

Лекция 1.

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ. СВОБОДНЫЕ И НЕСВОБОДНЫЕ ТЕЛА. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ.

1.1 ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ.

Теоретическая механика представляет собой науку об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике изучаются условия равновесия материальных тел, механических систем под действием сил, которые на них действуют. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. В динамике изучается движение материальных тел или механических систем под действием сил, которые на них действуют.

В теоретической механике изучается одна из форм движения материи – механическое движение, состоящее в том, что тело с течением времени изменяет своё положение в пространстве по отношению к другим телам.

Механическим называют тот вид взаимодействия тел, в результате которого происходит изменение их движения или изменение их формы, то есть деформация.

В механике рассматриваются различные модели материальных тел: материальная точка, механическая система, сплошное тело и так далее. В первом разделе теоретической механики – статике в основном используется модель абсолютно твёрдого тела, в которой пренебрегают малыми изменениями формы тела (деформациями).

Опр.1 Абсолютно твёрдым называется тело, в котором расстояние между любыми двумя точками не изменяется при любых механических взаимодействиях.

Изменение состояния тела – нарушение состояния покоя или изменение характера движения происходят в результате его механического взаимодействия с другими телами.

В основе механики лежат законы, называемые законами классической механики или законами Ньютона. Данные законы получены путём обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение в процессе всей практики человечества.

Фундаментальным понятием механики является сила, которая представляет собой количественную меру механического взаимодействия материальных тел. Сила – величина векторная. Её действие на тело определяется численным значением или модулем силы, направлением действия и точкой приложения (Рис.1.1). Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Единицей измерения силы в стандартной системе единиц измерения СИ является ньютон (Н).



Рис. 1.1. Вектор силы. Линия действия силы

Характер механического взаимодействия материальных тел определяет третий закон Ньютона (Рис. 1.2):

Опр.2 Два материальных тела взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны.

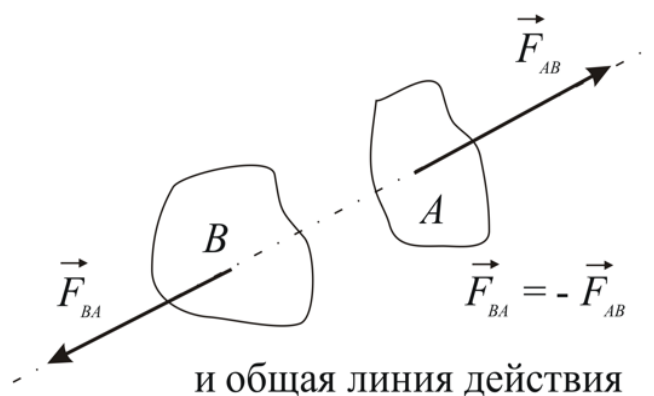


Рис. 1.2. Закон действия и противодействия двух сил

1.2. СВОБОДНЫЕ И НЕСВОБОДНЫЕ ТЕЛА.

Различают свободные и несвободные тела. Перемещения в пространстве несвободного тела ограничены. Тело, ограничивающее свободу перемещения рассматриваемого материального объекта, называется связью. Сила, с которой связь действует на тело (систему тел), называется силой реакции связи. Реакции связей заранее неизвестны, они зависят от приложенных к телу активных сил, то есть носят пассивный характер. Если на тело связи не наложены, тело называется свободным.

При изучении покоя или движения несвободного тела это тело мысленно выделяют из системы окружающих тел. При этом механическое действие связей учитывают, вводя реакции связей. Такой приём обычно формулируют как принцип освобождаемости от связей:

Аксиома освобождаемости от связей:

Любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их механическое действие на тело силами реакций связей.

Как уже говорилось, начнём с рассмотрения вопросов равновесия материальных тел и механических систем. Под равновесием, не вдаваясь пока

в подробности, будем понимать состояние покоя данного тела по отношению к какому-либо другому телу, например, по отношению к Земле.

1.3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ.

Рассмотрим виды связей, наложенных на несвободное тело. Основная идея, положенная в основу подхода к решению задач в аналитической механике, состоит в том, чтобы разделить задачу определения закона движения механической системы и задачу определения неизвестных реакций связей. Для этого необходимо получить дифференциальные уравнения движения механической системы в виде, не содержащем реакций связей. Напомним основные положения, касающиеся связей, наложенных на механическую систему, и рассмотрим их классификацию.

