Лекция 4.

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ СИЛ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ.

4.1. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ СИЛ.

В соответствии с Аксиомой 1 система сил $\{\vec{F}_k'\}$ эквивалентна одной силе $\vec{R}_o$, приложенной в точке O и равной геометрической сумме всех заданных сил:

$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (4.1)$$

В соответствии с теоремой о сложении пар система пар сил $(\vec{F}_k, \vec{F}_k'')$ эквивалентна одной паре, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар, т.е. сумме моментов всех сил исходной системы относительно точки O:

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}\left(\overrightarrow{F_K}, \vec{F}_k''\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_K}\right) \qquad (4.2)$$

Таким образом, установлены две важнейшие характеристики системы сил. Это главный вектор системы сил и главный момент системы сил.

<u>Опр.1</u> Главным вектором системы сил называется геометрическая сумма всех сил системы:

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_K} \qquad (4.3)$$

<u>Опр.2</u> Главным моментом системы сил относительно некоторого центра О называется геометрическая сумма моментов всех сил системы относительно точки О вида:

$$\overrightarrow{M_0}^* = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_K}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA}_k \times \overrightarrow{F_K} \qquad (4.4)$$

Вектор главного момента изображают приложенным в той точке O, относительно которой он вычисляется.

Заметим, что главный вектор и главный момент системы сил представляют собой чисто геометрические величины и не могут рассматриваться как некоторая сила или момент некоторой силы.

Доказанную выше теорему о приведении системы сил к одному центру теперь можно сформулировать в виде.

Теорема.

Произвольная система сил эквивалентна системе, состоящей из одной силы, равной главному вектору системы сил, приложенной в произвольно выбранной точке (центре приведения), и одной пары сил, момент которой равен главному моменту системы сил относительно этой точки.

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{R^*} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_K} \qquad (4.4)$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_0}^{*} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_K}) \qquad (4.5)$$

4.2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ.

Второй основной задачей статики является определение условий, при которых заданная система сил эквивалентна нулю или является уравновешенной.

Теорема.

Система сил эквивалентна нулю или уравновешена тогда и только тогда, когда её главный вектор и главный момент относительно произвольной точки равны нулю.

Доказательство.

Приведём заданную систему сил к произвольно выбранному центру O. В соответствии с теоремой о приведении системы сил к одному центру, исходная система сил эквивалентна одной силе $\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{R^*}$, приложенной в выбранном центре О, и одной паре сил $\overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_C}$, момент которой $\vec{M}(\overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_C}) = \overrightarrow{M_0}^{*}$ то есть

$$\{\overrightarrow{F_k}\} \sim \{\overrightarrow{R_0}, \overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_C}\} \text{ причём } \quad \overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{R^*};\ \overrightarrow{Q_0} = -\overrightarrow{Q_C};\ \vec{M}(\overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_C}) = \overrightarrow{M_0}^{*}$$

Силы $\overrightarrow{R_0}$ и $\overrightarrow{Q_0}$ заменим равнодействующей $\overrightarrow{P_0}$ (Рис. 4.1).

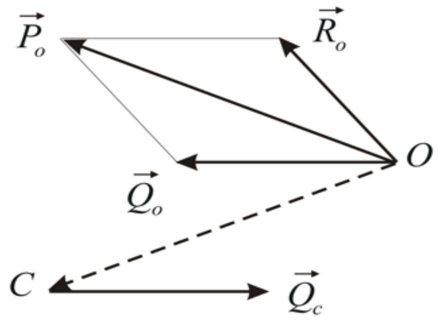

Рис. 4.1. Замена системы двух сил равнодействующей

Таким образом, любую систему сил можно заменить эквивалентной системой двух сил. При этом имеем главный вектор

$$\overrightarrow{P_0} + \overrightarrow{Q_C} = \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{Q_0} + \overrightarrow{Q_C} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_K} = \overrightarrow{R^*} \qquad (4.6)$$

