

Лекция 5.

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СПЛОШНОГО ТЕЛА. ПРИМЕРЫ.

5.1. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.

При изучении объёмных и поверхностных сил широко используется центр параллельных сил. Это понятие вводится для системы параллельных сил, имеющих равнодействующую, причём точки приложения сил системы A_k считаются фиксированными.

Опр. Центром параллельных сил называется точка, вокруг которой поворачивается равнодействующая системы параллельных сил при повороте всех сил системы вокруг своих точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

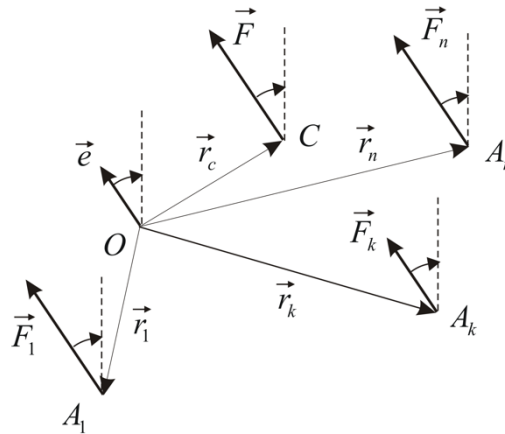


Рис.5.1. Параллельные силы. Вектор равнодействующей системы параллельных сил

Найдём положение центра параллельных сил C для системы $\{\vec{F}\}$, имеющей равнодействующую $\vec{F}$. Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор, параллельный линиям действия сил системы (Рис. 5.1). Тогда $\vec{F}_k = F_k \times \vec{e}$, где F_k – проекция силы на направление единичного вектора $\vec{e}$. Для равнодействующей получаем:

$$\vec{F} = F\vec{e} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{e} \sum_{k=1}^n F_k \quad (5.1)$$

Для любого центра O , используя теорему Вариньона, получаем:

$$\overrightarrow{OC} \times \vec{F} = \sum \overrightarrow{OA_k} \times \vec{F}_k \quad (5.2)$$

или

$$\overrightarrow{OC} \times F\vec{e} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \times F_k \vec{e} \quad (5.3)$$

Вынося за скобку общий множитель $\vec{e}$, получаем:

$$(\overrightarrow{OC} \times F - \sum \overrightarrow{OA_k} \times F_k) \times \vec{e} \quad (5.4)$$

$$\text{или } \vec{e} \times \vec{a} = 0$$

$$\text{где } \vec{a} = \overrightarrow{OC} \times F - \sum \overrightarrow{OA_k} \times F_k$$

Векторное произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю или если сомножители коллинеарны. Но $\vec{e} \neq 0$. Повернём все силы системы вокруг своих точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол (Рис. 5.1). Равнодействующая системы сил повернётся вокруг точки C

в ту же сторону на тот же угол. Вместе с силами поворачивается вокруг точки О и вектор $\vec{e}$. В результате этой операции вектор $\vec{e}$ изменил направление; вектор $\vec{a}$ остался неизменным, но по-прежнему $\vec{a} \times \vec{e} = 0$. Следовательно, $\vec{a} = 0$. т.е.

$$\overrightarrow{OC} \times F = \sum \overrightarrow{OA_k} \times F_k = \sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k$$

Отсюда

$$\vec{r}_k = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k \quad (5.5)$$

Примем точку О за начало декартовой системы координат. Записывая формулу (5.5) в проекциях на координатные оси, получаем координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n F_k x_k \quad (5.6)$$

$$y_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n F_k y_k \quad (5.7)$$

$$z_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n F_k z_k \quad (5.8)$$

5.2. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СПЛОШНОГО ТЕЛА.

Опр. Центром тяжести называется точка тела, через которую проходит линия действия его силы тяжести при любом положении тела по отношению к Земле.

Экспериментально такую точку можно найти последовательно подвешивая тело на нити за различные точки. При равновесии тело находится под действием двух сил – силы тяжести и реакции нити, которые по аксиоме 2 должны располагаться по одной прямой – вдоль нити, т.е. по местной вертикали.

