

3. Определяем скорость, касательное, нормальное и полное ускорения в начальный момент времени $t^* = t_3 = \frac{1}{2}, c$.

При $t_0 = 0$:

$$V_{\tau 0} = -2\pi r \ \ (^{\text{м}}/_{\text{с}}); \quad W_{\tau 0} = 2\pi r \ \ (^{\text{м}}/_{\text{с}^2})$$

$$W_{\tau 0} = \frac{V_{r0}^2}{\rho} = \frac{4\pi^2 r^2}{r} = 4\pi^2 r, {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\,;\ W_0 = \sqrt{W_{\tau 0}^2 + W_{n0}^2} = \sqrt{(2\pi r)^2 + (4\pi^2 r)^2}$$

$$= 2\pi r\sqrt{1+4\pi^2}, {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

При $t^* = t_3 = \frac{1}{2}, c.$

$$V_{\tau 1} = -\pi r, {}^{\text{м}}/_{\text{с}}\,; W_{\tau 1} = 2\pi r, {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\,;$$

$$W_{n1} = \frac{V_{r1}^2}{\rho} = \frac{\pi^2 r^2}{r} = \pi^2 r, {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\,;\ W_0 = \sqrt{W_{\tau 0}^2 + W_{n0}^2} = \sqrt{(2\pi r)^2 + (\pi^2 r)^2}$$

$$= \pi r\sqrt{4+\pi^2}\ \left({}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\right).$$

Векторы скоростей и ускорений показаны на рисунке.

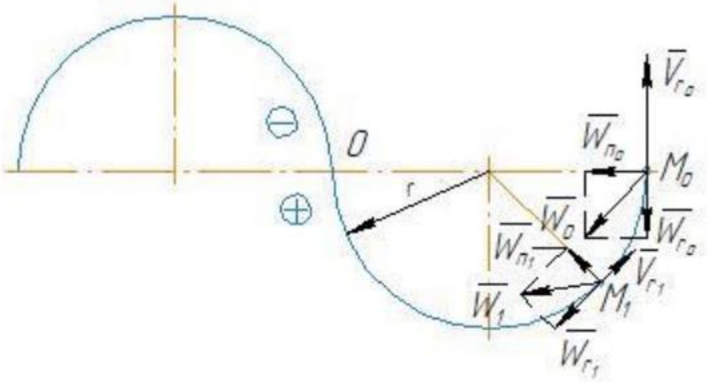

Рис. 11.12. Векторы скоростей и ускорений точки