

Лекция 16.

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА.

16.1. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которую наложено s голономных идеальных удерживающих связей. Среди $3n$ координат точек системы независимых будет только $\nu = 3n - s$ координат. Остальные определяются через независимые при помощи уравнений связей.

Любой набор параметров, определяющих положение механической системы, называются ее обобщенными координатами:

$$q_1, q_2, \dots, q_\nu.$$

Для голономных систем число независимых обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы механической системы. Заметим, что обобщенные координаты могут иметь различный геометрический или механический смысл. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади, объема и тому подобное.

Радиус- векторы точек системы будут функциями обобщенных координат и времени:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_\nu, t); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Вычислим вариации радиусов-векторов через вариации обобщенных координат. Напомним, что эти вариации (другими словами, возможные перемещения точек системы) вычисляются при фиксированном времени:

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16.1)$$

Сумма работ всех приложенных к системе активных сил на ее возможном перемещении называется возможной работой. Возможная работа может быть вычислена как через возможные перемещения точек приложения сил, так и через вариации обобщенных координат

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \sum_{j=1}^v \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^v \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^v Q_j \delta q_j.\end{aligned}\quad (16.2)$$

множитель Q_j при вариации обобщенной координаты q_j в выражении для возможной работы активных сил системы называется обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате q_j .

Можно предложить несколько способов вычисления обобщенных сил.

1. Обобщенные силы можно вычислить по формуле:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right); \quad (16.3)$$

$j = 1, 2, \dots, v.$

Как видно, при использовании формулы (16.3) координаты точек приложения активных сил должны быть известны как функции обобщенных координат.

2. Для вычисления какой-либо обобщенной силы, например Q_j , дадим системе такое возможное перемещение, при котором все вариации обобщенных координат, кроме δq_j , равны нулю. Соответствующую возможную работу обозначим $\delta_j A$. Тогда:

$$\delta_j A = Q_j \delta q_j. \quad (16.4)$$

3. Если приложенные к системе активные силы потенциальны, то

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k},$$

где Π – потенциальная энергия системы. Тогда

$$Q_j = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (16.5)$$

Очевидно, при использовании формулы (16.5) потенциальная энергия системы должна быть известна как функция обобщенных координат.

Пример 16.1

Двойной математический маятник состоит из двух невесомых стержней длины a и b , на концах которых укреплены материальные точки M_1 и M_2 массы m_1 и m_2 соответственно. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси Oz , а второй — вокруг подвижной оси M_1z' (Рис. 16.1).

Вычислить обобщенные силы.

Решение.

Положение маятника полностью определяется двумя углами φ и ψ отклонения стержней от вертикали. Эти углы принимаем за обобщенные координаты. Таким образом, система имеет две степени свободы.

Обобщенные силы вычислим всеми тремя способами.

Первый способ. Найдем проекции сил $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ и $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ на координатные оси и координаты точек приложения этих сил:

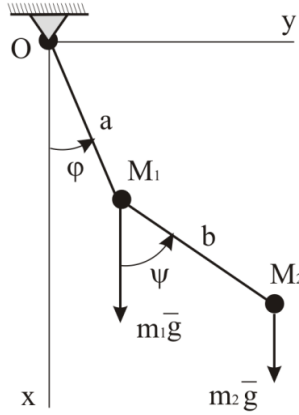


Рис. 16. 1. Двойной математический маятник из двух невесомых стержней

$$P_{1x} = m_1 g; \quad P_{1y} = 0; \quad P_{1z} = 0;$$

$$P_{2x} = m_2 g; \quad P_{2y} = 0; \quad P_{2z} = 0;$$

$$x_1 = a \cos \varphi; \quad x_2 = a \cos \varphi + b \cos \psi;$$

$$y_1 = a \sin \varphi; \quad y_2 = a \sin \varphi + b \sin \psi;$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0.$$

Обобщенные силы найдем по формулам (16.3), которые в рассматриваемом случае принимают вид ($q_1 = \varphi$; $q_2 = \psi$):

$$Q_1 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi},$$

$$Q_2 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \psi} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \psi} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \psi} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \psi}.$$

Подставляя сюда проекции сил и координаты точек их приложения, получаем:

$$Q_1 = -m_1 g a \sin \varphi - m_2 g a \sin \varphi = -(m_1 + m_2) g a \sin \varphi; \quad Q_2 = -m_2 g b \sin \psi.$$

Второй способ. Вычислим сначала Q_2 . Дадим системе возможное перемещение $\delta \varphi = 0$; $\delta \psi \neq 0$. На таком возможном перемещении совершит работу только сила P_2 , поскольку точка приложения силы P_1 остается