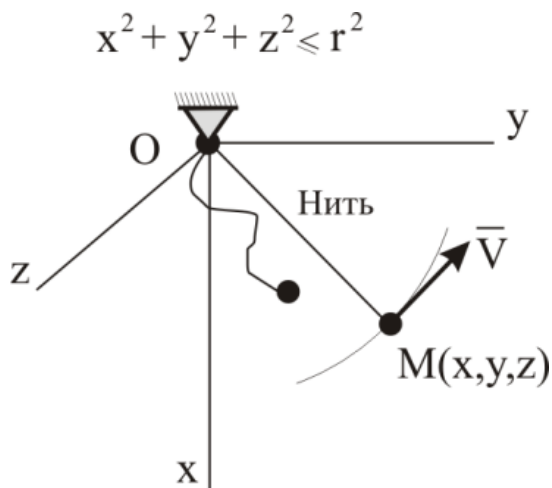


Рис. 1.3. Неудерживающая связь

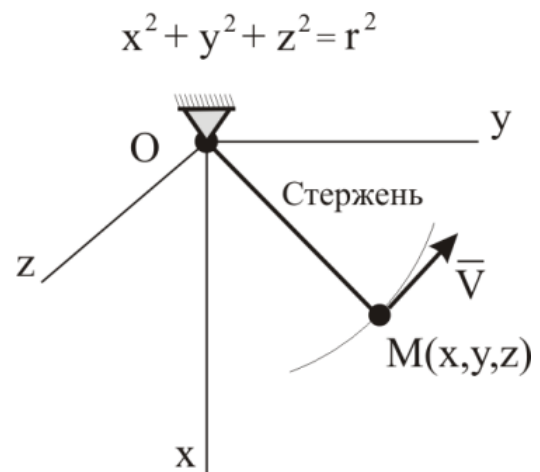


Рис. 1.4. Удерживающая связь

Механическая система называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения в пространстве, а их скорости могут принимать любые значения. В противном случае система называется несвободной. Очевидно, для несвободной системы должны быть заданы ограничения, налагаемые на координаты и скорости точек системы. Эти ограничения называют связями. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств, связывающих время, координаты и скорости точек системы.

Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, поверхностей, стержней, нитей и тому подобное.

Если механическая система может покинуть связь, то такая связь называется *неудерживающей*. Если же механическая система не может покинуть данную связь, то такая связь называется *удерживающей*. На Рис. 1.3 изображен шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити. Такой шарик при натянутой нити движется по сфере радиуса r , но может уйти и внутрь этой сферы. При этом нить не натянута, она как бы отсутствует. Это пример неудерживающей связи в отличие от случая, изображенного на Рис. 1.4, где такой же шарик находится на конце нерастяжимого стержня. Удерживающие связи записываются в виде уравнений, а неудерживающие связи – в виде неравенств, связывающих координаты точек системы.

Рассмотренные в этих двух примерах связи являются стационарными, в отличие от случая, изображенного на Рис. 1.5, где в качестве опоры используется телескопический стержень, длина которого может изменяться со временем. Итак, если вид связи не изменяется со временем, связь называется *стационарной*; в противном случае – *нестационарной*. Таким образом, в уравнения или неравенства стационарных связей время t не входит явным образом.

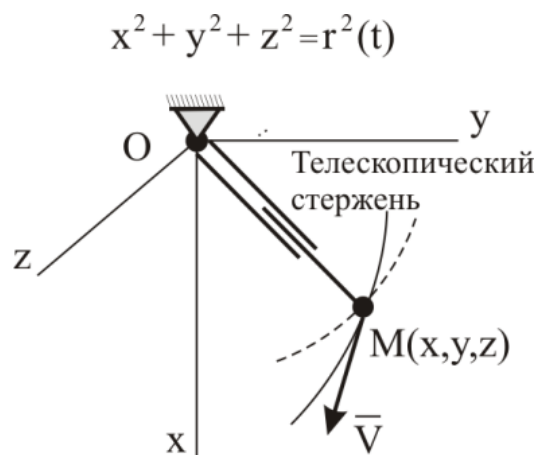


Рис. 1.5. Нестационарная связь

Связи могут налагать ограничения не только на координаты точек, но и на их скорости. Например, при качении без скольжения колеса по неподвижной поверхности (Рис. 1.6) ограничения, налагаемые связью (поверхность) могут быть выражены уравнениями:

$$y_c = r;$$

$$v_c = \omega r.$$

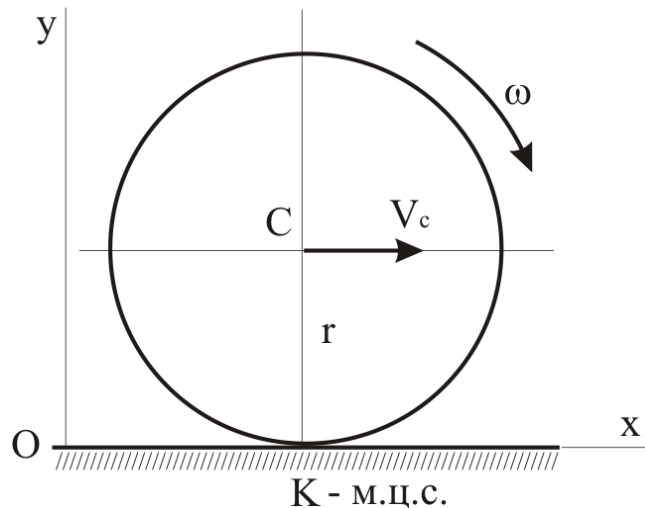


Рис. 1.6. Связь, накладывающая ограничения на скорости точек

Хотя второе из этих уравнений носит относительно координат дифференциальный характер, оно может быть проинтегрировано

$$\int_0^{x_c} dx_c = r \int_0^t \omega dt = r \int_0^{\varphi} d\varphi$$

и заменено алгебраическим соотношением

$$x_c = r \varphi.$$

Рассмотрим другой пример. Конек АВ скользит по ледяной поверхности, принятой за координатную плоскость xu (Рис. 1.7). Конек имеет выпуклое лезвие, которое касается льда только в одной точке C . Положение конька задается двумя координатами точки C и углом φ . Конек затачивается таким

образом, чтобы отсутствовало поперечное скольжение в направлении, перпендикулярном АВ. Иначе говоря, скорость точки касания С должна быть направлена вдоль конька, то есть

$$\frac{v_{cy}}{v_{cx}} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$dx_c \sin \varphi - dy_c \cos \varphi = 0.$$

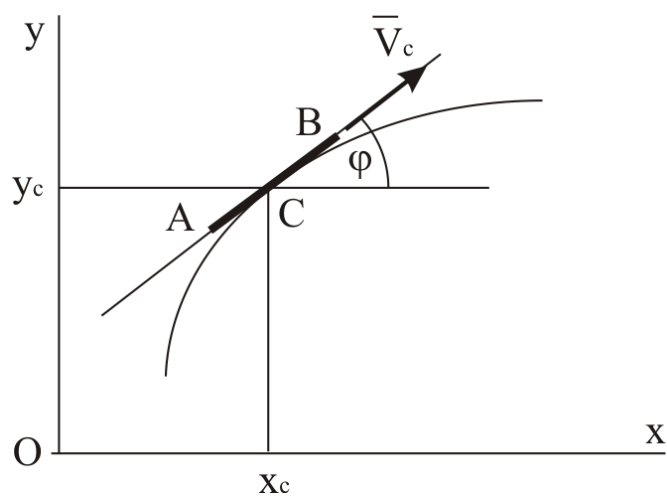


Рис. 1.7. Неинтегрируемая связь, наложенная на точку

Это уравнение связи (в отличие от предыдущего примера) нельзя проинтегрировать, не зная законов движения конька

$$x_c(t), \quad y_c(t); \quad \varphi(t).$$

Опр.3 Связи называются голономными, если их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени или дифференциалов координат.

Опр.4 Связи называются неголономными, если их уравнения содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат.

В дальнейшем будем рассматривать только голономные удерживающие стационарные

$$f(x, y, z) = 0$$

и нестационарные

$$f(x, y, z, t) = 0$$

связи. Изучение неголономных систем представляет значительные трудности и не входит в число вопросов, излагаемых в данном курсе. Если же на систему наложены неудерживающие связи, то решение задачи можно разбить на ряд временных интервалов, на одних из которых связь действует как удерживающая (на Рис. 1.4 нить натянута), а на других как бы отсутствует (нить не натянута).

Рассмотрим идеальные связи.

Опр.5 *Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (1.1)$$

Учитывая важность понятия идеальной связи, рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи при решении задач.