Рассмотрим материальное тело, расположенное вблизи поверхности Земли (в поле силы тяжести). Допустим сначала, что тело состоит из конечного числа материальных точек, другими словами, частиц, размерами которых можно пренебречь. На каждую частицу с номером k действует сила тяжести $\vec{P}_k$. Если размеры тела малы по сравнению с размерами Земли, то систему сил тяжести частиц можно рассматривать как систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил всегда имеет равнодействующую $\vec{P}$, модуль которой часто называют весом тела. При любом изменении ориентации тела по отношению к Земле силы тяжести частиц остаются вертикальными, т.е. они поворачиваются по отношению к телу вокруг своих точек приложения. Линия действия силы тяжести тела $\vec{P}$ при этом всегда будет проходить через определённую точку – центр параллельных сил, который в рассматриваемом случае называется центром тяжести тела.

Таким образом, положение центра тяжести тела, состоящего из конечного числа частиц, можно определить по формуле (5.9) с учетом выражения (5.5):

$$\vec{r}_k = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k \quad (5.9)$$

При определении положения центра тяжести сплошного тела это тело разбивается сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объёмы (Рис. 5.2)

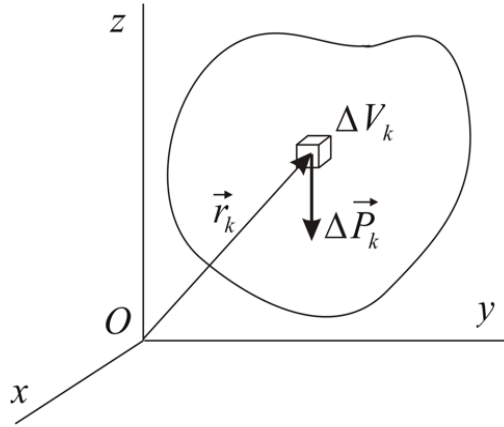


Рис. 5.2. Разбиваем тело на элементарные объёмы для определения положения центра тяжести

Тогда центр тяжести сплошного тела определяется как предел последовательности радиус- векторов центров тяжести системы элементарных объёмов или частиц, при объёме каждой частицы, стремящемся к нулю:

$$\vec{r}_c = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \Delta P_k}{\sum_{k=1}^n \Delta P_k},$$

где $\vec{r}_k$ - радиус-вектор элементарного объёма; ΔP_k - вес частицы.

Этот предел представляет собой, по определению, интеграл

$$\vec{r}_c = \frac{1}{P} \int \vec{r} dP$$

При вычислении подобных интегралов переходят к интегрированию по объёму, для чего вводится понятие удельного веса

$$\gamma(\vec{r}) = \gamma(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V},$$

где ΔV – элемент объёма.

Таким образом,

$$\vec{r}_c = \frac{\int \gamma(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int \gamma(\vec{r}) dV} \quad (5.10)$$

Формула (5.10) является наиболее общей для определения положения центра тяжести сплошного тела.

Если удельный вес тела не зависит от координат, тело называется однородным. Для однородных тел, полагая в формуле (5.10)

$$\gamma(\vec{r}) = \text{const},$$

получаем:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV \quad (5.11)$$

где V – объём тела.

Если однородное тело представляет собой пластину постоянной толщины $h = \text{const}$, то $dV = h dS$, $V = hS$, где S – площадь поверхности пластины. В этом случае для определения положения центра тяжести тела необходимо вычислить поверхностный интеграл:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{S} \int \vec{r} dS \quad (5.12)$$

Если однородное тело представляет собой стержень с постоянной площадью поперечного сечения $\sigma = const$, то $dV = \sigma dl$, $V = \sigma L$ и формула (5.10) принимает вид:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{L} \int \vec{r} dL \quad (5.13)$$

где L – длина однородного стержня.

Во многих случаях положение центра тяжести тела можно определить при помощи весьма простых методов. Рассмотрим некоторые из них.

5.2.1. СПОСОБЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СПЛОШНОГО ТЕЛА.

Рассмотрим способы определения центров тяжести тел.

1. Симметрия однородных тел.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости. Для доказательства этого утверждения примем плоскость симметрии за координатную плоскость xy . Записывая формулу (5.11) в проекциях на координатную ось z , получаем:

$$z_c = \frac{1}{V} \int z dV = \frac{1}{V} \left(\int_{V_1} z dV + \int_{V_2} z dV \right) \quad (5.14)$$

поскольку область интегрирования разбивается на две симметричные области V_1 и V_2 , в первой из которых $z > 0$, а во второй $z < 0$.

Аналогично можно показать, что если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси; если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела совпадает с его центром симметрии.

