Лекция **9.**

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.
ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

9.1. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

В самом общем случае тело может совершать любые перемещения в пространстве. Примером может служить движение самолета, способного переместиться в любое место воздушного пространства и как угодно поворачиваться по отношению к Земле.

Однако во многих практически интересных случаях на тело наложены те или иные связи, ограничивающие некоторые его перемещения. Происходящее при этом движение обладает определенными особенностями. В связи с этими особенностями различают поступательное, вращательное, плоскопараллельное и сферическое движения абсолютно твердого тела. Первые два относятся к числу простейших. Другие движения считаются составными, поскольку их можно интерпретировать как те или иные комбинации простейших движений.

Одна из задач кинематики твердого тела состоит в том, чтобы задать движение тела. Движение тела считается заданным, если установлен способ определения положения любой его точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета. Далее необходимо разработать способы определения движения всех точек тела, способы вычисления скоростей и ускорений этих точек. Помимо этого существуют кинематические характеристики, присущие телу в целом. Они также требуют определения и установления способов их вычисления.

9.2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Опр.1 ***Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению во все время движения.***

Рассмотрим две любые точки A и B тела. В любой момент времени имеет место равенство (Рис. 9.1)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \tag{9.1}$$

причем, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}.$ Модуль $\overrightarrow{AB}$ не изменяется, так как тело абсолютно твердое, а также направление вектора $\overrightarrow{AB}$ не изменяется, так как движение поступательное.

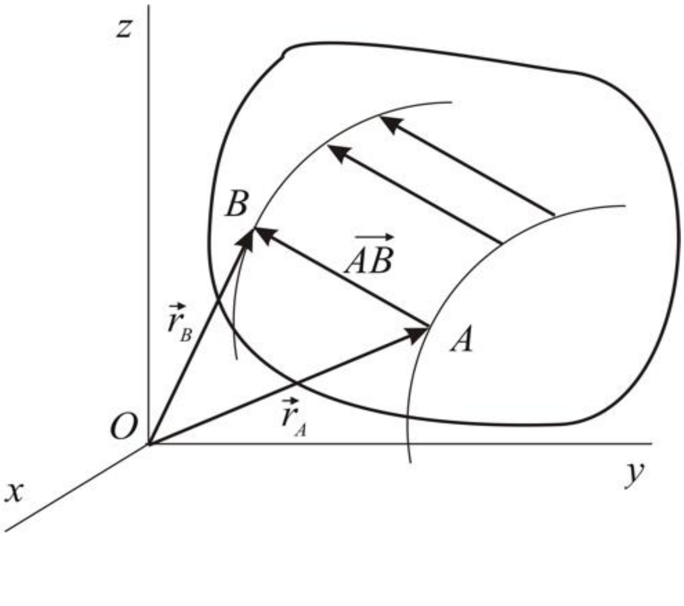

Рис. 9.1. Положение точки B относительно неподвижного центра O

Из равенства (9.1) следует, что траектория точки B может быть получена из траектории точки A смещением всех ее точек на постоянный вектор. Таким образом, все точки тела при поступательном движении описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории.

Дифференцируя равенство (9.1) по времени, получаем, что в любой момент времени все точки тела имеют одинаковые скорости

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \ldots = \vec{V}_M$$

и одинаковые ускорения

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B = \vec{W}_C = \ldots = \vec{W}_M .$$

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки. Чтобы задать поступательное движение тела, достаточно задать закон движения одной из его точек, например, центра масс тела:

$$x_c = x(t); \qquad y_c = y(t); \qquad z_c = z(t).$$

Теорема о поступательном движении твердого тела.

Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Для доказательства теоремы выберем две произвольные точки твердого тела А и В и проведем из точки А в точку В радиус-вектор r_{AB}
(Рис. 9.2).

Так как тело движется поступательно, то во время его движения отрезок АВ остается параллельным своему начальному положению, а потому значения радиуса-вектора rдв в любые моменты времени t и t_1 геометрически равны, то есть

$$\boldsymbol{r_{AB} = r_{A1B1} = const}$$

Проведем из произвольного неподвижного полюса О в точки А, В, А1, В1, радиусы-векторы $r_A,\ r_B,\ r_{A1},\ r_{B1}$.

Из Δ OAB по правилу треугольника для суммы векторов устанавливаем равенство

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB},$$

которое будет справедливым во все время поступательного движения твёрдого тела.

Это равенство показывает, что любому положению точки А соответствует определенное положение точки В, отстоящее от А по направлению r_{AB} на расстоянии АВ.