1. Пусть опорой для тела служит некоторая поверхность, по которой тело может скользить (Рис. 1.8). В общем случае реакция поверхности $\vec{R}$ имеет две составляющие – нормальную $\vec{N}$ и касательную $\vec{F}_\tau$, которая называется силой

трения. При любом возможном перемещении тела возможная работа реакции отлична от нуля за счет работы силы трения:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_\tau \cdot \delta \vec{r} = \pm |\vec{F}_\tau| |\delta \vec{r}| \neq 0. \quad (1.2)$$

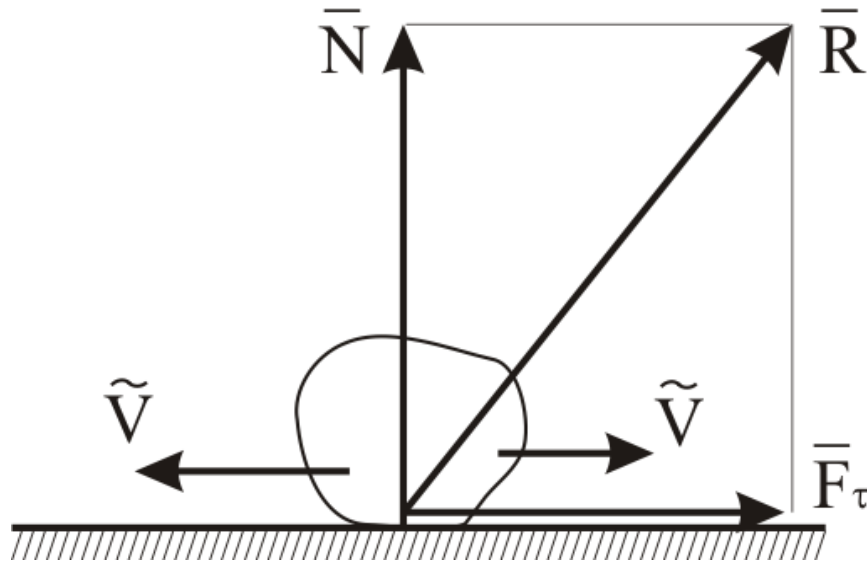


Рис. 1.8. Реакция шероховатой поверхности

Если же поверхность идеальная, то сила трения отсутствует и тогда при любом возможном перемещении тела возможная работа реакции равна нулю, так как работа силы трения отсутствует:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

Особый случай составляет качение без проскальзывания колеса по поверхности. Сила реакции снова имеет две составляющие $\vec{N}$ и $\vec{F}_\tau$. Помимо этих составляющих возможно возникновение момента трения качения M_τ (Рис. 1.9). При любом возможном перемещении колеса скорость точки приложения сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_\tau$ равна нулю и, следовательно, возможная работа этих сил равна нулю. Однако, момент трения качения может совершить работу при возможном повороте колеса. Если же колесо и опорная поверхность считаются абсолютно твердыми и $M_\tau = 0$, то такая связь будет идеальной.

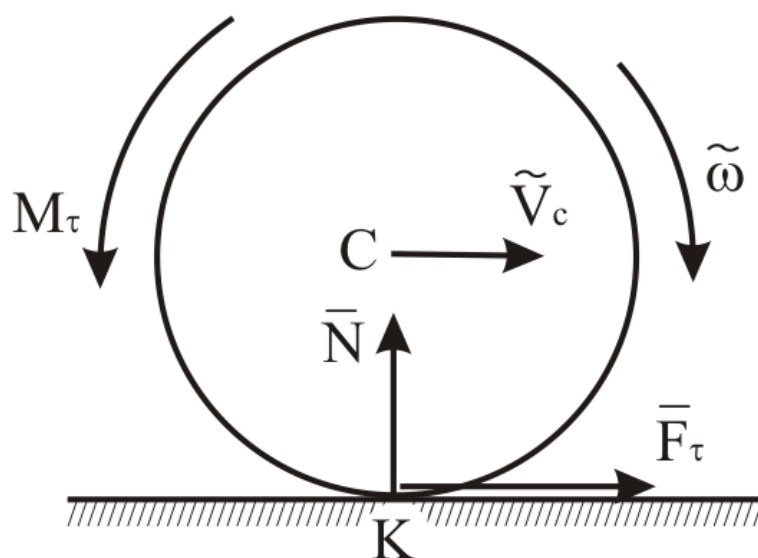


Рис. 1.9. Качение без проскальзывания колеса по поверхности

1). Рассмотрим две материальные точки A и B , связанные невесомым деформируемым стержнем (Рис. 1.10). В соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{R}_A = -\vec{R}_B$. По теореме сложения скоростей при сложном движении точки имеем:

$$\tilde{V}_B = \tilde{V}_B^e + \tilde{V}_B^r = \tilde{V}_A + \tilde{V}_{B1}^r + \tilde{V}_{B2}^r, \quad (1.3)$$