неподвижной. Работу силы P_2 вычислим как работу силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси $M_1 z'$.

$$\delta_2 A = -m_2 g \delta h_2 = -m_2 g b \sin \psi \delta \psi.$$

Коэффициент при вариации обобщенной координаты ψ равен обобщенной силе:

$$Q_2 = -m_2 g b \sin \psi.$$

Для вычисления Q_1 дадим системе другое возможное перемещение $\delta \varphi \neq 0$; $\delta \psi = 0$, при котором первый стержень поворачивается, а второй движется поступательно. Работу силы P_1 вычисляем аналогично предыдущему, а при вычислении работы силы P_2 заметим, что вертикальные перемещения точек приложения сил P_1 и P_2 одинаковы:

$$\delta_1 A = -(m_1 + m_2) g a \sin \varphi \delta \varphi.$$

Отсюда:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g a \sin \varphi.$$

Третий способ. Активные силы P_1 и P_2 потенциальны. Найдем потенциальную энергию Π , вычислив ее как работу сил P_1 и P_2 при перемещении системы из данного положения в горизонтальное, принимаемое за нулевой уровень потенциальной энергии:

$$\Pi = -m_1 g a \cos \varphi - m_2 g (a \cos \varphi + b \cos \psi),$$

или

$$\Pi = -(m_1 + m_2) g a \cos \varphi - m_2 g b \cos \psi.$$

Обобщенные силы находим теперь по формуле (16.5):

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -(m_1 + m_2) g a \sin \varphi; \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -m_2 g b \sin \psi.$$

16.2. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА.

Общее уравнение динамики (15.14) дает возможность составлять дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакций идеальных связей. Для сравнительно простых механических систем непосредственное применение этого уравнения вполне оправдано, однако, в более сложных случаях использование общего уравнения динамики приводит, как правило, к относительно сложным преобразованиям. Поэтому значительно удобнее пользоваться не общим уравнением динамики, а вытекающими из него уравнениями Лагранжа 2-го рода, в которых для голономных систем основные трудности преобразований преодолеваются уже в общем виде.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которую наложено s голономных идеальных удерживающих связей. Представляя возможные перемещения через вариации обобщенных координат (16.1), запишем общее уравнение динамики (15.14) в виде:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \cdot \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad \nu = 3n - s.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

или, учитывая определение обобщенной силы (16.3):

$$\sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

Так как обобщенные координаты независимы и, следовательно, их вариации (при наличии только голономных связей) произвольны, то из последнего уравнения следует, что все скобки равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, \nu. \quad (16.6)$$

Преобразуем общий член суммы в левой части равенства (16.6):

$$m_k \vec{W}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \vec{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right). \quad (16.7)$$

Радиус–вектор любой точки системы представляет собой функцию обобщенных координат и времени $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_v, t)$. Поэтому:

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \quad (16.8)$$

где $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ называется обобщенной скоростью.

Дифференцируя равенство (16.8) частным образом по обобщенной скорости $\dot{q}_j$, получаем:

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (16.9)$$

Продифференцируем равенство (16.8) частным образом по обобщенной координате:

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_v \partial q_j} \dot{q}_v + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_j}. \quad (16.10)$$

Вычислим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t}. \quad (16.11)$$

Сравнивая равенства (16.10) и (16.11), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (16.12)$$

Учитывая тождества (16.10) и (16.11), представим равенство (16.7) в виде:

$$m_k \vec{W}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right). \quad (16.13)$$

Подставляя (16.13) в (16.6), получаем:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

Учитывая определение кинетической энергии механической системы, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \quad (16.14)$$

где введены следующие обозначения:

T – кинетическая энергия системы;

q_j – обобщенная координата;

$\dot{q}_j$ – обобщенная скорость;

Q_j – обобщенная сила;

ν – число степеней свободы системы.

Уравнения (16.14) называются *уравнениями Лагранжа 2-го рода*.

Они представляют собой дифференциальные уравнения движения голономной механической системы в обобщенных координатах. Эти уравнения

не содержат реакций идеальных связей. Число уравнений Лагранжа 2–го рода равно числу степеней свободы механической системы.

Если силы, действующие на механическую систему, потенциальны, то в соответствии с формулой (16.5) уравнения (16.14) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \quad (16.15)$$

где Π – потенциальная энергия системы.