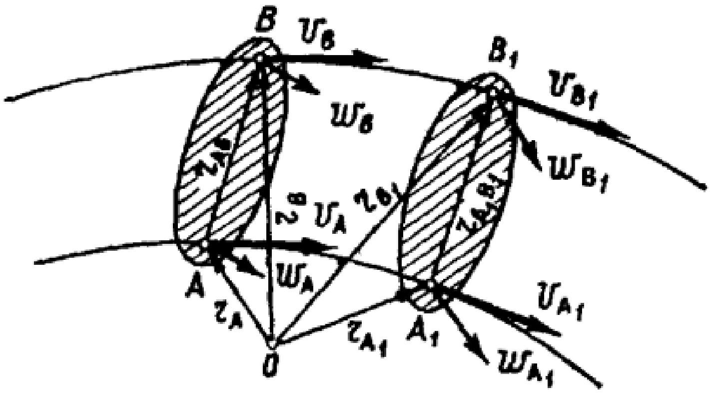

Рис. 9.2. Поступательное движение твердого тела

Поэтому, если траекторию точки А переместить по направлению r_{AB} на расстояние АВ, то она совпадет с траекторией точки В, то есть траектории точек А и В тождественны и параллельны.

Определим вектор скорости точки В как производную от радиуса-вектора этой точки по времени по формуле:

$$\boldsymbol{v_B = \frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{d(AB)}{dt}},$$

но

$$\boldsymbol{\frac{dr_A}{dt} = v_A}\ ,$$

А так как вектор AB постоянный, то производная от константы равна нулю:

$$\frac{\boldsymbol{d(AB)}}{\boldsymbol{dt}} = \mathbf{0}$$

Поэтому получаем

$$\boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{v_B} \tag{9.2}$$

то есть скорости точек A и B геометрически равны.

Определяем ускорения точек A и B тела согласно векторному способу задания движения точки. Для этого дифференцируем обе части векторного равенства (9.2), получим

$$\boldsymbol{w_B} = \frac{\boldsymbol{dv_B}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dv_A}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{w_A}$$

$$\boldsymbol{w_B} = \boldsymbol{w_A} \tag{9.3}$$

Тем самым получмли, что при поступательном движении твердого тела две любые его точки A и B имеют геометрически равные между собой ускорения.

Так как две различные точки A и B, взятые в теле при поступательном его движении, произвольные, то полученные соотношения относятся ко всем точкам тела при поступательном его движении.

Установленные свойства поступательного движения позволяют свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения любой отдельно взятой точки этого тела, то есть к задаче кинематики точки, которую уже рассматривали.

Общие для всех точек твердого тела, движущегося поступательно, скорость **v** и ускорение **w** называют скоростью и ускорением поступательного движения твердого тела.

При любом другом движении твердого тела точки тела двужутся с различными скоростями и ускорениями.

Уравнениями поступательного движения твердого тела являются уравнения движения любой точки этого тела — обычно уравнения движения его центра тяжести C:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= f_1(t), \\ y_c &= f_2(t), \\ z_c &= f_3(t). \end{aligned}\right\}$$

Точки твердого тела, движущегося поступательно, могут описывать любые траектории, то есть как прямые линии, так и криволинейные траектории.

Примером поступательного движения твердого тела является движение спарника AB, соединяющего пальцы равных кривошипов O_1A и O_2B (Рис. 9.3).

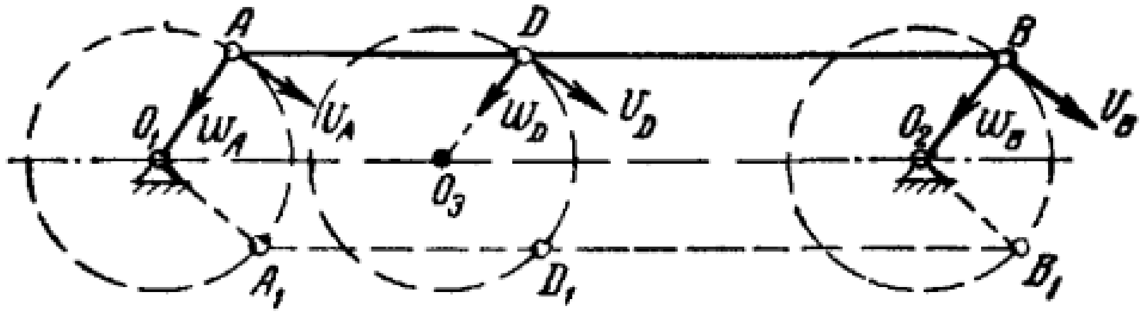

Рис. 9.3. Пример поступательно движущегося тела. Движение спарника

Отметим, что все точки спарника описывают окружности радиусом, равным длине кривошипа, и имеют геометрически равные скорости и ускорения.

9.2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

Зададим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. При вращательном движении в теле существует единственная прямая, все точки которой остаются неподвижными. Эта прямая называется **осью вращения**. Чтобы получить вращательное движение, можно шарнирно закрепить две точки тела (Рис. 9.4).

