Лекция 3.

ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ПАР СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПЛОСКОСТЯХ. ТЕОРЕМА О ПРИВЕДЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ОДНОМУ ЦЕНТРУ.

3.1. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ.

Существенную роль в изучении механического взаимодействия материальных тел играет простейшая силовая система, называемая парой сил.

Опр.1 ***Парой сил называется система двух сил, равных по модулю и действующих по параллельным прямым в противоположные стороны.***

Плоскость, в которой расположены силы пары, называется плоскостью действия пары сил. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары сил.

Очевидно, такую силовую систему нельзя заменить одной силой, поскольку геометрическая сумма сил, образующих пару, равна нулю. В тоже время опыт показывает, что под действием пары сил тело не может оставаться в покое. Возникает вопрос о характеристике такой силовой системы.

Сейчас мы остановимся только на некоторых свойствах пары сил. В дальнейшем, после изучения основных теорем статики, мы вернёмся к рассмотрению этой силовой системы.

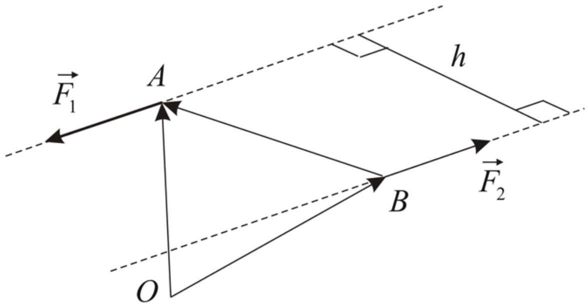

Рис. 3.1. Пара сил. Плечо пары сил

Вычислим сумму моментов сил, образующих пару, относительно произвольно выбранной точки O (Рис. 3.1):

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right)+M_O\left(\vec{F}_2\right)=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}_1+\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_2. \qquad (3.1)$$

Учитывая, что $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$ и $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, получаем:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right)+M_O\left(\vec{F}_2\right)=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}\right)\times\vec{F}_1-\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_1=$$

$$=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}_1=\vec{M}_B\left(\vec{F}_1\right)=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}_2=\vec{M}_A\left(\vec{F}_2\right)=...=\vec{M}.$$

Как видно, сумма моментов сил, образующих пару сил, не зависит от точки, относительно которой эта сумма вычисляется, и может быть принята за характеристику пары сил.

Опр.2 ***Моментом пары сил называется сумма моментов сил, образующих пару, вычисленная относительно произвольно выбранной точки.***

Момент пары сил можно вычислить как момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы той же пары, поскольку эта вторая сила не создаёт момент относительно своей точки приложения:

$$\vec{M}=\vec{M}_A\left(\vec{F}_2\right)=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}_2=\vec{M}_B\left(\vec{F}_1\right)=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}_1 \qquad (3.2)$$

Момент пары сил – вектор свободный; он располагается перпендикулярно плоскости действия пары сил, причём направлен в ту сторону, откуда возможный поворот тела под действием пары виден против хода часовой стрелки (Рис. 3.2).

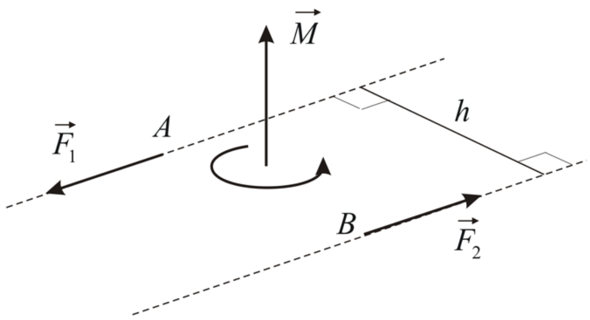

Рис. 3.2. Вектор момента пары сил

Модуль момента пары равен произведению модуля одной из сил пары на её плечо:

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F_1}\right| \cdot h = \left|\overline{F_2}\right| \cdot h. \qquad (3.3)$$

3.2. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ПАР СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПЛОСКОСТЯХ.

Рассмотрим теорему о сложении конечного числа пар сил, расположенных в пересекающихся плоскостях.

Теорема

Две пары сил, плоскости действия которых имеют хотя бы одну общую точку, эквивалентны одной паре сил, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство.

Если две плоскости имеют общую точку О, то они или пересекаются, или совпадают. Рассмотрим более общий случай пересекающихся плоскостей. Пусть Π_1 – плоскость действия пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$; Π_2 – плоскость действия пары сил $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$; A_k – точки приложения сил. Выберем на линии пересечения плоскостей любую точку С , если плоскости действия пар сил совпадают, то С любая точка плоскости.

Разложим каждую из четырёх заданных сил на составляющие $\vec{F}_{ko}$ и $\vec{F}_{kc}$, линии действия которых проходят через точки О и С соответственно. Перенося составляющие вдоль их линий действия в точки О и С соответственно, заменим приложенные в точках О и С силы $\vec{F}'_{ko}$ и $\vec{F}'_{kc}$ равнодействующими $\vec{Q}_o$ и $\vec{Q}_c$ (Рис. 3.3).

$$\{\vec{F}_k\} \sim \{\vec{F}_{ko}, \vec{F}_{kc}\} \sim \{\vec{F}'_{ko}, \vec{F}'_{kc}\} \sim \{\vec{Q}_o, \vec{Q}_c\}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Силы $\vec{Q}_o$ и $\vec{Q}_c$ образуют пару сил, поскольку

$$\vec{Q}_o = \sum_{k=1}^{4} \vec{F}'_{ko} = \sum_{k=1}^{4} \vec{F}_{ko} = \sum_{k=1}^{4} (\vec{F}_k - \vec{F}_{kc}) = -\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kc} = -\sum_{k=1}^{n} \vec{F}'_{kc} = -\vec{Q}_c, \qquad (3.4)$$

