

Лекция 15.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.

ВОЗМОЖНЫЕ СКОРОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

15.1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.

15.1.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КИНЕТОСТАТИКИ.

Рассмотрим материальную точку массой m . Обозначим $\vec{F}$ равнодействующую всех сил, приложенных к точке. Ее уравнение движения можно представить в виде

$$\vec{F} - m\vec{W} = 0.$$

Величину

$$\vec{\Phi} = -m\vec{W}$$

называют силой инерции Даламбера материальной точки. Тогда уравнение движения принимает следующий вид:

$$\vec{F} + m\vec{W} = 0. \quad (15.1)$$

Таким образом,

В каждый момент времени движения материальной точки система сил, состоящая из приложенных к материальной точке сил и силы инерции Даламбера, удовлетворяет условиям статического равновесия.

Сформулированное утверждение составляет содержание принципа Даламбера для материальной точки. Даламберу принадлежит идея придать уравнениям движения любой механической системы вид уравнений равновесия.

Для любой механической системы, состоящей из n материальных точек, получаем:

$$\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15.2)$$

Рассмотрим основные уравнениями кинетостатики. для этого введем механическую систему, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета. Обозначим через:

$\vec{F}_k^e$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на точку с номером k ;

$\vec{F}_k^l$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку с номером k .

Используя принцип Даламбера для механической системы (15.2), получаем:

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^l + \vec{\Phi}_k = 0; \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (15.3)$$

Складывая почленно левые и правые части всех уравнений (15.3), получаем:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0. \quad (15.4)$$

Пусть O – произвольно выбранная точка, которую принимаем за начало инерциальной системы координат. Умножая каждое из уравнений (15.4) слева векторно на радиус-вектор точки и складывая затем все полученные уравнения, имеем:

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k) = 0 \quad (15.5)$$

Уравнения (15.4) и (15.5) называются основными уравнениями кинетостатики. Заметим, что в эти уравнения не входят внутренние силы,

поскольку главный вектор и главный момент внутренних сил любой механической системы равны нулю.

15.1.2. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ СИЛ ИНЕРЦИИ.

Рассмотрим **общий случай движения механической системы**. Вычислим главный вектор сил инерции механической системы в общем случае. Учитывая определение и способ вычисления количества движения механической системы, получаем

$$\vec{\Phi} = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k = - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \right) = - \frac{d\vec{Q}}{dt} = -m\vec{W}_C,$$

где m – масса механической системы;

$\vec{W}_C$ – ускорение ее центра масс.

Вычислим главный момент сил инерции механической системы относительно некоторого неподвижного центра О. Учитывая определение кинетического момента механической системы, получаем

$$\begin{aligned} \vec{M}_0^\Phi &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{W}_k = - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left[(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) - \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{V}_k \right) \right] = - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k \right) = - \frac{d\vec{L}_0}{dt}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{\Phi} = - \frac{d\vec{Q}}{dt} = -m\vec{W}_C; \quad \vec{M}_0^\Phi = - \frac{d\vec{L}_0}{dt} \quad (15.6)$$

Поступательное движение твердого тела. В этом случае система сил инерции образует систему параллельных сил. Эта система сил имеет равнодействующую, приложенную в центре масс тела и равную главному вектору сил инерции

$$\vec{\Phi} = -m\vec{W}_c.$$

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости материальной симметрии. Силы инерции образуют систему пар сил, которая эквивалентна одной паре сил с моментом

$$M_{cz}^{\Phi} = -J_{zz}\dot{\omega}_z = -J_{zz}\varepsilon_z.$$

Плоское движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии. Если ось z перпендикулярна плоскости материальной симметрии, совпадающей с плоскостью движения xu , то система сил инерции материальных точек абсолютно твердого тела представлена одной силой инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{W}_c$, приложенной в центре масс тела и равной главному вектору сил инерции, и одной парой сил с моментом $M_{cz}^{\Phi} = -J_z\varepsilon$, направленным противоположно вектору $\vec{\varepsilon}$.

15.2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

Принцип возможных перемещений устанавливает условия равновесия механических систем. Под равновесием механической системы традиционно понимают состояние ее покоя по отношению к выбранной инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для ее равновесия необходимо и достаточно, чтобы суммы всех сил, действующих на каждую точку системы, и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю:

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k = 0; \quad \vec{V}_k(0) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15.7)$$

где

$\vec{F}_k$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на точку с номером k ;

$\vec{N}_k$ – равнодействующая всех сил реакций связей, наложенных на точку с номером k , как внешних, так и внутренних.

Принцип виртуальных (возможных) перемещений:

Для равновесия механической системы с идеальными удерживающими стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0; \quad \vec{V}_k(0) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15.8)$$

Сформулированное утверждение называют принципом возможных перемещений. Его действительно можно использовать как принцип, т.е. принять без доказательства, однако, при изложении данного курса в качестве аксиом приняты законы Ньютона и, следовательно, доказательство необходимо.

Необходимость.

Пусть механическая система находится в равновесии. Следовательно, выполняются условия (15.7). Из данного положения дадим системе возможное перемещение. Умножим каждое из уравнений (15.7) скалярно на

соответствующее точке возможное перемещение $\delta \vec{r}_k$ и сложим все полученные уравнения:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (15.9)$$

По условию связи идеальные, следовательно, справедливо утверждение, что сумма работ всех реакций связей на любом виртуальном перемещении равна нулю. Из (15.9) тогда получаем (15.8).

Достаточность.

Приложим к точкам покоящейся механической системы систему сил, удовлетворяющих равенству (15.8) и, следовательно, поскольку связи идеальные, то сумма работ всех реакций связей на любом виртуальном перемещении равна нулю. Значит, справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{N}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (15.10)$$

Покажем, что механическая система останется в покое. Допустим противное – система под действием приложенных сил пришла в движение, то есть ее точки получили ускорения $\vec{W}_k$. Эти ускорения должны быть направлены по касательным к траекториям точек, поскольку скорости равны нулю и нормальные составляющие ускорений отсутствуют. Таким образом, действительные перемещения точек пропорциональны их ускорениям. По условию связи стационарные и, следовательно, среди возможных перемещений системы найдется такое, которое совпадает с действительным. Возьмем в качестве возможного перемещения систему векторов, пропорциональных ускорениям точек $\delta \vec{r}_k = k_o \vec{W}_k$. Равенство (15.10) примет вид:

$$k_o \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{N}_k) \cdot \vec{W}_k = 0.$$

или, учитывая, что для каждой точки справедлив второй закон Ньютона,

$$k_o \sum_{k=1}^n m_k \cdot w_k^2 = 0.$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если ускорения всех точек равны нулю $w_k = 0$. Следовательно, механическая система после приложения активных сил останется в покое.

Заметим, что если вместо возможных перемещений использовать пропорциональные им возможные скорости (что позволяет в полной мере использовать при решении задач кинематические методы), то условия равновесия записываются в виде:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = 0; \quad \vec{V}_k(0) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15.11)$$

то есть

Для равновесия механической системы с идеальными, удерживающими, стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма мощностей всех приложенных к системе активных сил при любых возможных скоростях ее точек равнялась нулю и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.

