Лекция 10.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ.

10.1. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Опр.1 ***Движение тела называется плоскопараллельным, если расстояние от любой точки тела до некоторой неподвижной (основной) плоскости остается неизменным во все время движения***

Проведем сечение тела параллельное основной плоскости (Рис. 10.1).

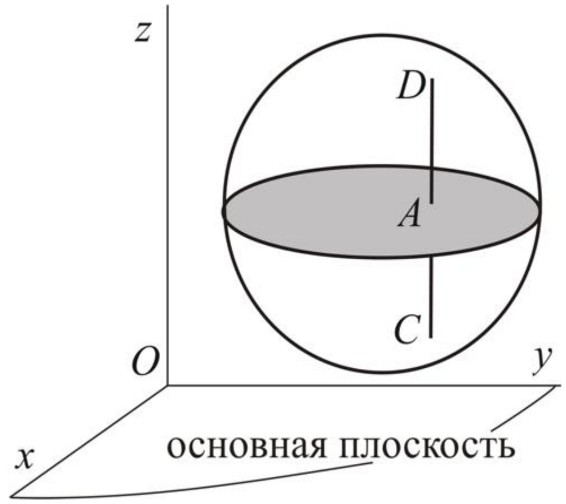

Рис. 10.1. Плоскопараллельное движение твердого тела

Через любую точку A сечения проведем отрезок CD, перпендикулярный основной плоскости. Из определения плоскопараллельного движения следует, что отрезок CD движется поступательно. Таким образом, движение сечения полностью определяет плоскопараллельное движение тела.

Рассмотрим движение сечения (плоской фигуры) в своей плоскости (Рис. 10.2). Пусть A любая точка плоской фигуры. Примем точку A за начало системы координат $Ax'y'z'$, оси которой движутся поступательно по отношению к основной системе $Oxyz$. По отношению к системе $Ax'y'z'$ плоская фигура может только вращаться вокруг подвижной оси Az'.

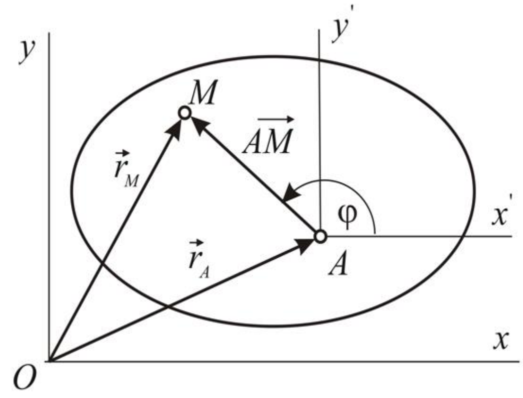

Рис. 10.2. Движение точки М вокруг полюса А

Чтобы задать положение плоской фигуры, а следовательно, и всего тела, необходимо задать положение точки A – полюса, а также задать вращение плоской фигуры по отношению к системе $Ax'y'z'$. Таким образом, закон плоскопараллельного движения тела имеет вид:

$$x_A = x(t); \qquad y_A = y(t); \qquad \varphi = \varphi(t), \tag{10.1}$$

то есть при плоскопараллельном движении тело имеет три степени свободы. Как видно, два первых уравнения описывают поступательную часть плоского движения, а последнее уравнение описывает вращение тела вокруг оси, проходящей через полюс A.

Вычисление скорости любой точки тела. Вычислим скорость любой точки M тела. В любой момент времени имеет место равенство (Рис. 10.2)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}. \tag{10.2}$$

Тогда

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AM}}{dt} = \vec{V}_A + \vec{V}_{M/A} \qquad (10.3)$$