так как $\quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0.$

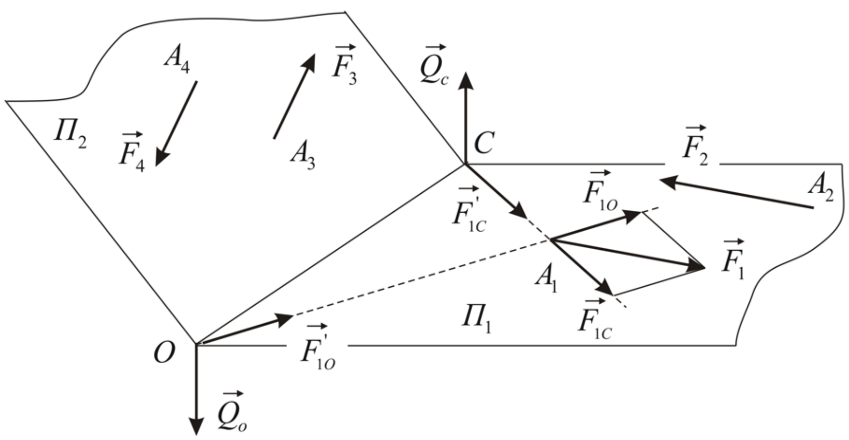

Рис. 3.3. Сложение пар сил, расположенных в пересекающихся плоскостях

Момент пары сил $(\vec{Q}_o, \vec{Q}_c)$ равен сумме моментов слагаемых пар:

$$\overrightarrow{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + \overrightarrow{M}(\vec{F}_3, \vec{F}_4) = \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{M}_c(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{ko} + \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{kc} =$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{ko} = \sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CO} \times \vec{F}'_{ko} = \overrightarrow{CO} \times \sum_{k=1}^{4} \vec{F}'_{ko} = \overrightarrow{CO} \times \vec{Q}_o = \overrightarrow{M}(\vec{Q}_o, \vec{Q}_c),$$

так как $\sum_{k=1}^{4} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{kc} = 0.$

Подводя итог, заметим, что на основании полученных результатов, можно

1. ***Любую систему сходящихся в некоторой точке*** O ***сил заменить равнодействующей*** $\vec{R}_o$***, приложенной в точке*** O ***и равной геометрической сумме всех сил системы.***

2. ***Систему пар сил, плоскости действия которых имеют хотя бы одну общую точку, можно заменить одной парой сил, момент которой равен сумме моментов всех пар системы.***

3.3. ТЕОРЕМА О ПРИВЕДЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ОДНОМУ ЦЕНТРУ.

Одной из основных задач статики является приведение системы сил к простейшему виду, т.е. преобразование заданной системы сил в другую, ей эквивалентную, но содержащую минимальное число сил. Одним из способов решения такой задачи является приведение системы сил к одному центру (метод Пуансо).

Теорема.

Произвольная система сил эквивалентна системе, состоящей из одной силы, равной геометрической сумме всех сил системы, приложенной в произвольно выбранной точке -центре приведения, и одной пары сил, момент которой равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.

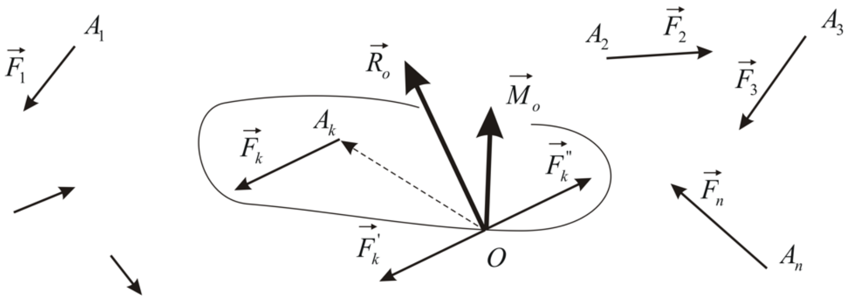

Рис. 3.4. Главный вектор и главный момент системы сил

Доказательство.

Пусть задана система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$, произвольным образом расположенных в пространстве (Рис. 3.4). Выберем любую точку O в качестве центра приведения. Рассмотрим любую силу системы $\overrightarrow{F_k}$. На основании Аксиомы 2 приложим к точке O уравновешенную систему сил $\left\{\overrightarrow{F_k}^{'}, \overrightarrow{F_k}^{''}\right\} \sim 0$, причём, $\overrightarrow{F_k}^{'} = -\overrightarrow{F_k}^{''} = \overrightarrow{F_k}$.

Таким образом, сила $\overrightarrow{F_k}$ оказывается эквивалентной системе трёх сил, состоящей из такой же по модулю и направлению силы $\overrightarrow{F_k}^{'}$, приложенной в точке O, и пары сил $\left(\overrightarrow{F_k}, \overrightarrow{F_k}^{''}\right)$, момент которой равен моменту силы $\overrightarrow{F_k}$ относительно точки O.

Проделывая такую операцию с каждой силой системы, заменяем заданную систему сил эквивалентной, которая состоит из приложенных в точке O сил $\{\vec{F}_k'\}$ и пар сил $(\vec{F}_k, \vec{F}_k'')$, плоскости действия которых имеют общую точку.

3.3.1. *УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ.*

Случаю равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве, соответствуют *два условия равновесия*:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 = 0 \text{ и } R^* = 0 \tag{3.5}$$

Модули главного момента M_0 и главного вектора R^* рассматриваемой системы сил определяются по формулам:

$$M_{0=}\sqrt{M_x + M_y + M_y}$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Они обращаются в нуль только при следующих условиях:

$$\mathrm{M}_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

которым соответствуют шесть уравнений равновесия сил, расположенных произвольно в пространстве:

$$M_{1x} + M_{2x} + \cdots + M_{nx} = 0 \text{ или } \sum M_{ix} = 0$$

$$M_{1y} + M_{2y} + \cdots + M_{ny} = 0 \text{ или } \sum M_{ix} = 0$$

$$M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz} = 0 \text{ или } \sum M_{ix} = 0$$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \text{ или } \sum R_{ix} = 0$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0 \text{ или } \sum R_{ix} = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = 0 \text{ или } \sum R_{ix} = 0$$

Первые три уравнения называются уравнениями моментов сил относительно осей координат, а последние — уравнениями проекций сил на оси.