Принцип возможных перемещений позволяет не только исследовать условия равновесия различных механизмов, но и является мощным средством выборочного определения реакций идеальных связей. Для определения реакции какой-либо связи необходимо эту связь отбросить, а ее реакцию включить в число активных сил.

Принцип возможных перемещений применяется и при наличии неидеальных связей, реакция которых (например, сила трения) включается в число активных сил.

Пример 15.1

Определить зависимость между модулями сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ в клиновом прессе, если сила приложена к концу рукоятки длины a перпендикулярно плоскости, содержащей рукоятку и ось винта (Рис. 15.1). Шаг винта равен h . Угол при вершине клина α .

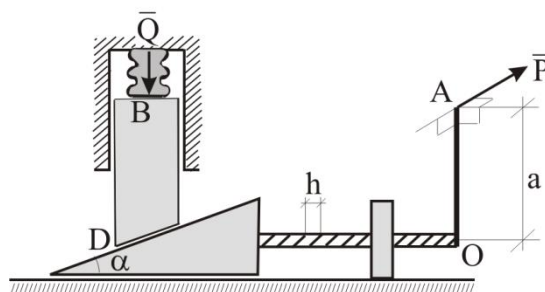


Рис. 15.1. Клиновой пресс

Решение.

Дадим данной механической системе возможное перемещение с учетом наложенных на нее связей. Пусть $\delta\varphi$ — угол поворота рукоятки; δs_A — перемещение точки A ; δx — горизонтальное перемещение клина; δs_B — вертикальное перемещение точки B .

При исследовании условий равновесия механизмов в зависимости от конкретной задачи, исходя из соображений удобства, можно использовать как возможные скорости, так и возможные перемещения. Для сравнения в этом первом разбираемом примере рассмотрим и возможные перемещения, и возможные скорости, которые совпадают по направлению.

Условия равновесия данной механической системы можно записать в виде (15.8) или в виде (15.11):

$$P \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_B = 0; \quad \text{или} \quad P \cdot \tilde{v}_A - Q \cdot \tilde{v}_B = 0.$$

Возможные перемещения тел, входящих в состав данной механической системы, связаны между собой соотношениями (Рис. 15.2) – (Рис.15.4).

$$\delta s_A = a \cdot \delta \varphi; \quad \frac{\delta x}{h} = \frac{\delta \varphi}{2\pi}; \quad \delta s_B = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x \quad (15.12)$$

Тогда зависимости для возможных скоростей всех тел, входящих в состав клинового пресса, получаем дифференцируя равенства связи виртуальных перемещений этих же тел клинового пресса (15.12)

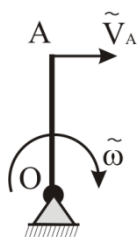


Рис. 15.2. Движение рукоятки OA клинового пресса

$$\tilde{v}_A = a \cdot \tilde{\omega}; \quad \frac{\tilde{v}_{кл}}{h} = \frac{\tilde{\omega}}{2\pi}; \quad \tilde{v}_B = \operatorname{tg} \alpha \cdot \tilde{v}_{кл}. \quad (15.13)$$

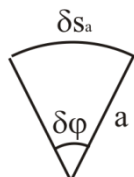


Рис. 15.3. Возможное перемещения точки A от угла поворота рукоятки клинового пресса

Отсюда:

$$\delta s_A = \frac{2\pi a}{htg\alpha} \delta s_B; \quad \text{или} \quad \tilde{v}_A = \frac{2\pi a}{htg\alpha} \tilde{v}_B.$$

Теперь условия равновесия записываются в виде

$$\delta s_B \cdot \left(\frac{2\pi a}{htg\alpha} P - Q \right) = 0; \quad \text{или} \quad \tilde{v}_B \cdot \left(\frac{2\pi a}{htg\alpha} P - Q \right) = 0.$$

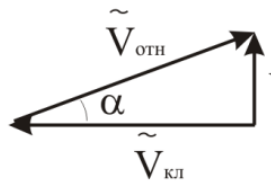


Рис. 15.4. Зависимость относительной и абсолютной скорости клинового прессы

Откуда определяем зависимость между модулями сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ в клиновом прессе, которую и нужно было определить:

$$Q = \frac{2\pi a}{htg\alpha} P.$$

Ответ: $Q = \frac{2\pi a}{htg\alpha} P.$

Пример 15.2

Полиспаг состоит из неподвижного блока и n подвижных блоков (Рис. 15.5). Определить в случае равновесия отношение веса Q поднимаемого груза B к величине силы P , приложенной к свободному концу A троса.

Решение.

Условие равновесия (15.11) имеет вид

$$P\tilde{v}_A - Q\tilde{v}_B = 0.$$

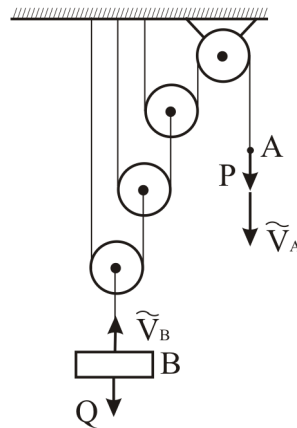


Рис. 15.5. Полиспаст, состоящий из неподвижного блока и n подвижных блоков

Рассмотрим первый из подвижных блоков. Точка D — мгновенный центр скоростей блока (Рис. 15.6), так как она в данный момент времени имеет нулевую скорость.

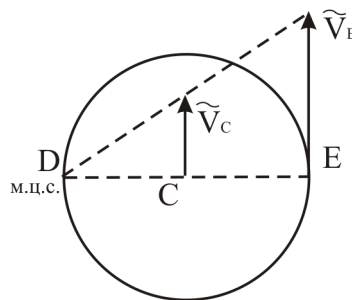


Рис. 15.6. Зависимости между скоростями подвижного блока I

Возможная скорость точки E численно равна возможной скорости точки A . Следовательно,

$$\tilde{v}_C = \frac{\tilde{v}_A}{2}.$$

Скорость центра каждого последующего подвижного блока равна половине скорости центра предыдущего подвижного блока. Таким образом, получаем:

$$\tilde{v}_B = \frac{\tilde{v}_A}{2^n}.$$

Подставляя полученный результат в условие равновесия, имеем:

$$\tilde{v}_B (2^n \cdot P - Q) = 0.$$

Откуда получаем значение искомой силы

$$Q = 2^n \cdot P.$$

Ответ: $Q = 2^n \cdot P$.

Пример 15.3

Составная балка AD , лежащая на двух опорах H и D , состоит из трех балок AB , BC и CD , шарнирно соединенных в точках B и C . Балка AB в сечении A закреплена в стене. К балке приложены три силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ и момент M (Рис. 15.7).

Определить реакцию опоры H , составляющие реакции заделки, а также момент реакции заделки.

Решение.