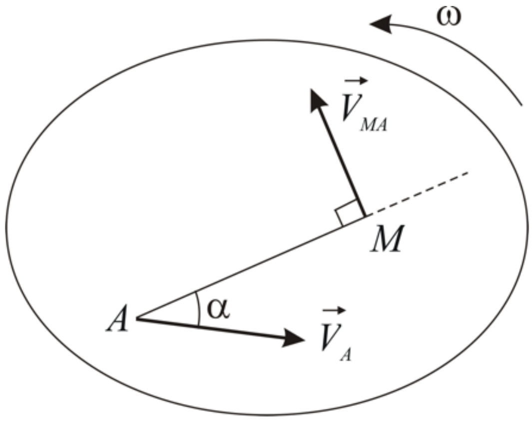

Рис. 10.3. линейные скорости двух точек при плоскопараллельном движении твердого тела

Вектор $\vec{V}_{M/A}$ представляет собой скорость, полученную точкой M при вращении плоской фигуры вокруг оси Az'. Этот вектор направлен перпендикулярно отрезку AM (по касательной к окружности, которую описывает точка M при вращении тела вокруг оси Az'), причем в сторону вращения тела (Рис. 10.3). Модуль скорости определяется по формуле Эйлера:

$$V_{M/A} = \omega\, AM\,.$$

Поскольку вектор $\vec{V}_{M/A}$ перпендикулярен отрезку AM, из формулы (10.3) получаем полезное для практических целей утверждение, которое обычно называют теоремой о проекциях.

Теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры:

Проекции скоростей концов отрезка, соединяющего две точки абсолютно твердого тела, на направление этого отрезка равны.

Мгновенный центр скоростей (МЦС).

Как уже говорилось, за полюс можно принять любую точку плоской фигуры. В данный момент времени различные точки тела имеют разные скорости. За полюс имеет смысл принимать точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

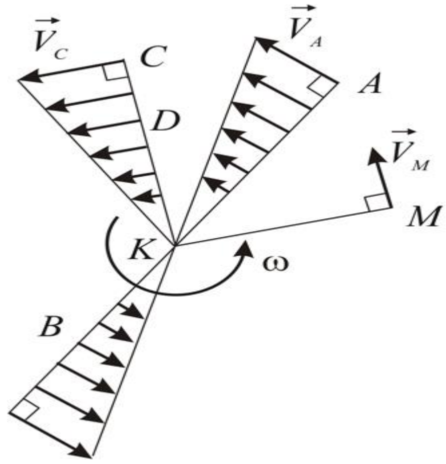

Рис. 10.4. Распределение скоростей точек плоской фигуры

<u>Опр.2</u> Точка, принадлежащая плоской фигуре или неизменно с ней связанная, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Примем за полюс мгновенный центр скоростей K. В соответствии с формулой (10.3), получаем, что скорость любой точки M плоской фигуры определяется так же, как если бы тело вращалось вокруг оси Kz' (Рис. 10.4):

$$\vec{V}_M = \vec{V}_K + \vec{V}_{M/K} = \vec{V}_{M/K} ,$$

так как

$$\vec{V}_K = 0.$$

Рассмотрим способы определения положения мгновенного центра скоростей (МЦС).

1. Пусть известны направления скоростей двух точек A и B плоской фигуры, причем вектор $\vec{V}_A$ не параллелен вектору $\vec{V}_B$. Как видно из Рис. 10.5, в этом случае мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки A и B к векторам скоростей этих точек.

2. Пусть известны направления скоростей двух точек A и B, причем вектор $\vec{V}_A$ параллелен вектору $\vec{V}_B$, но отрезок AB не перпендикулярен скоростям (Рис. 10.5).

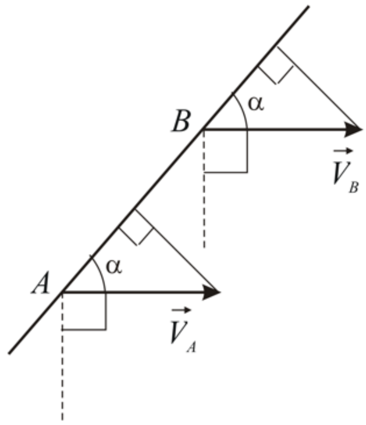

Рис. 10.5. Построение МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры параллельны, но не перпендикулярны AB