Если теперь ввести в рассмотрение функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и учесть, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, то уравнения (16.15) представляются в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, \nu. \quad (16.16)$$

Пример 16.2

Каток A , представляющий собой сплошной однородный цилиндр массы m_1 радиуса r , катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. К оси катка привязан трос, переброшенный через неподвижный блок B и растягиваемый грузом D , масса которого m_3 (Рис. 16.2). Блок B представляет собой сплошной однородный цилиндр массы m_2 . В начальный момент система находится в покое, пружина не растянута.

Определить движение системы, предполагая, что при качении катка возникает постоянный момент сопротивления M_c .

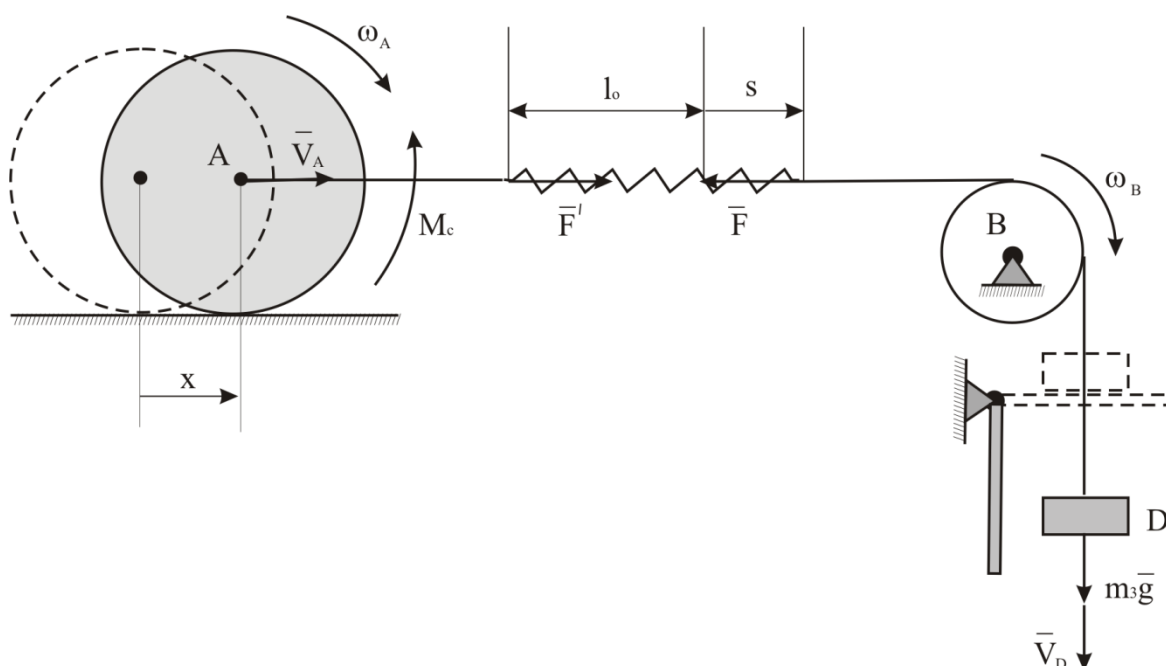


Рис. 16.2. Движение катка без проскальзывания по горизонтальной поверхности

Решение.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат примем координату x оси катка и удлинение пружины s . Вычислим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_A \omega_A^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2} + \frac{m_D v_D^2}{2} = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}^2 + \frac{m_2 + 2m_3}{4} (\dot{x} + \dot{s})^2.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s.$$

Кинетическая энергия в рассматриваемом случае не зависит явным образом от обобщенных координат, поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Вычислим частные производные по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3m_1 + m_2 + 2m_3}{2} \dot{x} + \frac{m_2 + 2m_3}{2} \dot{s}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{m_2 + 2m_3}{2} (\dot{x} + \dot{s}).$$

Для вычисления обобщенных сил используем формулы (16.3): пусть $\delta x \neq 0$; $\delta s = 0$, тогда

$$\delta_x A = m_3 g \delta x - M_c \delta \varphi_1 = \left(m_3 g - \frac{M_c}{r} \right) \delta x \quad \text{отсюда} \quad Q_x = m_3 g - \frac{M_c}{r};$$

пусть $\delta x = 0$; $\delta s \neq 0$, тогда

$$\delta_s A = m_3 g \delta s - F \delta s \quad \text{отсюда} \quad Q_s = m_3 g - F = m_3 g - cs.$$

где c — коэффициент жесткости пружины.