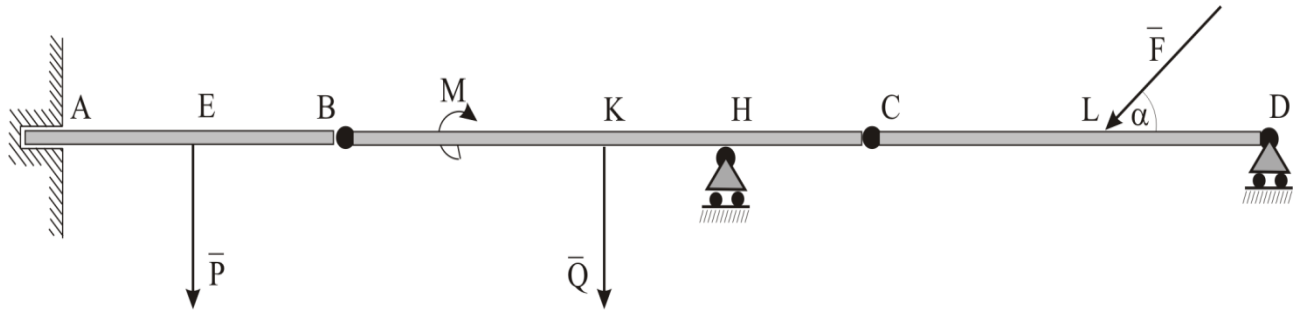


Рис. 15.7. Составная балка AD под действием данной нагрузки сил

1. Определим реакцию опоры H . Отбросим подвижный шарнир H , заменив его действие реакцией $\bar{R}_H$. Эпюры возможных скоростей приведены на Рис. 15.8. Условие равновесия (15.11) принимает вид:

$$R_H \cdot \tilde{v}_H - Q \cdot \tilde{v}_K - M \cdot \tilde{\omega}_{BC} - F \sin \alpha \cdot \tilde{v}_L = 0.$$

Балка BC может вращаться вокруг шарнира B и, следовательно,

$$\frac{\tilde{v}_C}{BC} = \frac{\tilde{v}_H}{BH} = \frac{\tilde{v}_K}{BK} = \tilde{\omega}_{BC}.$$

Балка CD может совершать плоскопараллельное движение. Ее мгновенный центр скоростей совпадает с точкой D . Возможные скорости связаны соотношениями с учетом подобных треугольников:

$$\frac{\tilde{v}_C}{DC} = \frac{\tilde{v}_L}{DL}.$$

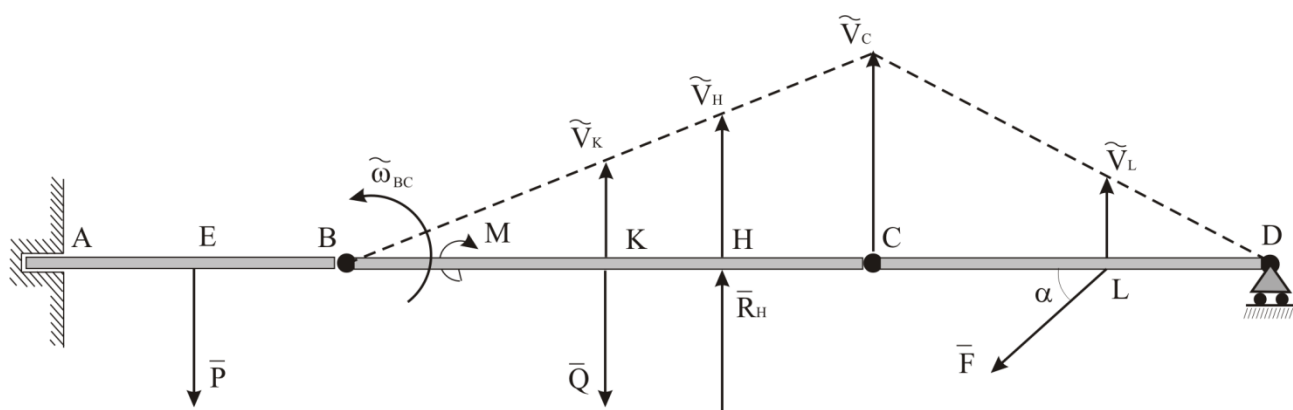


Рис. 15.8. Эюры возможных скоростей при ненулевой скорости точки C

Выражая возможные скорости через какую-нибудь одну, например $\tilde{v}_c$, записываем условие равновесия в виде:

$$\tilde{v}_c \left(R_H \frac{BH}{BC} - Q \frac{BK}{BC} - \frac{M}{BC} - F \sin \alpha \frac{DL}{DC} \right) = 0.$$

Поскольку $\tilde{v}_c$ — любая возможная скорость (не равная нулю), приравняем скобку к нулю и находим:

$$R_H = Q \cdot \frac{BK}{BH} + \frac{M}{BH} + F \sin \alpha \frac{DL}{DC} \cdot \frac{BC}{BH}.$$

2. Найдем горизонтальную составляющую реакции заделки. Заменим жесткое защемление в сечении A на ползун с горизонтальными направляющими (Рис. 15.9). При этом необходимо ввести горизонтальную составляющую реакции заделки $\vec{R}_{Ax}$. Составная балка AD получает возможность перемещаться поступательно в горизонтальном направлении.

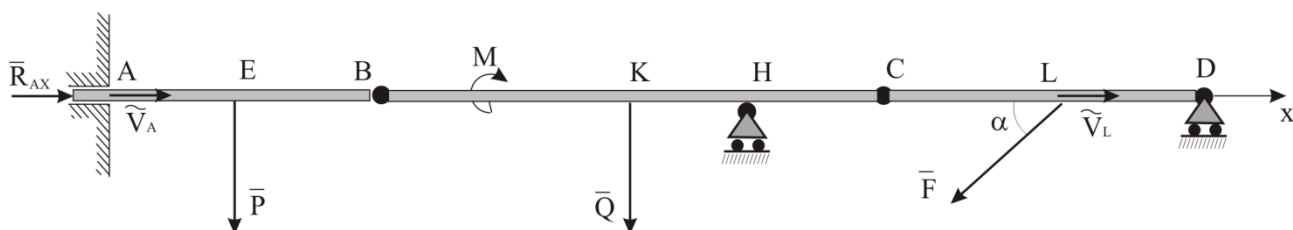


Рис. 15.9. Возможность перемещения балки поступательно в горизонтальном направлении

Условие равновесия (15.11) принимает вид:

$$R_{AX} \cdot \tilde{v}_A - F \cos \alpha \cdot \tilde{v}_L = 0.$$

Но $\tilde{v}_{Ax} = \tilde{v}_{Lx}$ и, следовательно,

$$R_{AX} = F \cos \alpha.$$

3. Определим вертикальную составляющую реакции заделки. Заменим жесткое соединение на ползун с вертикальными направляющими (Рис. 15.10). Балка AB получает возможность поступательного перемещения по вертикали. Балка BC может двигаться плоско-параллельно, имея мгновенный центр скоростей в точке H . Мгновенный центр скоростей балки CD по-прежнему находится в точке D . Условие равновесия (15.11) принимает вид:

$$R_{AY} \cdot \tilde{v}_A - P \cdot \tilde{v}_E + M \cdot \tilde{\omega}_{BC} - Q \cdot \tilde{v}_K + F \sin \alpha \cdot \tilde{v}_L = 0.$$