Проекции скоростей точек A и B на направление AB, в соответствии с теоремой о проекциях, равны между собой $V_A \cos\alpha = V_B \cos\alpha$ и, следовательно, равны между собой векторы скоростей $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. Используя формулу (10.3)

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{M/A},$$

получаем

$$\vec{V}_{B/A} = 0,$$

то есть

$$V_{B/A} = \omega\, AB = 0,$$

отсюда:

$$\omega = 0.$$

Таким образом, в данный момент времени угловая скорость тела равна нулю и скорости всех точек тела одинаковые. Имеем мгновенно поступательное распределение скоростей. Что касается положения мгновенного центра скоростей, то как видно из Рис. 10.5, перпендикуляры к скоростям оказываются параллельными. Можно считать, что мгновенный центр скоростей (МЦС) находится в бесконечно удаленной точке и $\omega = 0$.

3. Пусть скорости точек A и B параллельны между собой и перпендикулярны отрезку AB (Рис. 10.6).

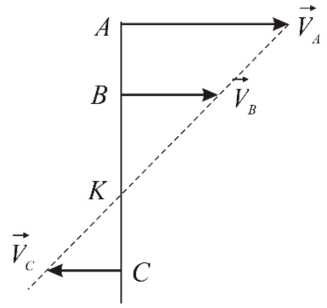

Рис. 10.6. Построение МЦС в случае, когда скорости двух точек плоской фигуры параллельны и перпендикулярны AB

В этом случае перпендикуляры к скоростям сливаются на прямой AC. Положение мгновенного центра скоростей K на перпендикуляре AB можно определить из соображений пропорциональности модулей скоростей расстояниям от точек до мгновенного центра скоростей. Расстояние AK можно определить из системы уравнений

$$V_A = \omega AK; \qquad V_B = \omega BK; \qquad AK - BK = AB, \qquad (10.4)$$

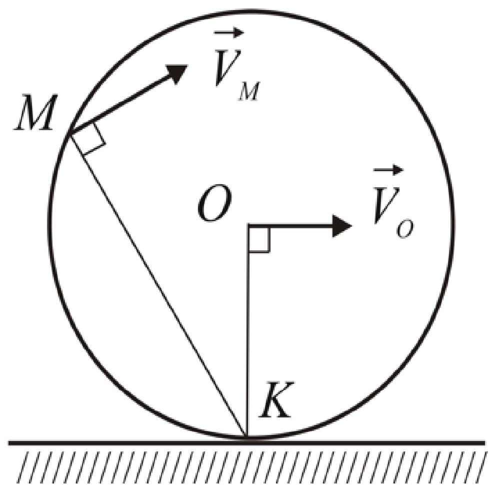

Рис. 10.7. Плоскопараллельное движение колеса

которую удобнее всего решить графически. Заметим, что в рассматриваемом случае для определения положения мгновенного центра скоростей кроме направления скоростей двух точек необходимо знать и их модули.

4. Особый интерес представляет случай качения колеса по неподвижной поверхности. Если колесо катится без проскальзывания, то мгновенный центр скоростей находится в точке касания колеса и опорной поверхности (Рис. 10.7).

Вычисление ускорений точек тела, совершающего плоскопараллельное движение. Ускорение любой точки M плоской фигуры складывается из ускорения точки A, принятой за полюс, и ускорения, полученного точкой M при вращении плоской фигуры вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоской фигуре:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{M/A}. \qquad (10.5)$$

Вектор $\vec{W}_{M/A}$ удобно разложить на составляющие – на вращательное и осестремительное ускорения (Рис. 10.8):