Положим для определенности $m_1 = 4m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$. В этом случае уравнения Лагранжа примут вид:

$$8m\ddot{x} + 2m\ddot{s} = mg - \frac{M_c}{r}; \quad 2m\ddot{x} + 2m\ddot{s} = mg - cs.$$

Интегрируя полученную систему уравнений при нулевых начальных условиях, находим два уравнения, которые описывают движение данной системы:

$$s = 4a \cdot (\cos kt - 1); \quad x = a \cdot (1 - \cos kt) + bt^2,$$

где введены следующие константы:

$$a = \frac{3mgr + M_c}{8rc}; \quad b = \frac{mgr - M_c}{16mr}; \quad k^2 = \frac{2c}{3m}$$

причём, $mgr > M_c$.

Ответ: $s = 4a \cdot (\cos kt - 1); \quad x = a \cdot (1 - \cos kt) + bt^2.$

Пример 16.3

Каток массы m_1 радиуса r может перекатываться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. К оси катка привязана нерастяжимая нить длиной a , на конце которой закреплен шарик массы m_2 (Рис. 16.3).

Составить дифференциальные уравнения малых колебаний системы. Каток считать сплошным однородным цилиндром. Сопротивлением качения пренебречь.

Решение.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат примем координату x оси катка и угол отклонения нити от вертикали φ . Вычислим кинетическую энергию всей механической системы с учетом того, что первое тело движется плоскопараллельно, а второе тело поступательно:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Каток считаем по условию задачи сплошным однородным цилиндром.

Каток катится без проскальзывания и, следовательно, $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$.

Учитывая, что

$$x_M = x + a \sin \varphi; \quad y_M = r - a \cos \varphi,$$

вычисляем проекции скорости точки M на оси координат:

$$v_{2x} = \dot{x}_M = \dot{x} + a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}; \quad v_{2y} = \dot{y}_M = a \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

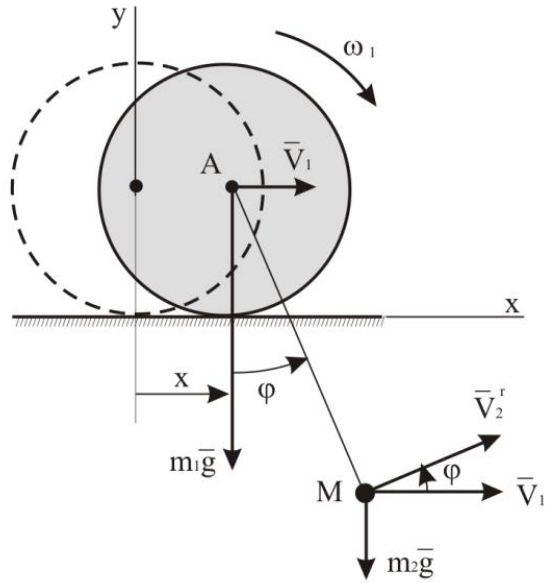


Рис. 16.3. Движение катка без проскальзывания по горизонтальной плоскости

Тогда обобщенные скорости имеют вид:

$$v_1^2 = \dot{x}^2; \quad v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = \dot{x}^2 + 2a \cos \varphi \cdot \dot{x}\dot{\varphi} + a^2 \dot{\varphi}^2.$$

Полагая для определенности $m_1 = 6m$; $m_2 = m$, получаем кинетическую энергию системы:

$$T = 5m\dot{x}^2 + ma\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m}{2} a^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим частные производные по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 10m\dot{x} + ma\dot{\varphi} \cos \varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ma\dot{x} \cos \varphi + ma^2 \dot{\varphi}.$$

Вычислим частные производные по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ma\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Для вычисления обобщенных сил используем формулы (16.3): пусть $\delta x \neq 0$; $\delta \varphi = 0$, тогда

$$\delta_x A = 0 \quad \text{отсюда} \quad Q_x = 0;$$

пусть $\delta x = 0$; $\delta \varphi \neq 0$, тогда

$$\delta_\varphi A = -mga \sin \varphi \delta \varphi.$$

Отсюда:

$$Q_\varphi = -mga \sin \varphi.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода в данном случае принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \quad 10\ddot{x} + a\ddot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0;$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \quad \ddot{x} \cos \varphi + a\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

По условию колебания системы малые, то есть $\sin \varphi \sim \varphi$ и $\cos \varphi \sim 1$. Пренебрегая малыми более высокого порядка ($a\varphi\dot{\varphi}^2 \sim 0$), получаем дифференциальные уравнения малых колебаний данной механической системы:

$$10\ddot{x} + a\ddot{\varphi} = 0; \quad \ddot{x} + a\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Ответ: $10\ddot{x} + a\ddot{\varphi} = 0; \quad \ddot{x} + a\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$

Пример 16.4

Призма (тело 1) массы m_1 может скользить по идеально гладкой горизонтальной поверхности. В вершине призмы закреплена ось барабана лебедки (тело 2). Конец троса прикреплен к оси катка (тело 3), который катится без проскальзывания по боковой поверхности призмы (Рис. 16.4). Барабан лебедки и каток — сплошные однородные цилиндры одинаковой массы $m_2 = m_3 = m$ и одинакового радиуса $r_2 = r_3 = r$. К барабану лебедки приложен постоянный вращающий момент M .