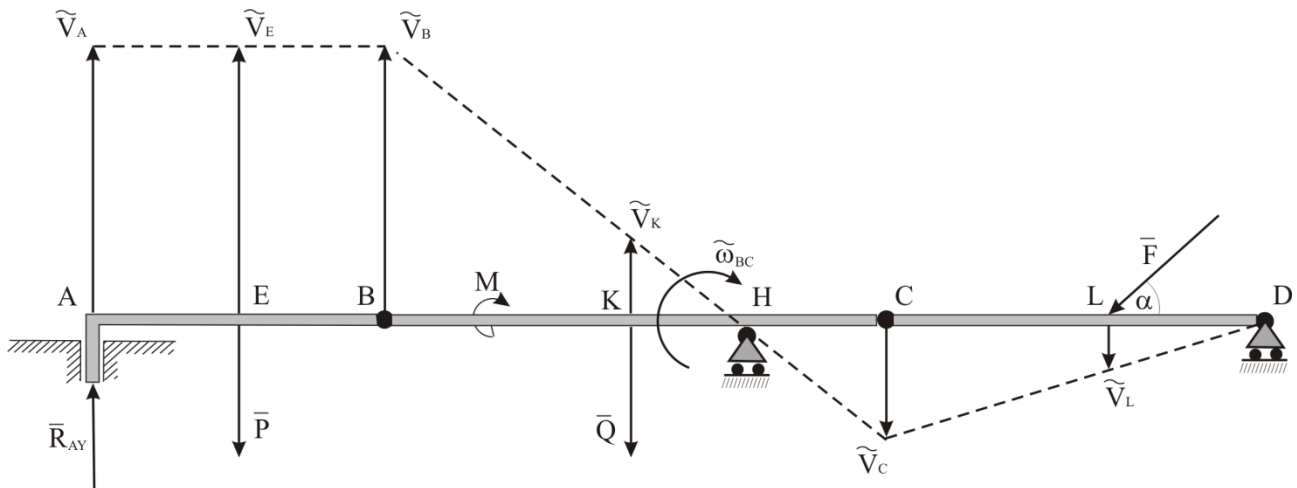


Рис. 15.10. Возможность поступательного перемещения балки по вертикали

Возможные скорости связаны между собой соотношениями:

$$\tilde{v}_A = \tilde{v}_E = \tilde{v}_B; \quad \frac{\tilde{v}_C}{HC} = \frac{\tilde{v}_K}{HK} = \frac{\tilde{v}_B}{HB} = \tilde{\omega}_{BC}; \quad \frac{\tilde{v}_C}{DC} = \frac{\tilde{v}_L}{DL}.$$

Выражая возможные скорости через какую-нибудь одну, например $\tilde{v}_C$, получаем:

$$\tilde{v}_C \left(R_{AY} \cdot \frac{HB}{HC} - P \cdot \frac{HB}{HC} - Q \cdot \frac{HK}{HC} + \frac{M}{HC} + F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \right) = 0,$$

откуда:

$$R_{AY} = P + Q \cdot \frac{HK}{HB} - \frac{M}{HB} - F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \cdot \frac{HC}{HB}.$$

4. Для определения реактивного момента M_A предоставим балке AB возможность вращаться, заменив жесткое защемление в сечении A неподвижным шарниром (Рис. 15.11).

Условие равновесия (15.11) принимает вид:

$$M_A \cdot \tilde{\omega}_{AB} - P \cdot \tilde{v}_B + M \cdot \tilde{\omega}_{BC} - Q \cdot \tilde{v}_K + F \sin \alpha \cdot \tilde{v}_L = 0.$$

По сравнению с предыдущим случаем изменилось кинематическое состояние только стержня AB . Теперь

$$\frac{\tilde{v}_B}{AB} = \frac{\tilde{v}_E}{AE} = \tilde{\omega}_{AB}.$$

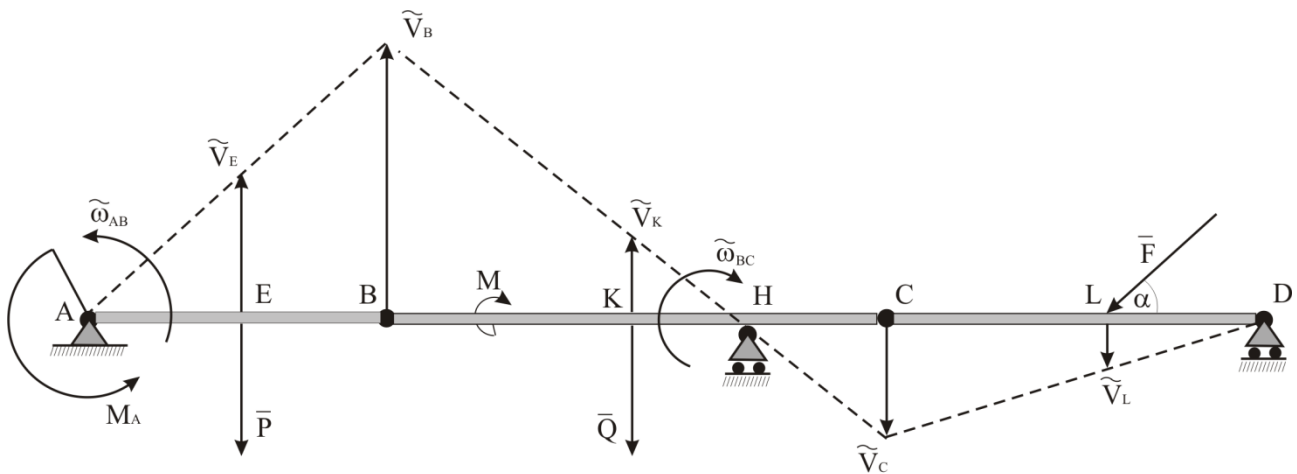


Рис. 15.11. Возможность вращения составной балки

Опять вынося за скобку $\tilde{v}_C$,

$$\tilde{v}_C \cdot \left(M_A \cdot \frac{HB}{HC \cdot AB} - P \cdot \frac{HB}{HC} \cdot \frac{AE}{AB} - Q \cdot \frac{HK}{HC} + \frac{M}{HC} + F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \right) = 0,$$

получаем:

$$M_A = P \cdot AE + Q \cdot \frac{HK \cdot AB}{HB} - M \cdot \frac{AB}{HB} - F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \cdot \frac{HC \cdot AB}{HB}.$$

$$\text{Ответ: } R_H = Q \cdot \frac{BK}{BH} + \frac{M}{BH} + F \sin \alpha \frac{DL}{DC} \cdot \frac{BC}{BH}$$

$$R_{AX} = F \cos \alpha.$$

$$R_{AY} = P + Q \cdot \frac{HK}{HB} - \frac{M}{HB} - F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \cdot \frac{HC}{HB}$$

$$M_A = P \cdot AE + Q \cdot \frac{HK \cdot AB}{HB} - M \cdot \frac{AB}{HB} - F \sin \alpha \cdot \frac{DL}{DC} \cdot \frac{HC \cdot AB}{HB}.$$

15.3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которую наложены идеальные удерживающие связи. Уравнения движения точек имеют вид:

$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k + \vec{N}_k; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$\vec{F}_k$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на точку с номером k ;

$\vec{N}_k$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на точку с номером k .