При помощи формул можно представить уравнения моментов в виде:

$$\sum(y_i Z_i - Y_i z_i) = 0$$

$$\sum(z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$\sum(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

где x_i, y_i, z_i— координаты точки приложения силы P_i, а X_i, Y_i, Z_i— проекции этой силы на оси координат. Оси координат могут иметь любое направление. Их направления выбирают обычно так, чтобы каждая конкретная задача имела наиболее рациональное решение.

Таким образом, задача на равновесие сил, произвольно расположенных в пространстве и приложенных к одному телу, статически определенна, если число неизвестных в ней не больше шести. Для системы сил, приложенных к совокупности двух тел, задача статически определенна при числе неизвестных не больше двенадцати и т. д.

3.3.2. *ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ.*

В том случае, если главный вектор системы сил R^*не равен нулю, а главный момент $\overrightarrow{M_0}$ или равен нулю, или направлен перпендикулярно к главному вектору, заданная система сил приводится к равнодействующей силе.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

В первом случае, когда $R^* \neq 0$, а $M_0 = 0$, силы приводятся к равнодействующей силе, линия действия которой проходит через центр приведения O.

Действительно, в этом случае сила R^* заменяет собой заданную систему сил, т. е. является ее равнодействующей.

Рассмотрим второй случай, когда $R^* \neq 0,\ M_0 \neq 0,\ M_0 \perp \mathrm{R}$ (рис. 3.5). Пусть после приведения системы сил к центру O получена сила R^* приложенная в этом центре и равная главному вектору сил, и пара сил, момент которой $\vec{M}$ равен главному моменту всех сил относительно центра приведения. причем $M_0 \perp R^*$.

Выберем силы этой пары R' и R равными по модулю главному вектору R^*. т. е. $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = \mathrm{R}^*$. Тогда плечо этой пары следует взять равным $OK = \frac{M}{R^*}$

Проведем через точку O плоскость I. перпендикулярную к моменту пары сил $\vec{M}$ Пара сил R', R должна находиться в этой плоскости. Расположим эту пару так. чтобы одна из сил пары R' была приложена в точке O и направлена противоположно силе R^*. Восставим в плоскости I в точке O перпендикуляр к линии действия силы R^* и в точке K на расстоянии $OK = \frac{M}{R^*}$ от точки O приложим вторую силу пары R.

Отрезок OK откладываем в такую сторону от точки O чтобы, смотря навстречу вектору момента $\vec{M}$ видеть пару стремящейся вращать свою плоскость против движения часовой стрелки. Тогда силы R^* и R', приложенные в точке O уравновесятся, а сила R пары, приложенная в точке K заменит собой заданную систему сил, т. е. будет ее равнодействующей.

Прямая, совпадающая с линией действия этой силы, является линией действия равнодействующей силы.

Рис. 3.5 показывает различие между равнодействующей силой R и силой R^*. полученной при приведении сил к центру O.

Равнодействующая R системы сил, приложенная в точке K, имеющая определенную линию действия, эквивалентна заданной системе сил, т. е. заменяет собой эту систему.

Сила же R^* в точке O заменяет заданную систему сил только в совокупности с парой сил с моментом $\vec{\mathrm{M}} = \vec{M}_0$.

Силу R^* можно приложить в любой точке тела, к которой приведены силы. От положения этой точки зависит только модуль и направление главного момента $\vec{M}_0$.

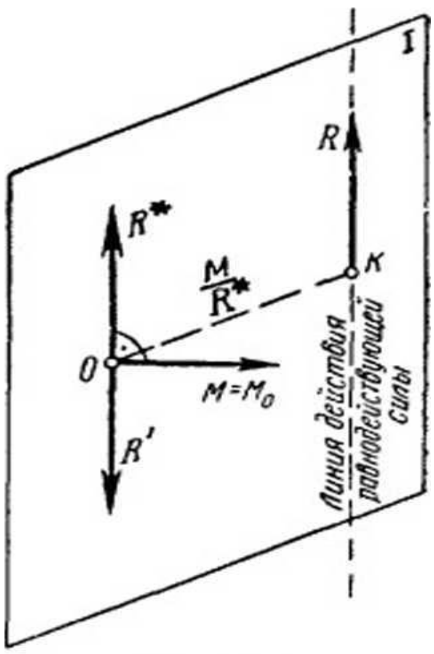

Рис. 3.5. Различие между равнодействующей силой R и силой R^*. полученной при приведении сил к центру O.

3.3.3. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПАРЕ СИЛ.

В том случае, когда главный вектор R^* системы сил оказывается равным нулю, а главный момент M_0 не равен нулю, силы приводятся к паре сил.

Момент этой пары сил равен главному моменту заданных сил относительно центра приведения:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 = \vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} + \cdots + \vec{M}_{n0}$$

Следует учесть, что если силы приводятся к паре сил, то главный момент заданной системы сил относительно любой точки пространства будет неизменным как по модулю, так и по направлению.

Постоянство значения главного момента некоторой системы сил относительно произвольно выбранных точек пространства является признаком того, что эта система сил приводится к паре сил.

3.3.4. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДВУМ СКРЕЩИВАЮЩИМ СИЛАМ ИЛИ К СИЛОВОМУ ВИНТУ (ДИНАМЕ).