И главный момент относительно центра приведения

$$\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{Q_C} = \vec{M}\left(\overrightarrow{Q_0}, \overrightarrow{Q_C}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_K}\right) = \overrightarrow{M_0}^{*} \qquad (4.7)$$

Аксиома 2 устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия системы двух сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу – силы должны быть равными по модулю, противоположными по направлению $\overrightarrow{P_0} + \overrightarrow{Q_C} = 0$ и, кроме того, должны иметь общую линию действия (Рис. 4.2), то есть

$$\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{Q_C} = 0.$$

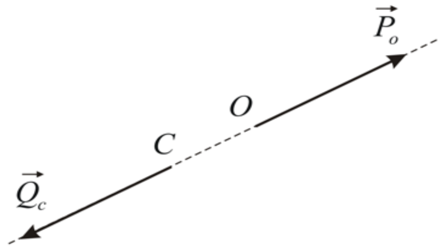

Рис. 4.2. Условие равновесия системы двух сил

Сравнивая последние равенства, находим, что для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех сил системы или главный вектор, равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_K} = 0 \tag{4.7}$$

И сумма моментов всех сил системы относительно произвольно выбранной точки или главный момент относительно любого неподвижного центра, равнялся нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_K}\right) = 0 \tag{4.7}$$

Принимая центр приведения за начало декартовой системы координат, получаем в проекциях на координатные оси:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{KX} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_X\left(\overrightarrow{F_K}\right) = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{YX} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_Y\left(\overrightarrow{F_K}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ZX} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_Z(\overrightarrow{F_K}) = 0$$

Таким образом,

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трёх взаимно перпендикулярных осей координат равнялась нулю и сумма моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялась нулю.

Пример 4.1

Однородная прямоугольная плита веса Q, прикрепленная к стенке при помощи сферического шарнира A и цилиндрического шарнира B, удерживается в горизонтальном положении при помощи невесомого стержня, шарнирно закрепленного по концам. К плите приложена сила F и пара сил с моментом M .

Определить опорные реакции и усилие в стержне.

Дано:

a=0,6м; b=0,8м; c=0,2м; d =0,2м; α =30^0; Q=4кН; F =5кН; M =2кНм.

Определить: опорные реакции и усилие в стержне.

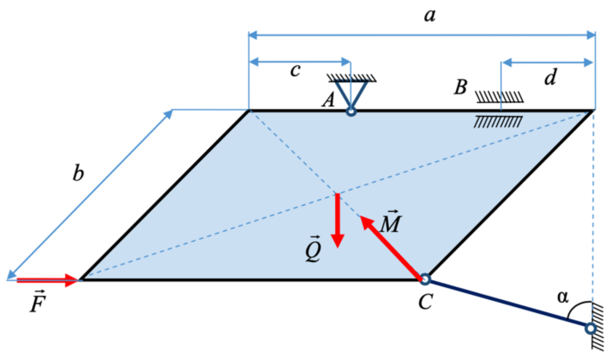

Рис 4.3. Прямоугольная плита в равновесии

Решение.

Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом $\overrightarrow{M}$. Так как плита однородная, то точка приложения силы тяжести $\vec{Q}$ расположена на пересечении диагоналей соответствующего прямоугольника.

Введем систему координат как показано на Рис. 4.3. Освободим конструкцию от связей и приложим к ней реакции связей.

$\overrightarrow{X_A}$, $\overrightarrow{Y_A}$, $\overrightarrow{Z_A}$ – составляющие реакции сферического шарнира А,

$\overrightarrow{X_B}$, $\overrightarrow{Z_B}$ – составляющие реакции цилиндрического подшипника В, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси подшипника.

Реакцию стержня в точке С обозначим через $\overrightarrow{N}$. Направляем ее вдоль линии стержня, как показано на Рис. 4.4, считая, что стержень растянут.