При фиксированном времени дадим точкам системы возможные перемещения. Умножим каждое из уравнений движения скалярно на соответствующее возможное перемещение и сложим все полученные уравнения:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k.$$

Поскольку по условию связи идеальные (9.6), последняя сумма равна нулю и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (15.14)$$

Уравнение (15.14) называется общим уравнением динамики.

При использовании общего уравнения динамики удобно вводить в рассмотрение силы инерции. В этом случае уравнение (15.14) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (15.15)$$

Равенство (15.15) составляет содержание так называемого **принципа Лагранжа–Даламбера**:

В каждый момент времени при движении механической системы с идеальными удерживающими связями сумма работ всех активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Переходя к возможным скоростям точек системы, получаем:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k) \cdot \tilde{\vec{v}}_k = 0. \quad (15.16)$$

Пример 15. 4

Колесо А скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (Рис. 15.12). К оси колеса привязан трос, переброшенный через неподвижный блок С и прикрепленный к грузу В, поднимающемуся по наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом. В начальный момент система находилась в покое. Колесо и блок представляют собой сплошные однородные диски с массами m_1 и m_3 и радиусами r_1 и r_3

соответственно. Масса груза равна m_2 . Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен f .

Определить ускорение оси колеса.

Решение.

При составлении силовой схемы необходимо учесть приложенные к системе активные силы, которые могут совершить работу на возможном перемещении системы, все силы инерции и реакции неидеальных связей (в данном случае силу трения $\bar{F}_{\tau 2}$). Общее уравнение динамики можно записать как через возможные перемещения, так и через возможные скорости. В рассматриваемом случае получаем:

$$(m_1 g \sin \alpha - \Phi_1) \tilde{v}_1 - M_1^\Phi \tilde{\omega}_1 - M_3^\Phi \tilde{\omega}_3 - (m_2 g \sin \beta + \Phi_2 + F_{\tau 2}) \tilde{v}_2 = 0,$$

причем,

$$\Phi_1 = m_1 w_1 = m_1 \ddot{w}; \quad \Phi_2 = m_2 w_2; \quad M_1^\Phi = J_1 \varepsilon_1; \quad M_3^\Phi = J_3 \varepsilon_3.$$

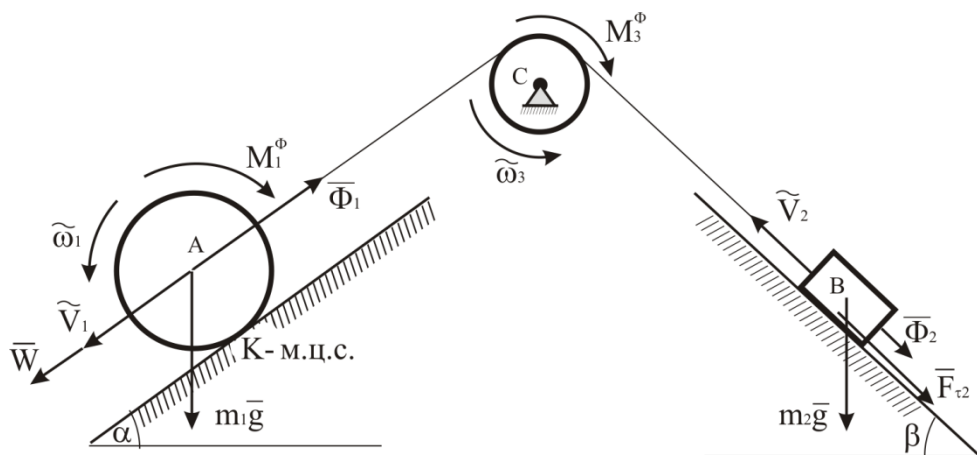


Рис. 15.12. Механическая система с учетом активных сил и сил инерции

Условия, налагаемые связями, приводят к соотношениям:

$$\tilde{v}_1 = \tilde{\omega}_1 r_1; \quad \tilde{v}_1 = \tilde{\omega}_3 r_3; \quad \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2.$$

Отсюда получаем соотношения между ускорениями:

$$w = w_1 = w_2 = \varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_3 r_3.$$

Полученные результаты подставляем в общее уравнение динамики:

$$\tilde{v}_1 \left[(m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta - F_{\tau_2}) - \left(m_1 + m_2 + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right) w \right] = 0.$$

Подставляя значения моментов инерции и силы трения, окончательно получаем:

$$w = 2g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 (\sin \beta + f \cos \beta)}{3m_1 + 2m_2 + m_3}.$$

Пример 15.5

Призма (тело 1) массы m_1 может скользить по идеально гладкой горизонтальной поверхности. В вершине призмы закреплена ось барабана лебедки (тело 2). Конец троса прикреплен к оси катка (тело 3), который катится без проскальзывания по боковой поверхности призмы (Рис. 15.13). Барабан лебедки и каток — сплошные однородные цилиндры одинаковой массы $m_2 = m_3 = m$ и одинакового радиуса $r_2 = r_3 = r$. К барабану лебедки приложен постоянный вращающий момент M .

Получить дифференциальные уравнения движения системы на основе общего уравнения динамики, если в начальный момент времени она находилась в покое.

Решение.

Силовая и кинематическая схемы представлены на Рис. 15.13. Общее уравнение динамики в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\Phi_3^r \cos \alpha - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) \delta x + (M - M_2^\Phi) \delta \varphi_2 - \\ & - M_3^\Phi \delta \varphi_3 + (\Phi_3 \cos \alpha - \Phi_3^r - m_3 g \sin \alpha) \delta s = 0. \end{aligned}$$

Система имеет две степени свободы. В качестве независимых координат примем координату призмы x и относительную координату оси катка s . Кинематические условия, налагаемые связями, имеют вид:

$$\omega_2 = ur_2 = ur; \quad \omega_3 = ur_3 = ur. \quad \text{Отсюда:} \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s}{r}; \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta s}{r} \quad \text{и}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\ddot{s}}{r}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\ddot{s}}{r}.$$