В том случае, если главный вектор системы сил R^* и ее главный момент M_0 относительно центра приведения O не равны нулю и не перпендикулярны между собой, т. е. $R^* \neq 0, M_0 \neq 0$ и R^* не перпендикулярно M_0, заданную систему сил можно привести или к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме).

Рассмотрим сначала приведение системы сил к двум скрещивающимся силам (Рис. 3.6). Пусть после приведения системы сил к некоторому центру O получена сила R^*равная главному вектору.

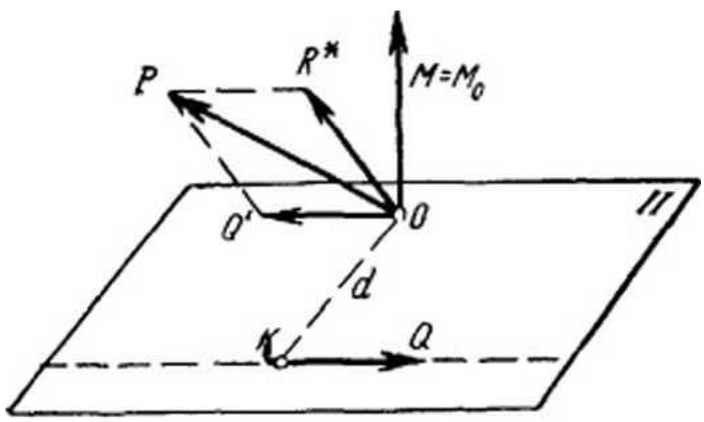

Рис 3.6. Приведение системы сил к двум скрещивающимся силам

Сила приложенная в этом центре, и пара сил, момент которой $M = M_0$ не перпендикулярен R^*. Проведем плоскость //. перпендикулярную к моменту пары сил M, и выбрав плечо пары d, а силы пары

$$Q = Q' = \frac{M}{d},$$

расположим в этой плоскости пару сил Q, Q', эквивалентную системе присоединенных пар. Приложим одну из сил пары Q' в точке O, а другую силу Q — на конце отрезка ОК проведенного из точки O перпендикулярно к силе Q'. Сложив приложенные в точке O силы R^* и Q', получим новую силу P, которая вместе с силой Q приложенной в точке К представляет собой совокупность двух скрещивающихся сил. Покажем, что в этом случае рассматриваемую систему сил можно также привести к силовому винту — динаме. Представляющей собой совокупность силы и пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к линии действия этой силы. Допустим, что в результате приведения заданной системы сил к центру O, получена в этом центре сила R^* и пара сил, момент которой M равный главному моменту системы сил M_0, который перпендикулярен R^* (рис. 3.7).

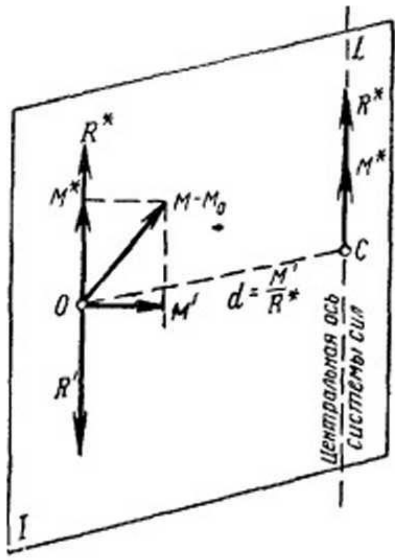

Рис.3.7. Приведение произвольной пространственной системы сил к главному вектору и главному моменту, которые перпендикулярны

Известно, что пару сил можно заменить двумя парами. Для этого разложим момент пары сил M на два составляющих момента: $\overrightarrow{M^*}$ направленный по

R^* и $\overrightarrow{M'}$, направленный перпендикулярно к R^*

$$\vec{M} = \vec{M}^* + \vec{M}'$$

Изобразим на плоскости I пару сил, имеющую момент M'. Силы этой пары возьмем равными по модулю R^* и одну из сил пары R' приложим в точке O и направим противоположно главному вектору. Плечо этой пары сил

$$d = \frac{\overrightarrow{M'}}{R^*}$$

Отложим плечо $d = \mathrm{OC}$ в плоскости I от точки O по направлению, перпендикулярному векторам R^* и $\vec{M}'$ в такую сторону, чтобы, смотря навстречу вектору момента пары M' видеть пару сил стремящейся вращать плоскость I против движения часовой стрелки.

Две силы R^* и R', приложенные в точке O, взаимно уравновешиваются. Остается сила R^*, приложенная в точке C и пара сил с моментом $\vec{M}^*$ параллельным R^*, который как свободный вектор переносим из точки O в точку C.

Прямая CL, вдоль которой направлены R^* и M^* называется центральной осью системы сил.

Совокупность силы R^* и пары сил P, P' с моментом M^* расположенной в плоскости, перпендикулярной линии действия этой силы, называют силовым винтом, или динамой.

Полученную совокупность силы R^* в точке C и пары сил с моментом M^* можно рассматривать как результат приведения заданной системы сил к центру C, лежащему на центральной оси. Следовательно, момент пары сил M^* равен главному моменту M_c заданной системы сил относительно точки C, лежащей на центральной оси. Совокупность силы R^* и момента пары M^* можно перенести в любую точку центральной оси, так как эта ось является линией действия силы R^*, а момент пары M^* является свободным вектором.

Отсюда следует, что главные моменты системы сил относительно всех точек центральной оси равны $\overrightarrow{M^*}$.

Рассмотрим изменение главного момента $\overrightarrow{M_0}$ системы сил относительно произвольной точки O при изменении положения этой точки по отношению к центральной оси.

Согласно формуле, имеем:

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_0} = \vec{M}^* + \overrightarrow{M'}$$

где, согласно формуле (3.3) имеем $M' = R * d$.

Модуль главного момента M_0 определяется следующим образом:

$$M_{0=}\sqrt{M^{*2} + M'^2} = \sqrt{M^{*2} + (R * d)^2}$$

где d — расстояние от точки O до центральной оси.