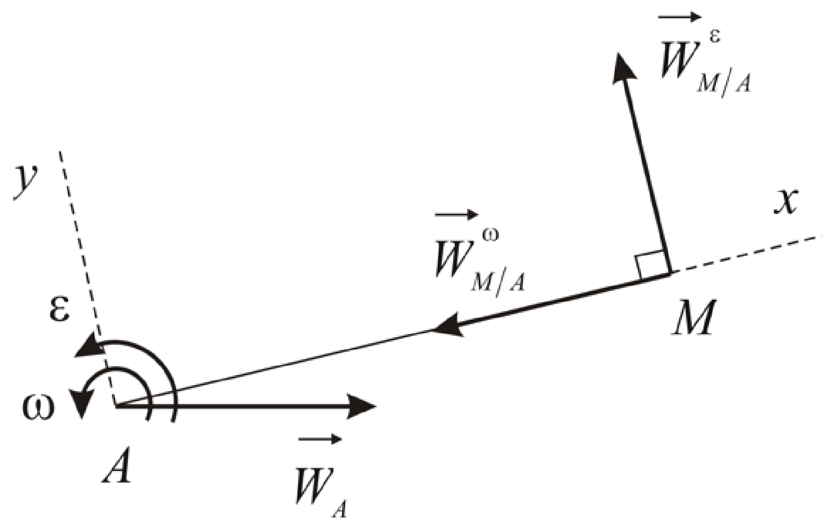

Рис. 10.8. Определение полного ускорения точки M

$$W^{\omega}_{M/A} = \omega^2 \cdot AM; \qquad W^{\varepsilon}_{M/A} = \varepsilon \cdot AM.$$

Уравнение (10.5) можно решать аналитически или геометрически. При аналитическом способе решения уравнение (10.5) записывают в проекциях на оси координат, одну из которых можно направить по прямой, соединяющей точки A и M, а вторую перпендикулярно AM:

$$W_{Mx} = W_{Ax} - \omega^2 \cdot AM; \qquad W_{My} = W_{Ay} + \varepsilon \cdot AM;$$

Пример 10.1.

Положение механизма определяется углом φ поворота кривошипа OA. Кинематическая схема механизма, размеры звеньев, а также угловая скоростьω_0 и угловое ускорение ε_0 кривошипа OA приведены в Таблице.

В задаче необходимо выполнить следующее.

1. Выбрав масштаб расстояний, построить механизм в заданном положении.
2. Найти и показать на чертеже скорость и ускорение точки A.
3. Найти скорости точек B, C, D, E и угловые скорости звеньев механизма припомощи мгновенных центров скоростей. Необходимые расстояния измерятьв масштабе по чертежу.

Дано:

$\omega_0 = 2\ \text{с}^{-1}$; $\varepsilon_0 = 3\ \text{с}^{-2}$; угловые скорость и ускорение направлены против хода часовой стрелки $\varphi = 45^{\circ}$;

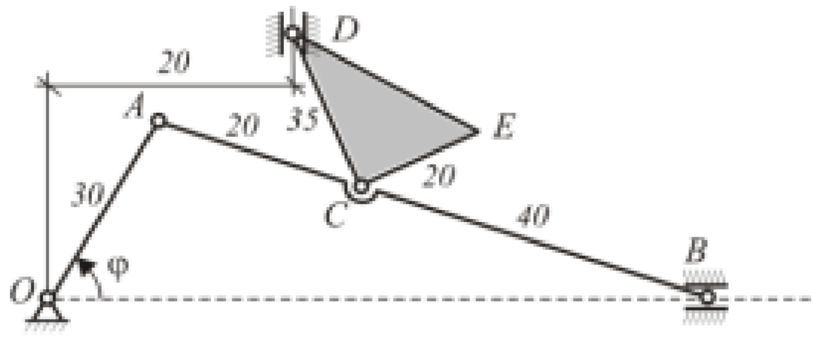

Рис. 10.9. механизм, движущийся плоскопараллельно

Решение

Изобразим заданное положение механизма (Рис. 10.10) с учетом заданного угла φ в выбранном масштабе по длине (в 1 см рисунка – 5 см, масштабный коэффициент $k = 5$).

По заданной угловой скорости кривошипа ОА найдем модуль скорости точки А.

$$v_A = \omega_O \cdot OA = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с}$$

Вектор $\overrightarrow{v_A}$ направлен перпендикулярно кривошипу ОА в сторону дуговой стрелки ω_O.