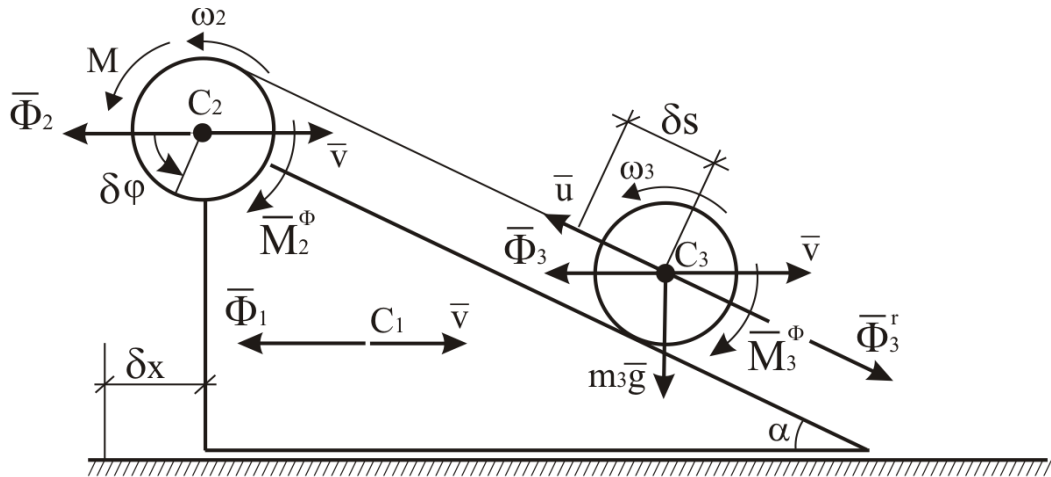


Рис. 15.13. Движение механической системы, включая призму, с учетом активных сил и сил инерции

Учитывая, что

$$\Phi_1 = m_1 w_1 = m_1 \ddot{x}; \quad \Phi_2 = m_2 w_2 = m \ddot{x};$$

$$\Phi_3 = m_3 w_1 = m \ddot{x}; \quad \Phi_3^r = m_3 w_3^r = m \ddot{s};$$

$$M_2^\Phi = J_2 \varepsilon_2 = \frac{1}{2} m r \ddot{s}; \quad M_3^\Phi = J_3 \varepsilon_3 = \frac{1}{2} m r \ddot{s},$$

получаем общее уравнение динамики в виде:

$$\delta x \left[m \ddot{s} \cos \alpha - (m_1 + 2m) \ddot{x} \right] + \delta s \left(\frac{M}{r} - 2m \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \alpha - m g \sin \alpha \right) = 0.$$

Поскольку возможные перемещения δx и δs могут принимать любые значения и не зависят друг от друга, общее уравнение динамики распадается на систему двух дифференциальных уравнений относительно координат x и s :

$$m\ddot{s} \cos \alpha - (m_1 + 2m)\ddot{x} = 0;$$

$$2m\ddot{s} - m\ddot{x} \cos \alpha = \frac{M}{r} - mg \sin \alpha.$$

Ответ: $m\ddot{s} \cos \alpha - (m_1 + 2m)\ddot{x} = 0;$ $2m\ddot{s} - m\ddot{x} \cos \alpha = \frac{M}{r} - mg \sin \alpha.$

15.4. ВОЗМОЖНЫЕ СКОРОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

15.4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ.

Основная идея, положенная в основу подхода к решению задач в аналитической механике, состоит в том, чтобы разделить задачу определения закона движения механической системы и задачу определения неизвестных реакций связей. Для этого необходимо получить дифференциальные уравнения движения механической системы в виде, не содержащем реакций связей. Напомним основные положения, касающиеся связей, наложенных на механическую систему, и рассмотрим их классификацию.

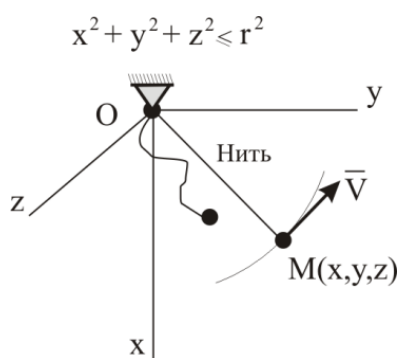


Рис. 15.14

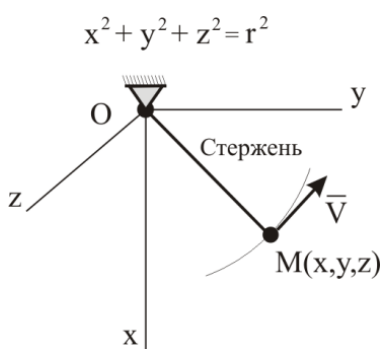


Рис. 15.15

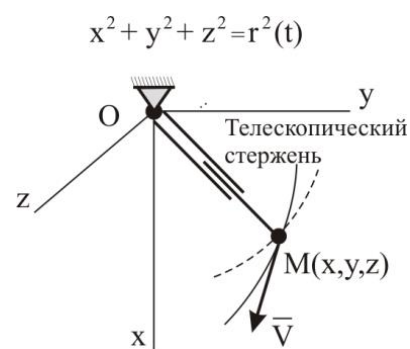


Рис. 15.16

Механическая система называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения в пространстве, а их скорости могут принимать любые значения. В противном случае система называется несвободной. Очевидно, для несвободной системы должны быть заданы ограничения, налагаемые на координаты и скорости точек системы. Эти ограничения называют связями. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств, связывающих время, координаты и скорости точек системы. Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, поверхностей, стержней, нитей и т.п.

Если механическая система может покинуть связь, то такая связь называется *неудерживающей*; в противном случае – *удерживающей*. На Рис. 15.14 изображен шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити, Такой шарик при натянутой нити движется по сфере радиуса r , но может уйти и внутрь этой сферы. При этом нить не натянута (как-бы отсутствует). Это пример неудерживающей связи в отличие от случая, изображенного на Рис. 15.15, где такой же шарик находится на конце нерастяжимого стержня. Удерживающие связи записываются в виде уравнений, а неудерживающие – в виде неравенств, связывающих координаты точек системы.

Рассмотренные в этих двух примерах связи являются стационарными, в отличие от случая, изображенного на Рис. 15.16, где в качестве опоры используется телескопический стержень, длина которого может изменяться со временем. Итак, если вид связи не изменяется со временем, связь называется *стационарной*; в противном случае – *нестационарной*. В уравнения (неравенства) стационарных связей время не входит явным образом.

Связи могут налагать ограничения не только на координаты точек, но и на их скорости. Например, при качении без скольжения колеса по неподвижной поверхности (Рис. 15.17) ограничения, налагаемые связью (поверхность) могут быть выражены уравнениями:

$$y_c = r; \quad v_c = \omega r.$$

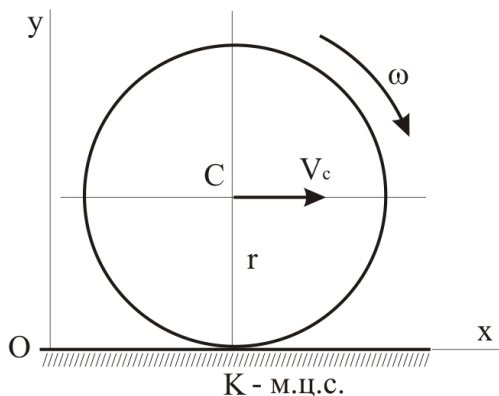
Хотя второе из этих уравнений носит относительно координат дифференциальный характер, оно может быть проинтегрировано

$$\int_0^{x_c} dx_c = r \int_0^t \omega dt = r \int_0^{\varphi} d\varphi$$

и заменено алгебраическим соотношением $x_c = r \varphi$.