Направление M_0 определится углом, образованным вектором $\mathrm{M_у}$ и главным R^*:

$$\cos(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) = \frac{\mathrm{M}^*}{\mathrm{M}_0} = \frac{\mathrm{M}^*}{\sqrt{M^{*2} + (R * d)^2}}$$

Системы сил является только расстояние d.

Очевидно, что $\cos(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) > 0$ при $\mathrm{M}^* > 0$. тогда $(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) < 90°$ и направление M^* совпадает с направлением R^* (Рис.3.8). При $\cos(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) < 0$ имеем $\mathrm{M}^* < 0$ тогда $(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) > 90°$, т. е. направления M^* и R^* противоположны. В формулах переменной величиной для заданной системы только расстояние d.

Эти формулы показывают, что при увеличении расстояния d от точки O до центральной оси модуль главного момента M_0 увеличивается, а (M_0, R^*) приближается к прямому углу (Рис. 3.8).

Для любой точки С, лежащей на центральной оси, $d = 0$, а потому

$$\cos(M_0, R^*) = \pm 1 \text{ и } \overrightarrow{M_c} = \left|\overrightarrow{M^*}\right| = \overrightarrow{M}_{min}$$

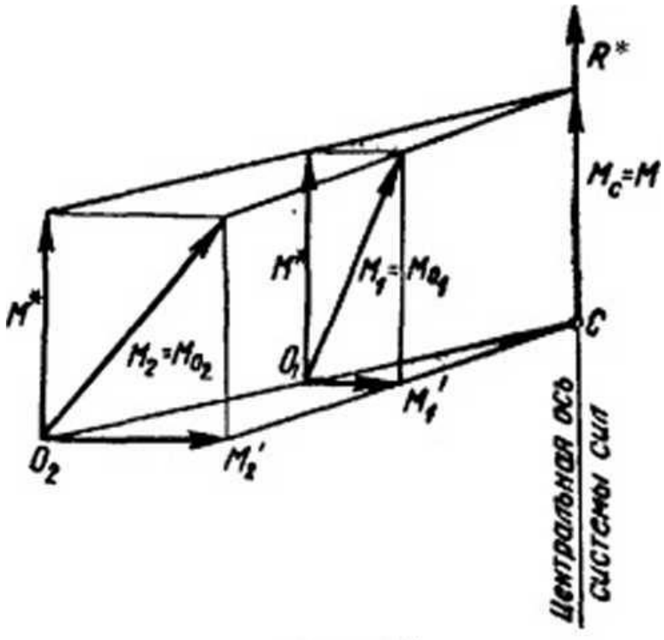

Рис 3.8. Направление главного вектора совпадает с направлением главного момента

Полученные результаты показывают, что момент рассматриваемой системы центральной оси направлен вдоль этой оси в ту или иную сторону и имеет наименьший для этой системы сил модуль, равный M^*. *Таким образом,* центральная ось системы сил представляет собой геометрическое место точек пространства, относительно которых главные моменты заданной системы сил имеют наименьший модуль $|M^*| = M_{min}$ и направлены вдоль этой оси.

Рассмотрим точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центральной оси, т. е. лежащие на поверхности кругового цилиндра, осью которого является центральная ось системы сил.

Согласно формулам сил главные моменты системы относительно этих точек равны по модулю и составляют с образующей цилиндра одинаковый угол α.

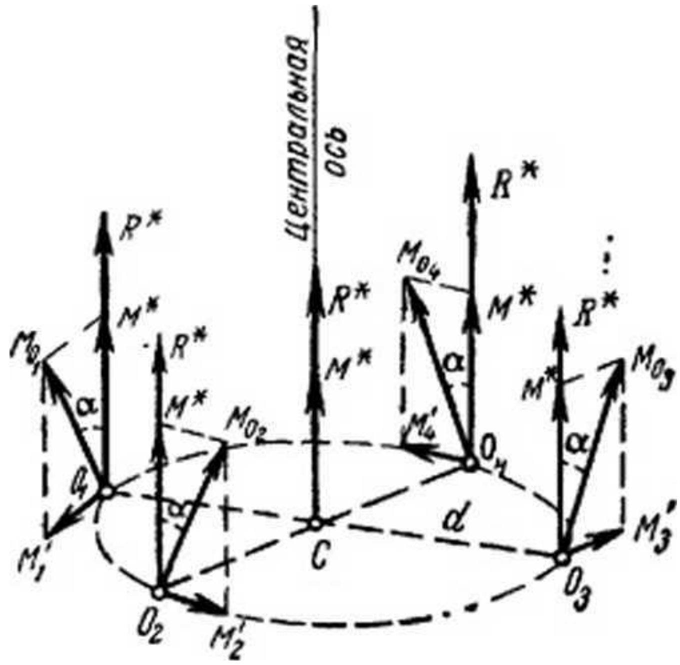

Рис. 3.9. Приведение произвольной пространственной системы сил к динаме

Установим формулу для вычисления алгебраического значения наименьшего главного момента заданной системы сил.

Наименьший главный момент системы сил M^* равен проекции главного момента рассматриваемой системы сил M_0 на направление главного вектора R^* (Рис. 3.9):

$$\overrightarrow{M^*} = \vec{M}_0 \cos(M_0, R^*) \tag{3.6}$$

Умножив обе части равенства (3.6) на R^*получим

$$R^*M^* = R * M_0 \cos(M_0, R^*) \tag{3.7}$$

Правая часть равенства (3.7) представляет собой величину скалярного произведения R^* и M_0, т. е.

$$R * M_0 \cos(M_0, R^*) = R^*\overrightarrow{M_0} \tag{3.8}$$

Выражая скалярное произведение (3.8) через проекции векторов сомножителей на координатные оси, то из формулы для скалярного произведения получим

$$R^*M^* = R^*M_0 = X\,\mathrm{M}_x + Y\mathrm{M}_y + Z\mathrm{M}_z,$$

откуда

$$\overrightarrow{\mathrm{M}^*} = \frac{\mathrm{X\,M_x + YM_y + ZM_z}}{\mathrm{R}^*}$$

Формула выражает алгебраическое значение наименьшего главного момента M^* через проекции R^* и M_0 на координатные оси.