Сохраняя условия примера 15.5, получить дифференциальные уравнения движения системы на основе уравнений Лагранжа 2–го рода.

Решение.

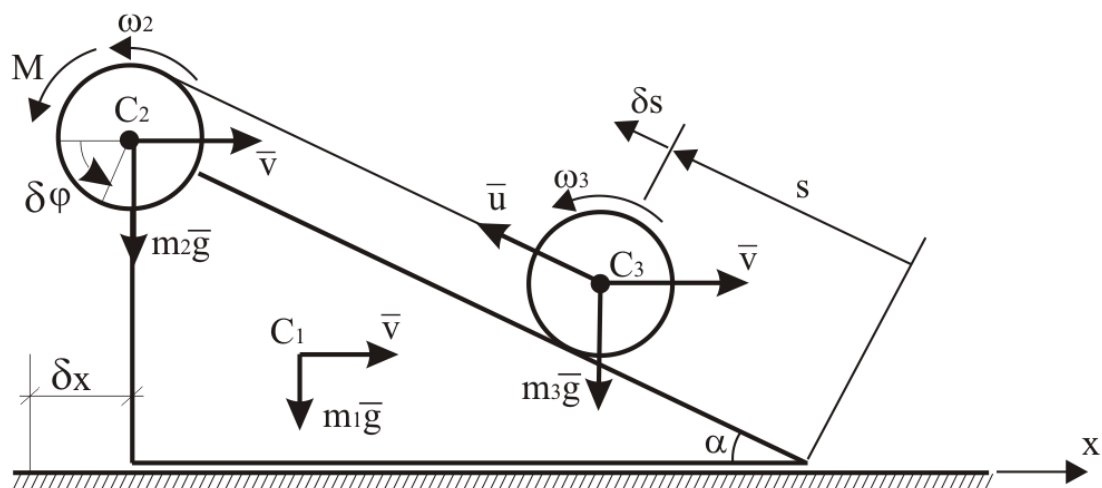


Рис. 16.4. Движение механической системы, включая призму, с учетом активных сил

Отметим, что при рассмотрении *Лекции 15* были уже получены дифференциальные уравнения движения системы, но только на основе общего уравнения динамики, когда в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Как уже говорилось, данная механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат примем координату x призмы и относительную координату оси катка s . Вычислим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_3}{2} \left[(v - u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha)^2 \right].$$

Учитывая, что

$$v = \dot{x}; \quad u = \dot{s}; \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{u}{r}; \quad J_2 = J_3 = \frac{mr^2}{2},$$

получаем:

$$T = \frac{m_1 + 2m}{2} \dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{s} \cos \alpha + m\dot{s}^2.$$

Для вычисления обобщенных сил используем формулы (16.3): пусть $\delta x \neq 0$; $\delta s = 0$, тогда

$$\delta_x A = 0, \quad \text{отсюда} \quad Q_x = 0.$$

пусть $\delta x = 0$; $\delta s \neq 0$, тогда $\delta \varphi = \frac{\delta s}{r}$ и

$$\delta_s A = M \delta \varphi - mgs \sin \alpha \delta s = \left(\frac{M}{r} - mgs \sin \alpha \right) \delta s, \quad \text{отсюда}$$

$$Q_s = \frac{M}{r} - mgs \sin \alpha.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода принимают вид:

$$m\ddot{s} \cos \alpha - (m_1 + 2m)\ddot{x} = 0; \quad 2m\ddot{s} - m\ddot{x} \cos \alpha = \frac{M}{r} - mgs \sin \alpha.$$

Таким образом, получили дифференциальные уравнения движения механической системы на основе уравнений Лагранжа 2-го рода.

$$\textbf{Ответ:} \quad m\ddot{s} \cos \alpha - (m_1 + 2m)\ddot{x} = 0; \quad 2m\ddot{s} - m\ddot{x} \cos \alpha = \frac{M}{r} - mgs \sin \alpha.$$