Рассмотрим другой пример. Конек AB скользит по ледяной поверхности, принятой за координатную плоскость xy (Рис. 15.18). Конек имеет выпуклое лезвие, которое касается льда только в одной точке C . Положение конька задается двумя координатами точки C и углом φ . Конек затачивается таким образом, чтобы отсутствовало поперечное скольжение в направлении, перпендикулярном AB . Иначе говоря, скорость точки касания C должна быть направлена вдоль конька, т.е.

$$\frac{v_{cy}}{v_{cx}} = \operatorname{tg} \varphi; \quad dx_c \sin \varphi - dy_c \cos \varphi = 0.$$



К - м.ц.с.
Рис. 15.17. Качение колеса

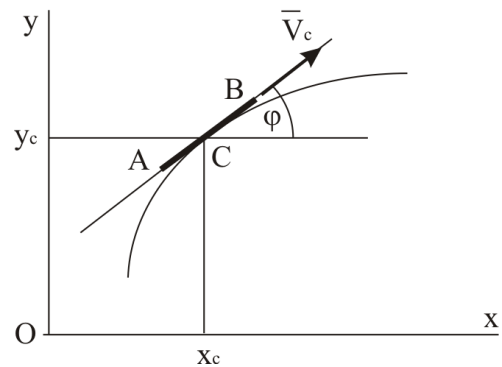


Рис. 15.18. Направление скорости точки C

Это уравнение связи (в отличие от предыдущего примера) нельзя проинтегрировать, не зная законов движения конька $x_c(t)$, $y_c(t)$; $\varphi(t)$.

Опр.1 Связи называются голономными, если их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени или дифференциалов координат.

Опр.2 Связи называются неголономными, если их уравнения содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат.

В дальнейшем будем рассматривать только голономные удерживающие стационарные

$$f(x, y, z) = 0$$

и нестационарные

$$f(x, y, z, t) = 0$$

связи. Изучение неголономных систем представляет значительные трудности и не входит в число вопросов, излагаемых в данном курсе. Если же на систему наложены неудерживающие связи, то решение задачи можно разбить на ряд временных интервалов, на одних из которых связь действует как удерживающая (на Рис. 15.12 нить натянута), а на других как бы отсутствует (нить не натянута).

Рассмотрим идеальные связи.

Опр.3 Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (15.19)$$

Учитывая важность понятия идеальной связи, рассмотрим часто встречающиеся случаи.

1. Пусть опорой для тела служит некоторая поверхность, по которой тело может скользить (Рис. 15.19). В общем случае реакция поверхности $\vec{R}$ имеет две составляющие – нормальную $\vec{N}$ и касательную $\vec{F}_r$, которая называется силой трения. При любом возможном перемещении тела возможная работа реакции отлична от нуля за счет работы силы трения:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_\tau \cdot \delta \vec{r} = \pm |\vec{F}_\tau| |\delta \vec{r}| \neq 0.$$

Если же поверхность идеальная, то сила трения отсутствует и тогда виртуальная работа силы реакции на любом виртуальном перемещении равна нулю:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

Особый случай составляет качение без проскальзывания колеса по поверхности. Сила реакции снова имеет две составляющие $\vec{N}$ и $\vec{F}_\tau$. Помимо этих составляющих возможно возникновение момента трения качения M_τ (Рис. 15.20). При любом возможном перемещении колеса скорость точки приложения сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_\tau$ равна нулю и, следовательно, возможная работа этих сил равна нулю. Однако, момент трения качения может совершить работу при возможном повороте колеса. Если же колесо и опорная поверхность считаются абсолютно твердыми и $M_\tau = 0$, то такая связь будет идеальной.

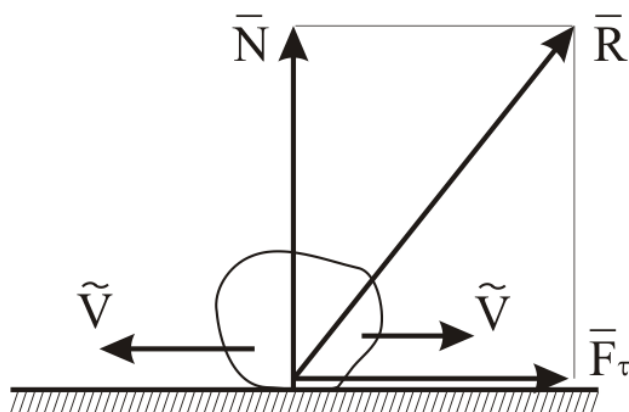


Рис. 15.19. Общий случай реакции поверхности

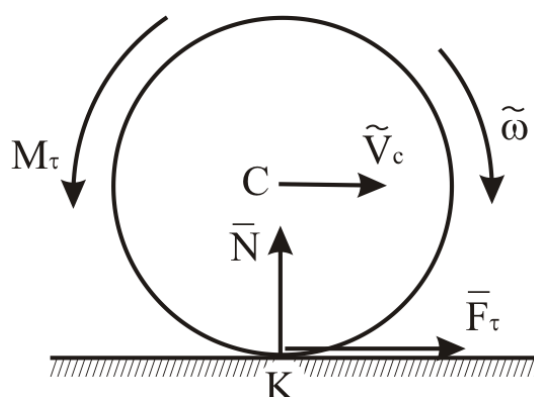


Рис. 15.20. Качение без проскальзывания колеса по поверхности

2. Рассмотрим две материальные точки A и B , связанные невесомым деформируемым стержнем (Рис. 15.21). В соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{R}_A = -\vec{R}_B$. По теореме сложения скоростей при сложном движении точки имеем:

$$\tilde{V}_B = \tilde{V}_B^e + \tilde{V}_B^r = \tilde{V}_A + \tilde{V}_{B1}^r + \tilde{V}_{B2}^r,$$

где $\tilde{V}_{B1}^r$ и $\tilde{V}_{B2}^r$ – составляющие возможной относительной скорости, направленные вдоль отрезка AB и перпендикулярно ему соответственно.