Так как кривошип *OA* совершает вращательное движение, то его ускорение можно представить как:

$$\overrightarrow{w_A} = \overrightarrow{w_A^\tau} + \overrightarrow{w_A^n}$$

Касательное ускорение точки А направлено перпендикулярно ОА в сторону дуговой стрелки ε_O и численно равно:

$$w_A^\tau = \varepsilon_O \cdot OA = 3 \cdot 30 = 90 \,\text{см/с}^2$$

Нормальное ускорение точки А направлено от точки А к оси вращения – точке О и численно равно:

$$w_A^n = \omega_O^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 30 = 120 \,\text{см/с}^2$$

Модуль ускорения точки *A:*

$$w_A = \sqrt{(w_A^\tau)^2 + (w_A^n)^2} = \sqrt{90^2 + 120^2} = 150 \text{ см/с}^2$$

Положение МЦС (точка P_{AB}) шатуна AB найдем по известной скорости $\overrightarrow{v_A}$ и известному направлению скорости ползуна В. Для этого проводим через точки А и В перпендикуляры к направлениям скоростей этих двух точек до их пересечения в точке P_{AB}.

Проведем прямую CP_{AB} , измерим полученные отрезки и с учетом масштаба получим:

$$P_{AB}A = 16 \cdot 5 = 80 \text{ см}$$

$$P_{AB}B = 15{,}5 \cdot 5 = 77{,}5 \text{ см}$$

$$P_{AB}C = 14{,}7 \cdot 5 = 73{,}5 \text{ см}$$

Тогда угловая скорость звена АВ равна:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{60}{80} = 0{,}75\ c^{-1}$$

И направлена по ходу часовой стрелки в соответствии с направлением скорости точки А.

Тогда скорость точки В:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B = 0{,}75 \cdot 77{,}5 = 58{,}1 \text{ см/с}$$

И скорость точки С будет направлена перпендикулярно CP_{AB} в соответствии с направлением угловой скорости звена AB и равна:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot P_{AB}C = 0{,}75 \cdot 73{,}5 = 56{,}1 \text{ см/с}$$

Положение МЦС (точка P_{CDE}) треугольника CDE найдем по известной скорости $\overrightarrow{v_C}$ и известному направлению скорости ползуна D. Для этого проводим через точки C и D перпендикуляры к направлениям скоростей этих двух точек до их пересечения в точке P_{CDE}.

Проведем прямую EP_{CDE}, измерим полученные отрезки и с учетом масштаба получим:

$$P_{CDE}C = 6{,}5 \cdot 5 = 32{,}5 \text{ см}$$

$$P_{CDE}D = 7{,}5 \cdot 5 = 37{,}5 \text{ см}$$

$$P_{CDE}E = 3{,}3 \cdot 5 = 16{,}5 \text{ см}$$

Тогда угловая скорость звена CDE равна:

$$\omega_{CDE} = \frac{v_C}{P_{CDE}C} = \frac{56{,}1}{32{,}5} \approx 1{,}73\ c^{-1}$$

И направлена по ходу часовой стрелки в соответствии с направлением скорости точки С.