2.Метод разбиений.

Метод разбиений для определения центра тяжести тела состоит в том, что тело разбивается на конечное число частей, положение центров тяжести которых известно. Положение центра тяжести тела определяется по формуле (5.12).

Пример 5.1.

Определить положение центра тяжести однородной пластины, изображённой на Рис. 5.3.

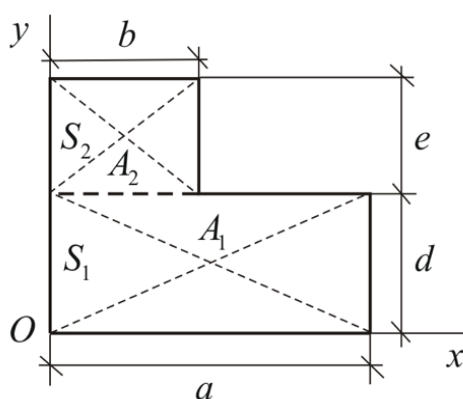


Рис.5.3. Плоская фигура, состоящая из двух прямоугольников

Разобьём данную плоскую фигуру, а именно пластину на два прямоугольника с площадями $S_1 = ad$ и $S_2 = be$ соответственно. Прямоугольники обладают осевой симметрией и их центры тяжести находятся в точке пересечения диагоналей

$$x_1 = \frac{a}{2} \quad y_1 = \frac{d}{2} \quad (5.15)$$

$$x_1 = \frac{b}{2} \quad y_1 = d + \frac{e}{2} \quad (5.16)$$

Для однородной пластины постоянной толщины вес пропорционален площади поверхности. В проекциях на координатные оси из формулы (5.12) получаем искомую точку, которая является центром масс данного прямоугольника, имеющего сложную геометрическую форму:

$$x_c = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{s_1 + s_2} = \frac{a^2 d + b^2 e}{2(ad + be)}, \quad y_c = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2}{s_1 + s_2} = \frac{a^2 d + 2bde + b^2 e}{2(ad + be)}$$

3. Метод дополнений или метод отрицательных масс.

Метод дополнений или метод отрицательных масс представляет собой частный случай метода разбиений, применяется для тел имеющих вырезы (полости), вес которых (для однородных тел – объём или площадь) считается отрицательным.

Пример 5.2.

Определить положение центра тяжести однородной пластины, изображённой на Рис. 5.4.

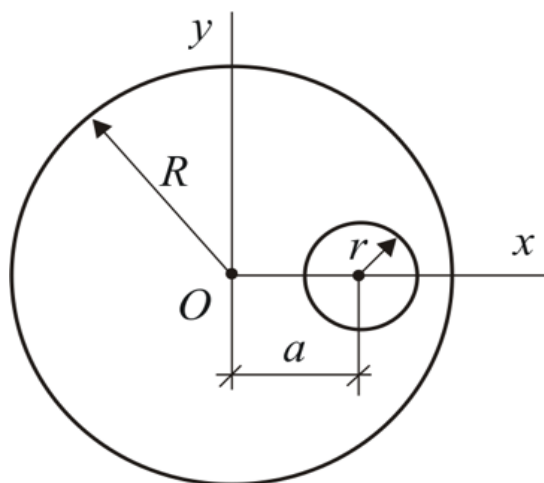


Рис. 5.4. Определение центра тяжести однородной пластины

Прежде всего заметим, что пластина имеет ось симметрии, проходящую через центр пластины и центр выреза. Примем эту ось за координатную ось x . Тогда $y_c = 0$.

Разобьём пластину на две части: круг без выреза радиуса R и вырез радиуса r с центром A . При этом $x_1 = 0$ $S_1 = \pi R^2$ и $x_2 = a$ $S_2 = -\pi r^2$

Используя формулу (5.12), получаем:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = -\frac{a}{R^2 - r^2}$$

Ответ:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = -\frac{a}{R^2 - r^2}$$

$$y_c = 0$$

Пример 5.3.

Определить положение центра тяжести однородной треугольной пластины, изображённой на Рис. 5.5.