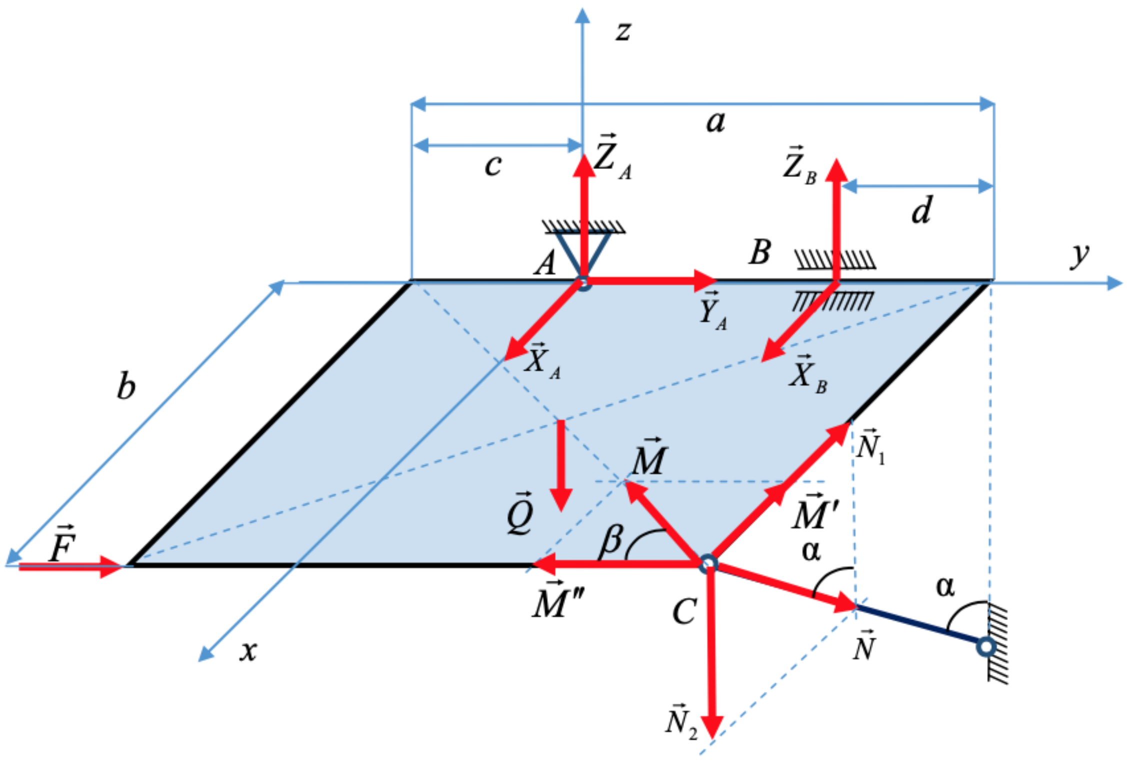

Рис. 4.4. Силы, действующие на прямоугольную плиту, находящуюся в равновесии

M ‖ xAy ⇒ M = M ′ + M ′ , где M ′ ‖ Ax; M ″ ‖ Ay и, так как

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}6^2+0{,}8^2}} = 0{,}6 \qquad (4.8)$$

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{0{,}6^2+0{,}8^2}} = 0{,}8 \qquad (4.9)$$

M′=M·cosβ =2·0,6=1,2кНм, M′=M·sinβ =2·0,8=1,6 кН м

Так как сила $\overrightarrow{N}$ параллельна плоскости xz, то вектор можно представить как

$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2}$ причем,

$N_1 = N \cdot sin\alpha = N \cdot sin(30)^0 = 0,5 \cdot N$

$$N_2 = N \cdot cos\alpha = N \cdot cos(30)^0 = 0,866\ b$$

Для изображенной на рисунке пространственной системы сил составляем шесть уравнений равновесия, т. е. три уравнения проекций сил на оси x, y и z и три уравнения моментов сил относительно этих осей:

Составим уравнение суммы проекций всех сил, действующих на прямоугольную плиту, на ось *Ox*.

$$\Sigma F_x = 0, \quad X_A + X_B - N_1 = 0 \tag{4.10}$$

или

$$X_A + X_B\ 0,5 \cdot N = 0 \tag{4.11}$$

Составим уравнение суммы проекций всех сил, действующих на прямоугольную плиту, на ось *Oy*. Имеем

$$\Sigma F_y = 0, \quad Y_A + F = 0 \tag{4.12}$$

Откуда

$$Y_A = -F = -5\ кН \tag{4.13}$$

Составим уравнение суммы проекций всех сил, действующих на прямоугольную плиту, на ось *Oz*. Имеем

$$\Sigma F_z = 0, \quad Z_A + Z_B - N_2 - Q = 0 \tag{4.14}$$

или

$$Z_A + Z_B 1{,}5\, N - Q = 0 \qquad (4.15)$$

Составим уравнение моментов всех сил, действующих на прямоугольную плиту, относительно оси X.

$$\Sigma M_X (\vec{F}_k) = 0 \qquad (4.16)$$

$$-Q\left(\frac{a}{2} - c\right) - N_2 \cdot (a-c) + Z_B \cdot (a-c-d) - M' = 0 \qquad (4.17)$$

$$-Q\left(\frac{a}{2} - c\right) - N \cdot (a-c) + Z_B \cdot (a-c-d) - M' = 0$$

Составим уравнение моментов всех сил, действующих на прямоугольную плиту, относительно оси Y.

$$\Sigma M_Y\ \overrightarrow{F_k})) = 0\ , \quad Q \cdot 0{,}5b + N_2 \cdot b - M'' = 0 \qquad (4.18)$$

или

$$Q \cdot 0{,}5b + \cdot 1{,}5N \cdot b - M'' = 0,\ 22 \qquad (4.19)$$

Откуда находим реакцию невесомого стержня, равную:

$$N = \frac{M'' - 0{,}5Qb}{\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \frac{1{,}6 - 4 \times \frac{0{,}8}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0{,}8} = 0 \qquad (4.20)$$

Составим уравнение моментов всех сил, действующих на прямоугольную плиту, относительно оси Z . Так как прямоугольная плита находится в равновесии, то из условий равновесия имеем:

$$\Sigma M_Z (\overrightarrow{F_k}) = 0, \qquad (4.21)$$

С учетом сил, которые действуют на прямоугольную плиту, имеем:

$$-X_B \cdot(a-c-d)+N_1\cdot(a-c)+F\cdot b=0 \qquad (4.22)$$

или

$$-X_B \cdot(a-c-d)+0{,}5\cdot N\cdot(a-c)+F\cdot b=0 \qquad (4.23)$$

Откуда получаем:

$$X_B = \frac{1}{a-c-d}(0.5N(a-c)+Fb) = \\ = \frac{1}{0{,}6-0{,}2-0{,}2}(0{,}5\times 0 \\ \times(0{,}6-0{,}2)+5\times 0{,}8) = 20\ (\text{кН}) \qquad (4.24)$$

Таким образом, находим все неизвестные из уравнений (4.10) – (4.13), (4.18), (4.19), (4.20), (4.24). Имеем:

$$Z_A = -Z_B + \frac{\sqrt{3}}{2}N + Q = -8 + \frac{\sqrt{3}}{2}\times 0 = -4\ \text{кН}$$

$$X_A = -X_B + 0{,}5N = -20 + 0{,}5\times 0 = -20\ \text{кН}$$

Так как значения реакций X_A, Y_A и Z_A - отрицательные, то действительные направления реакций противоположны принятым на рисунке 4.3.

Ответ:

$X_A = -20$ *кН;*

$Y_A = -5$ *кН;*

$Z_A = -4$ *кН;*

$X_B = 20$ *кН;*

$Z_B = 8$ *кН;*

$N = 0$ *кН.*