Установим при помощи формулы аналитическое условие, при котором пространственная система сил приводится к равнодействующей.

Заданную систему сил можно привести к равнодействующей в двух случаях: а) если $\mathrm{R}^* \neq 0$ а $\mathrm{M}_0 = 0$ и б) если $\mathrm{R}^* \neq 0$, $\mathrm{M}_0 \neq 0$ и $\mathrm{M}_0 \perp \mathrm{R}$.

В обоих случаях $\mathrm{M}^* = \mathrm{M}_0 \cos(\mathrm{M}_0, \mathrm{R}^*) = 0$. Поэтому, если система сил приводится к равнодействующей, то выполняются условия:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0 \\ 2)\ X\,\mathrm{M}_x + Y\mathrm{M}_y + Z\mathrm{M}_z = 0 \end{array}\right\}$$

Соотношения являются аналитическими условиями приведения системы сил к равнодействующей силе.

Рассмотрим примеры на приведение системы сил к простейшему виду

Пример 3.1.

К вершинам прямоугольного параллелепипеда (Рис 3.10), ребра которого имеют длину a=20 см, b=40 см и c=30 см, приложены указанные на рисунке 3.10 силы P_1=5 Н, P_2=8 Н, P_3=2 Н, P_4=10 Н, P_5= 3 Н, P_6=6 Н. Требуется привести эту систему сил к простейшему виду.

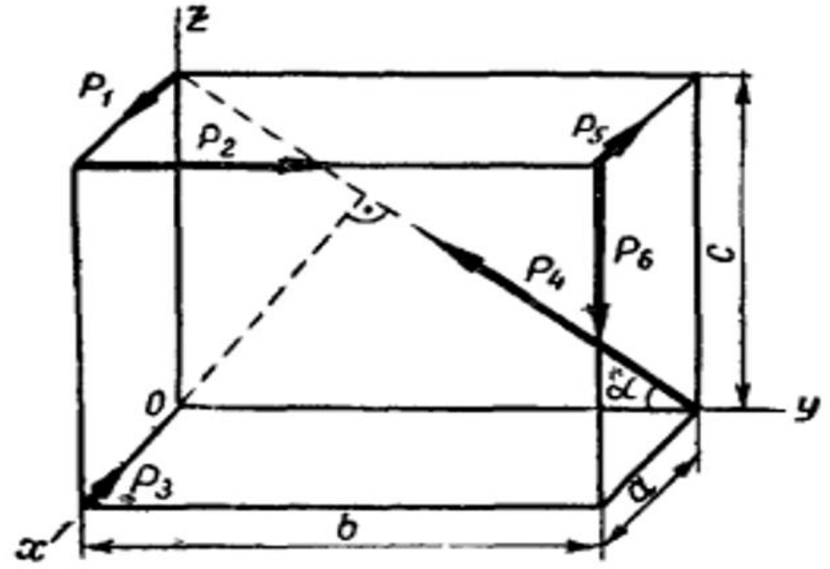

Рис. 3.10. Система пространственных сил, расположенных на прямоугольном параллепипеде

Решение.

Предварительно находим:

$$\sin\alpha = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

$$cos\,\alpha = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{40}{50} = 0{,}8$$

Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_1 - P_3 - P_5 = 5 - 2 - 3 = 0$$

$$Y = P_2 - P_4\,cos\,\alpha = 8 - 10 \cdot 0{,}8 = 0$$

$$Z = P_4 \sin\alpha - P_6 = 10 \cdot 0{,}6 - 6 = 0$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0$$

Определяем модуль и направление главного момента системы сил относительно начала координат по его проекциям на координатные оси, равным главным моментам сил относительно этих осей:

$$M_x = -P_2 c + P_4 b \sin\alpha - P_6\alpha = -8 \cdot 30 + 10 \cdot 40 \cdot 0{,}6 - 6 \cdot 40$$
$$= -240\ (\text{Н} \cdot см)$$

$$M_y = P_1 c - P_5 c + P_6 \alpha = 5 \cdot 30 - 3 \cdot 30 + 6 \cdot 20 = 180 \text{ (Н} \cdot c\text{м)}$$

$$M_z = P_2 a - P_5 b = 8 \cdot 20 - 3 \cdot 40 = 280 \text{ (Н} \cdot c\text{м)}$$

$$M_0 = \sqrt{{M_x}^2 + {M_y}^2 + {M_z}^2} = 410 \text{ (Н} \cdot c\text{м)}$$

$$cos(M_0, i) = \frac{M_x}{M_0} = -\frac{240}{410} = -0{,}585$$

$$cos(M_0, j) = \frac{M_y}{M_0} = \frac{180}{410} = 0{,}439$$

$$cos(M_0, k) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{280}{410} = 0{,}683$$

Полученные результаты показывают, что заданная система сил приводится к паре сил. Модуль момента пары $M = M_0 = 410 \text{ н} \cdot c\text{м}$. Направление момента составляет с координатными осями углы, определяемые найденными косинусами.

Пример 3.2

В вершинах пирамиды (Рис 3.11), ребра которой OA=63 см, OB=45 см, OD=60 см взаимно перпендикулярны, приложены силы P_1=21 Н, P_2=29 Н, P_3=25 Н, P_4=15 Н. Требуется привести эту систему к простейшему виду.

Решение.