Для возможной суммарной мощности сил реакций получаем:

$$N = \vec{R}_A \cdot \tilde{V}_A + \vec{R}_B \cdot \tilde{V}_B = \vec{R}_A \cdot \tilde{V}_A - \vec{R}_A \cdot (\tilde{V}_A + \tilde{V}_{B1}^r + \tilde{V}_{B2}^r) = -\vec{R}_A \cdot \tilde{V}_{B1}^r = \pm |\vec{R}_A| |\tilde{V}_{B1}^r|.$$

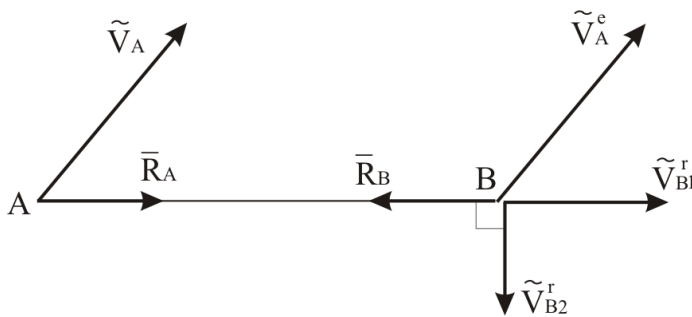


Рис. 15.21. Две материальные точки, связанные невесомым деформируемым стержнем

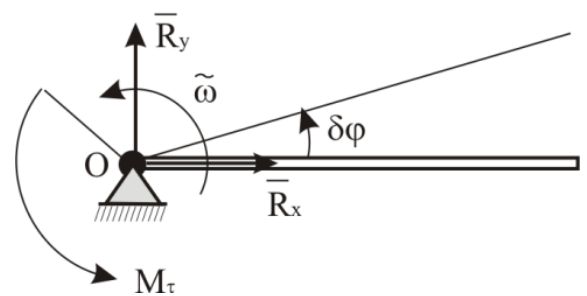


Рис. 15.22. Реакция неподвижного шарнира

Если стержень AB недеформируемый ($\tilde{V}_{B1}^r = 0$), то суммарная возможная работа реакций равна нулю и связь будет идеальной. Такая связь реализуется в абсолютно твердом теле. Если же возможна деформация стержня, рассмотренная связь не будет идеальной, поскольку возможная работа реакций при растяжении–сжатии стержня будет отлична от нуля.

3. Неподвижный шарнир может рассматриваться как идеальная связь, если трением в шарнире можно пренебречь (Рис. 15.22). В этом случае, поскольку точка приложения реакции шарнира неподвижна, возможная работа реакции шарнира равна нулю. Если же трение в шарнире необходимо учитывать, то связь

не будет идеальной, так как при возможном повороте тела вокруг шарнира будет совершаться работа момент сил трения.

15.4.2. ВОЗМОЖНЫЕ СКОРОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

Понятия возможной скорости и возможного перемещения введем сначала для материальной точки, на которую наложена голономная удерживающая нестационарная связь, уравнение которой имеет вид:

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (15.20)$$

Опр.3 Возможной скоростью материальной точки $\vec{V}$ называется любая скорость, которую может иметь несвободная материальная точка, не нарушая наложенных на нее в данный момент времени связей.

Заметим, что возможная скорость не реализуется как следствие действия приложенных к точке сил. Это – мыслимый набор скоростей, обладая которыми в данном положении M_o , точка не покинет поверхность связи (напомним, рассматриваются только удерживающие связи) при условии, что сама поверхность не движется и не деформируется, т.е. при фиксированном времени. Такие скорости могут быть только касательными к поверхности. Как известно, вектор градиента

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

направлен по нормали к поверхности. Следовательно, возможные скорости должны удовлетворять условию:

$$\text{grad } f \cdot \vec{V} = 0. \quad (15.21)$$

Поскольку точка не покидает поверхность связи, ее действительная скорость $\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ должна удовлетворять условию

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

или

$$\text{grad } f \cdot \vec{V} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (15.22)$$

Сравнивая равенства (15.21) и (15.22), замечаем, что если связь нестационарная, то среди возможных скоростей нет ни одной, которая совпадала бы с действительной скоростью. Если же связь стационарная, т.е. время не входит явным образом в уравнение связи (15.21), то $\partial f / \partial t = 0$, уравнения (15.21) и (15.22) совпадают и среди возможных скоростей найдется такая, которая совпадает в данный момент времени с действительной скоростью.

Проиллюстрируем сказанное на простых примерах. Пусть на точку M наложена удерживающая стационарная связь в виде стержня, шарнирно закрепленного на другом конце (Рис. 15.23). Такая точка может двигаться только по сфере, по касательной к которой и направлена действительная скорость. Если фиксировать время и посмотреть, какие скорости может иметь точка, не отрываясь от стержня, оказывается, что эти скорости могут быть направлены только по касательной к той же сфере.

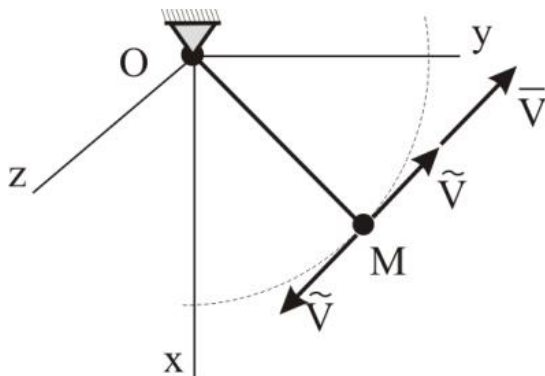


Рис. 15.23. Удерживающая стационарная связь в виде стержня

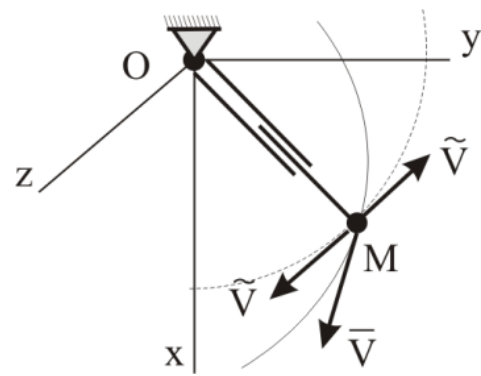


Рис. 15.24. Связь представлена в виде телескопического стержня

Другой пример. Пусть стержень телескопический (Рис. 15.24); его длина изменяется по заданному закону $r(t)$. Такая связь будет удерживающей и нестационарной. К скорости точки M , полученной при повороте стержня, добавляется скорость, полученная точкой при выдвигании поршня. Траекторией точки M может быть любая кривая. Если же мы фиксируем время, т.е. мысленно остановим выдвигание стержня, то из занимаемого положения точка может двигаться только по сфере радиуса $r(t_1)$. При этом не найдется ни одной возможной скорости, которая совпала бы с действительной.

Опр.4 Возможным перемещением материальной точки $\delta\vec{r}$ называется любое бесконечно малое перемещение, которое может иметь несвободная материальная точка, не нарушая наложенных на нее в данный момент времени связей.

Действительное перемещение и действительная скорость связаны известным соотношением

$$d\vec{r} = \vec{V}dt.$$

Учитывая равенство (15.22), получаем, что действительное перемещение должно удовлетворять соотношению

$$\text{grad } f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

или

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad (15.23)$$

Возможное перемещение пропорционально возможной скорости

$$\delta\vec{r} = \alpha\tilde{V}.$$

Учитывая равенство (15.21), получаем, что возможное перемещение должно удовлетворять соотношению

$$\text{grad } f \cdot \delta\vec{r} = 0$$

или

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (15.24)$$

Знак " δ " означает операцию варьирования. Сравнивая (15.23) и (15.24), заметим, что техника варьирования такая же, как техника дифференцирования, но при вычислении вариации функции время не варьируется (считается постоянным – фиксированным). Все свойства операции дифференцирования выполняются и для операции варьирования.