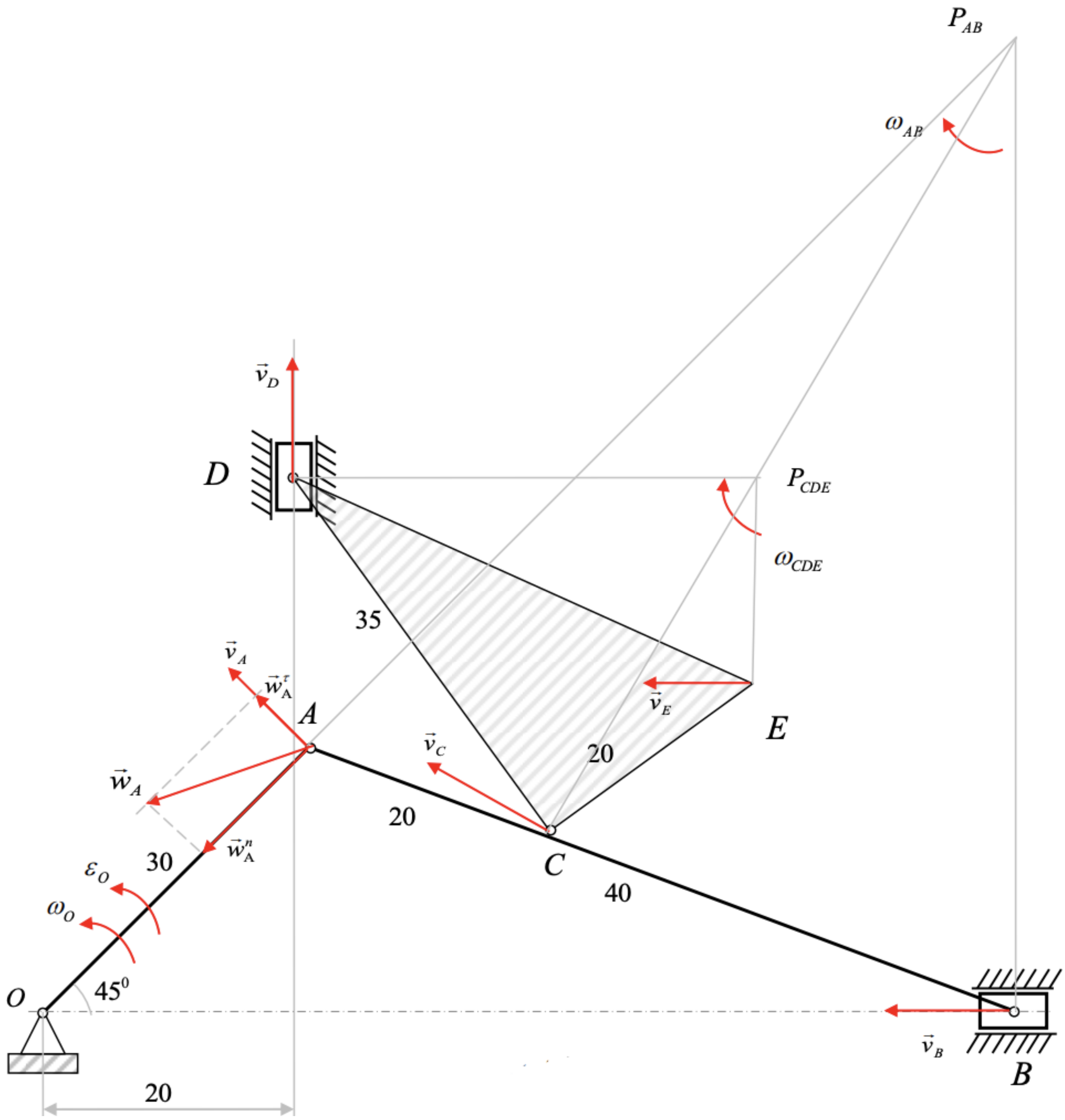

Рис. 10.10. скорости точек плоского механизма

Тогда скорость точки D:

$$v_D = \omega_{CDE} \cdot P_{CDE}D = 1{,}73 \cdot 37{,}5 = 64{,}9 \text{ см/с}$$

И скорость точки E будет направлена перпендикулярно EP_{CDE} в соответствии с направлением угловой скорости звена CDE и равна:

$v_E = \omega_{CDE} \cdot P_{CDE}E = 1{,}73 \cdot 16{,}5 = 28{,}5 \text{ см/с}$.

Ответ:

$v_B = 58{,}1 \text{ см/с}$, $v_E = 28{,}5 \text{ см/с}$,

$v_C = 56{,}1 \text{ см/с}$, $v_D = 64{,}9 \text{ см/с}$