Предварительно находим:

$$cos\,\alpha = \frac{OA}{DA} = \frac{63}{87} = \frac{21}{29}$$

$$cos\,\beta = \frac{OB}{DB} = \frac{45}{75} = 0{,}6$$

$$sin\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{20}{29}$$

$$sin\,\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = 0{,}8$$

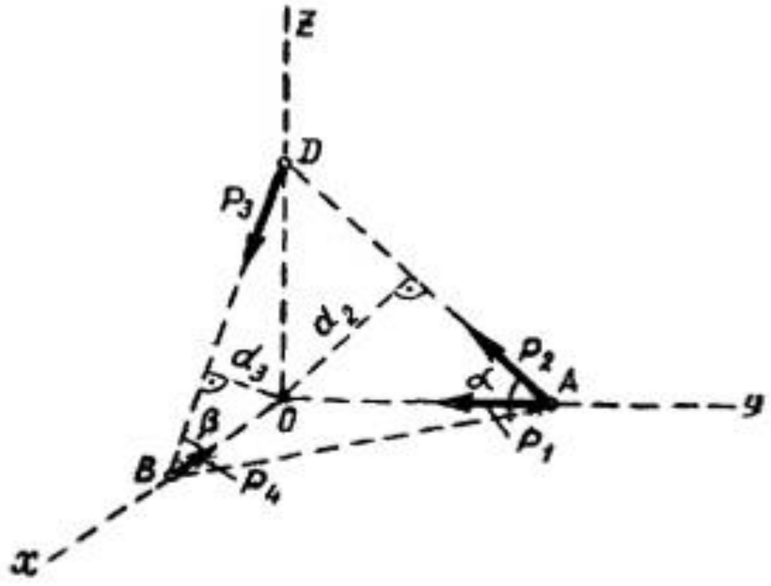

Рис 3.11. Пространственная система сил

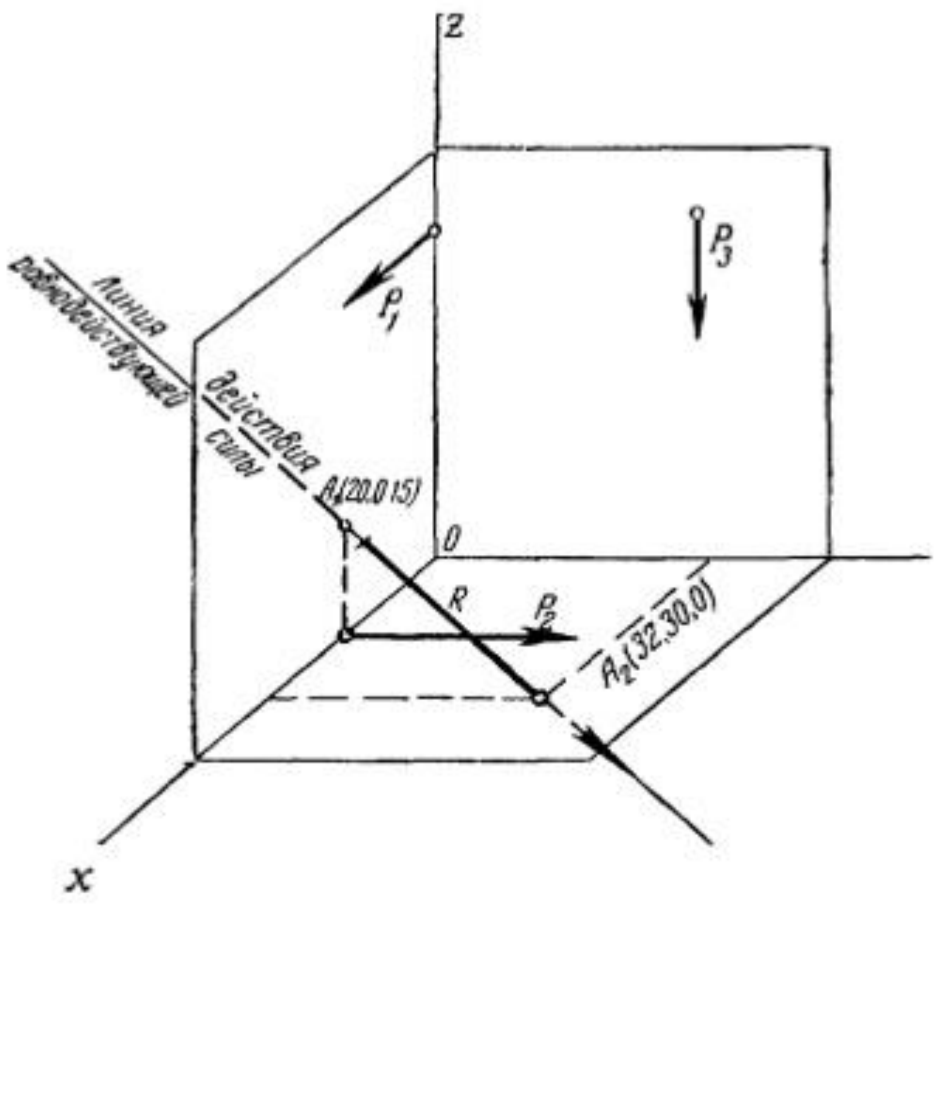

Рис. 3.12. Линия действия равнодействующей силы

Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_3 \cos\beta - P_4 = 25 \cdot 0{,}6 - 15 = 0$$

$$Y = -P_1 - P_2 \cos\alpha = -21 - 29 \cdot \frac{21}{29} = -42 \text{ н}$$

$$Z = P_2 \sin\alpha - P_3 \sin\beta = 29 \cdot \frac{20}{29} - 25 \cdot 0{,}8 = 0$$

откуда $R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 42$ н

$$\cos(R^*, i) = 0 \qquad \cos(R^*, j) = -1 \qquad \cos(R^*, k) = 0$$

Прикладываем к точке O главный вектор R^*, направляя его противоположно оси y. Определяем главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей:

$$M_x = P_2 d_2 = P_2 \cdot OA\, sin\alpha = 29 \cdot 63 \cdot \frac{20}{29} = 1260 \text{ Н} \cdot c\text{м}$$

$$M_y = P_3 d_3 = P_3 \cdot OB\, sin\beta = 25 \cdot 45 \cdot 0{,}8 = 900 \text{ Н} \cdot c\text{м}$$

$$M_z = 0$$

Так как $M_z = 0$, то главный момент M_0 заданных сил относительно начала координат лежит в плоскости *xOy* и не перпендикулярен главному вектору R^*, лежащему на оси *y*. Следовательно, заданные силы приводятся к динаме.