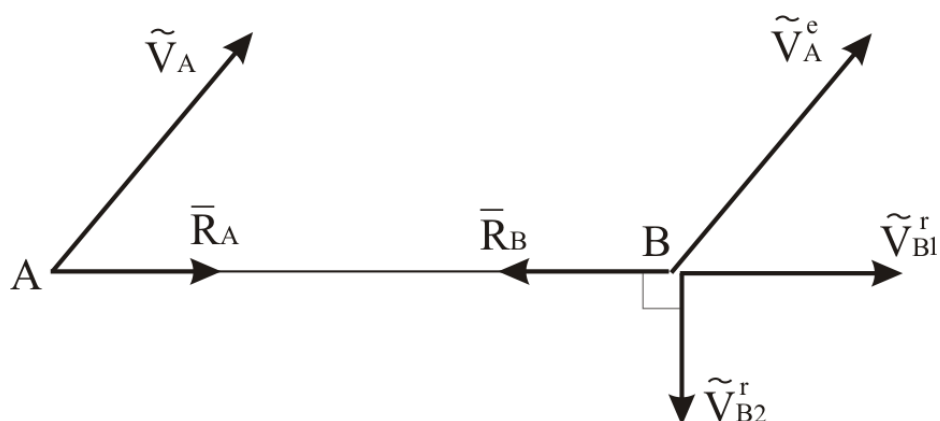


Рис. 1.10. Связь между двумя точками стержнем

Здесь $\tilde{V}_{B1}^r$ и $\tilde{V}_{B2}^r$ — составляющие возможной относительной скорости, направленные вдоль отрезка AB и перпендикулярно ему соответственно.

Для возможной суммарной мощности сил реакций в этом случае получаем:

$$N = \vec{R}_A \cdot \vec{V}_A + \vec{R}_B \cdot \vec{V}_B = \vec{R}_A \cdot \vec{V}_A - \vec{R}_A \cdot (\vec{V}_A + \vec{V}_{B1}^r + \vec{V}_{B2}^r) - \vec{R}_A \cdot \vec{V}_{B1}^r = \pm |\vec{R}_A| |\vec{V}_{B1}^r|.$$

2). Если стержень AB недеформируемый ($\vec{V}_{B1}^r = 0$), то суммарная возможная работа реакций равна нулю и связь будет идеальной. Такая связь реализуется в абсолютно твердом теле. Если же возможна деформация стержня, рассмотренная связь не будет идеальной, поскольку возможная работа реакций при растяжении–сжатии стержня будет отлична от нуля.

3). Неподвижный шарнир может рассматриваться как идеальная связь, если трением в шарнире можно пренебречь (Рис. 1.11). В этом случае, поскольку точка приложения реакции шарнира неподвижна, возможная работа реакции шарнира равна нулю. Если же трение в шарнире необходимо учитывать, то связь не будет идеальной, так как при возможном повороте тела вокруг шарнира будет совершаться работа момент сил трения

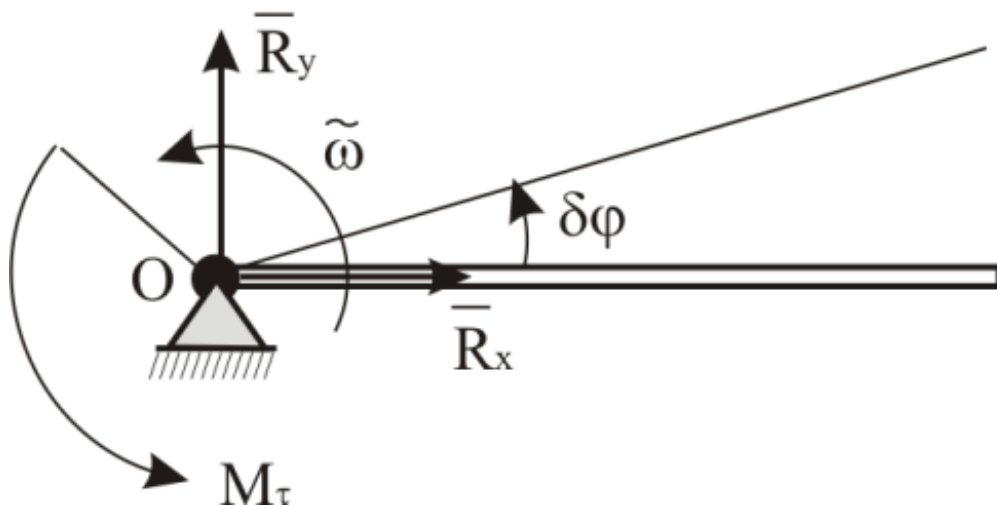


Рис. 1.11. Идеальная связь для неподвижного шарнира