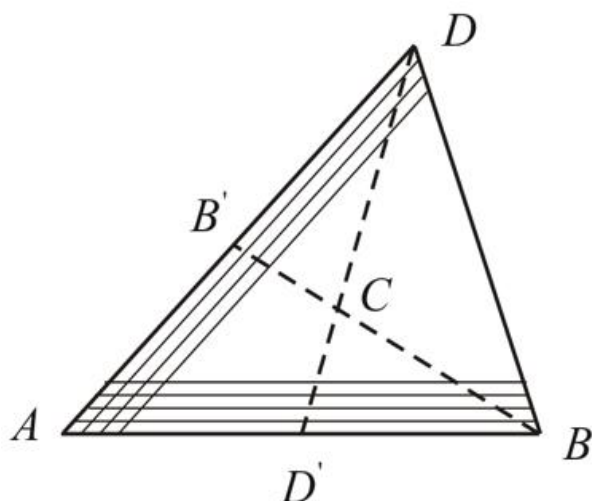


Рис. 5.5. Центр тяжести сплошного треугольника

Разобьём треугольник на элементарные полоски, параллельные одной из сторон, например, стороне AB . Центр тяжести каждой полоски в силу симметрии лежит на её середине, а центр тяжести треугольника расположен, следовательно, на медиане DD' . Проводя аналогичное разбиение параллельно другой стороне, например AD , получаем, что центр тяжести лежит на медиане BB' . Таким образом, центр тяжести однородного треугольника расположен в точке пересечения его медиан.

Пример 5.4.

Определить положение центра тяжести однородной дуги окружности радиуса R с центральным углом 2α (Рис. 5.6).

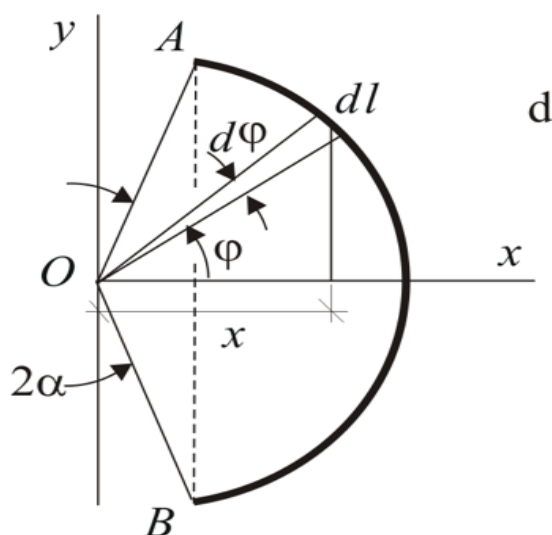


Рис.5.6. Положение центра тяжести однородной дуги окружности

Начало координат совместим с центром окружности, ось x направим перпендикулярно хорде АВ, стягивающей дугу. В этом случае ось x будет осью симметрии тела и, следовательно, $y_c=0$. Для вычисления x_c используем формулу (5.13):

$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dl \quad \text{причём,} \quad x = R \cos \varphi \quad L = 2R\alpha \quad dl = R d\varphi$$

Тогда

$$x_c = \frac{1}{2R\alpha} \int_{\alpha}^{-\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Пример 5.5.

Определить положение центра тяжести однородного кругового сектора радиуса R с центральным углом 2α (Рис. 5.7).

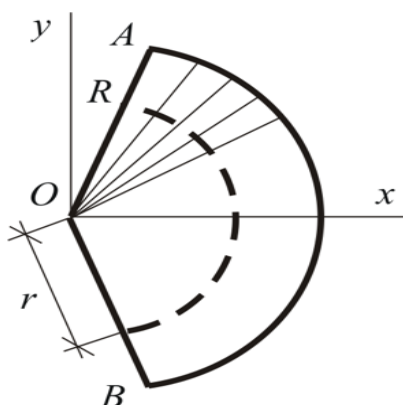


Рис. 5.7. Определение центра тяжести однородного кругового сектора

Разобьём пластину на элементарные круговые секторы. Каждый элементарный сектор можно рассматривать как равнобедренный треугольник, центр тяжести которого расположен в точке пересечения медиан, которые, как

известно, делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Таким образом, центр тяжести рассматриваемого кругового сектора совпадает с центром тяжести однородной дуги окружности радиуса $r = \frac{2R}{3}$ и таким же центральным углом. Используя результат, полученный в предыдущем примере, находим:

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Положение центра тяжести играет важную роль в вопросах устойчивости и предотвращения опрокидывания сооружений.

В заключение заметим, что при определении положения центра тяжести как вид результата, так и трудоёмкость его получения существенно зависят от выбора системы координат.