Откладывая на осях х и y проекции M_x и M_y главного момента M_0, получаем его компоненты M' и M^* по направлениям главного вектора и перпендикулярна к нему. Модули этих компонентов равны:

$$|M^*| = |M_y| = 900 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

$$|M'| = |M_x| = 1260 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Находим плечо пары R' и R^* с моментом M':

$$d = OC = \frac{M'}{R^*} = \frac{1260}{42} = 30 \text{ см}$$

Прикладываем силы пары R' и R^* в точках C и O плоскости *yOz*.

Исключая уравновешивающиеся силы R' и R^* в точке O и перенося M^*из точки O в точку C, получаем R^*и M^*, то есть динаму в точке C. *на* Рис.3.12 показана линия равнодействующей силы.

Пример 3.4

Привести к простейшему виду систему сил, изображенных на Рис 3.13, если P_1=2 Н, P_2=5 Н, P_3=14 Н, а размеры прямоугольного параллелепипеда a=2 см, b=4 см, c=3 см. Если силы приводятся к динаме, то найти уравнения центральной оси и координаты точек пересечения ее с плоскостями *zOx* и *xOy*.

Решение.

Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_2 = 5 \text{ Н} \quad Y = -P_3 = -14 \text{ Н} \quad Z = P_1 = 2 \text{ Н}$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 15 \text{ Н}$$

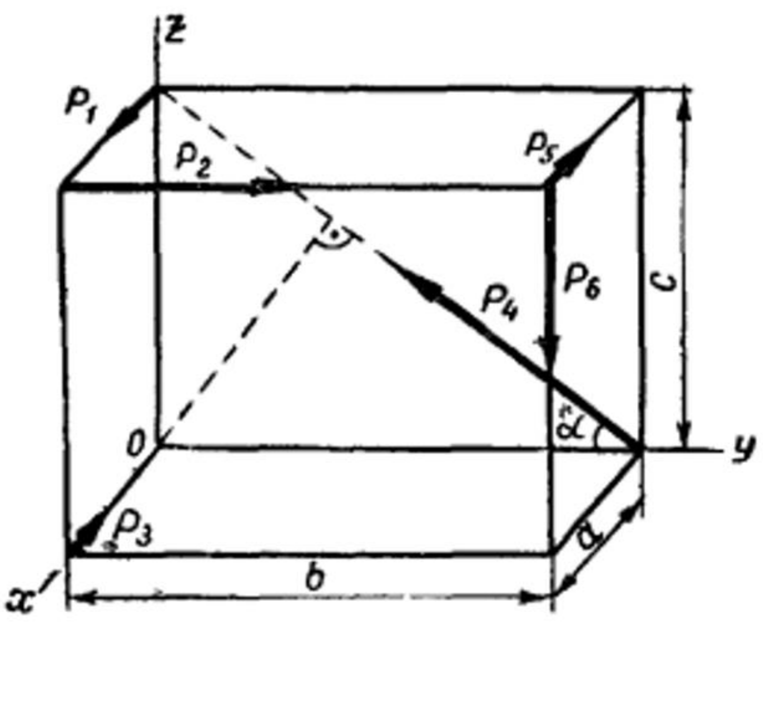

Рис 3.13. Силы, действующие на прямоугольный параллелепипед

$$cos(R^*, i) = \frac{X}{R^*} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$cos(R^*, j) = \frac{Y}{R^*} = -\frac{14}{15}$$

$$cos(R^*, k) = \frac{Z}{R^*} = \frac{2}{15}$$

Так как $R^* \neq 0$, то силы приводятся к равнодействующей или к динаме.

$$M_x = 0$$

$$M_y = P_2 c = 5 \cdot 3 = 15 \text{ н} \cdot c\text{м}$$

$$M_z = -P_2 b - P_3 a = -5 \cdot 4 - 14 \cdot 2 = -48\ H \cdot c\text{м}$$

Чтобы узнать, к чему приводятся силы, находим наименьший главный момент:

$$M^* = \frac{XM_X + YM_y + ZM_z}{R^*} = \frac{-14 \cdot 15 - 2 \cdot 48}{15} = -\frac{306}{15} = -20{,}4 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Так как $M^* \neq 0$, то силы приводятся к динаме.

Определяем положение центральной оси в пространстве двумя уравнениями:

$$\frac{M_X - (yZ - zY)}{X} = \frac{M^*}{R^*}$$

Откуда $2y + 14z = 6{,}8$

$$\frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M^*}{R^*}$$

Откуда $2x - 5z = 4{,}04$

Координаты точки A_1 пересечения центральной осью плоскости *zOx* находим при $y_1 = 0$ из этих уравнений:

$$y_1 = 0 \quad x_1 = 3{,}23 \text{ см} \quad z_1 = 0{,}486 \text{ см}$$

Координаты точки A_2 пересечения центральной осью плоскости *xOy* находим при $z_2 = 0$ из этих уравнений:

$$z_2 = 0 \quad x_2 = 2{,}02 \text{ см} \quad y_2 = 3{,}4 \text{ см}$$

Так как $M^* < 0$, то наименьший главный момент рассматриваемой системы сил M^* направлен по центральной оси противоположно главному вектору R^*, направление которого установлено найденными выше косинусами углов.