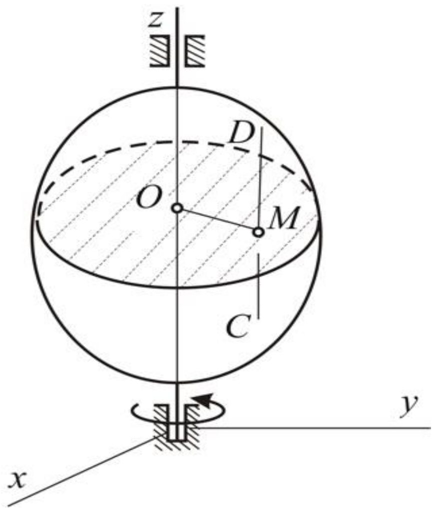

Рис. 9.4. Вращательное движение твердого тела

Проведем в теле сечение, перпендикулярное оси вращения. Через любую точку сечения M проведем перпендикуляр к сечению (DC). Отрезок DC во все время движения остается параллельным оси вращения, т.е. движется поступательно. Таким образом, положение сечения полностью определяет положение тела в системе отсчета.

Рассмотрим движение сечения (Рис. 9.5).

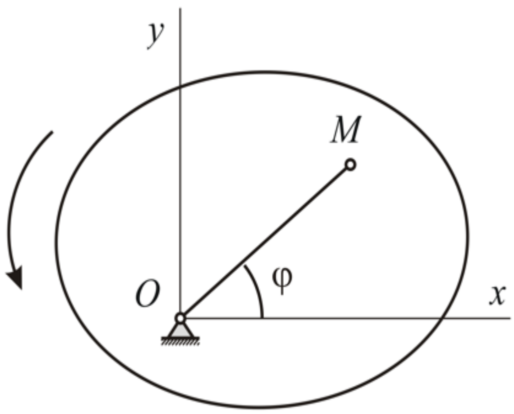

Рис. 9.5. Движение сечения тела при вращении

Положение сечения полностью определяется положением любого отрезка OM, пересекающего ось вращения Oz. Положение отрезка OM, а следовательно, положение тела можно задать углом φ, который отсчитывается от некоторой неподвижной прямой, например, оси Ox. За положительное направление отсчета этого угла примем направление против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения. Чтобы задать движение, нужно задать закон изменения угла поворота со временем:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{9.4}$$

Вычисление скорости и ускорения любой точки вращающегося тела. Вычислим скорость любой точки M тела. Траектория точки M известна – это окружность с центром O, лежащим на оси вращения, радиус которой $h_м = OM$ равен кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения (Рис. 9.6).

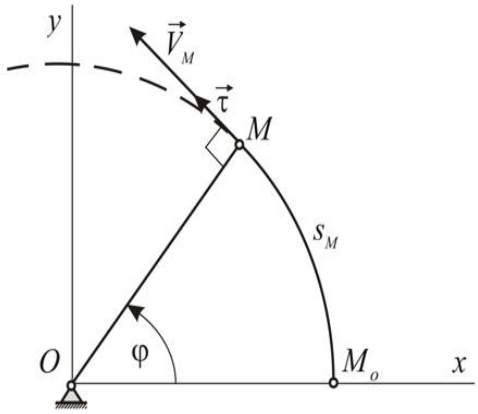

Рис. 9.6. Вычисление линейной скорости точки при вращении тела

Вектор скорости $\vec{V}_м$ направлен по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярен отрезку OM . Дугу $s = M_oM$ можно рассматривать как дуговую координату точки. Длина дуги окружности связана с центральным углом формулой

$$s = \varphi \cdot h_м . \tag{9.5}$$

Принимая во внимание формулу вычисления скорости как первой производной по времени от криволинейной координаты по времени, получаем:

$$V_м = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi \cdot h_м) = h_м \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \tag{9.6}$$

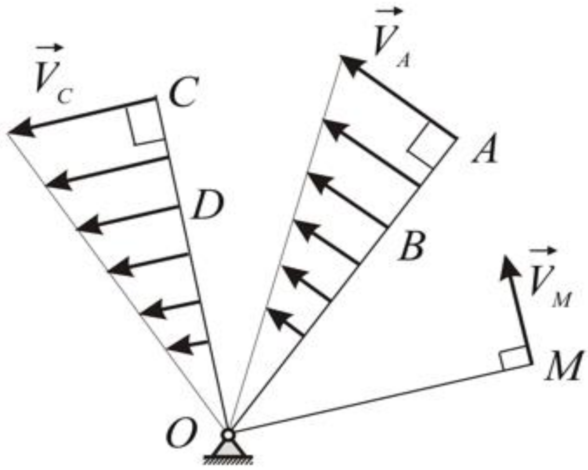

Рис. 9.7. Распределение скоростей точек при вращении твердого тела, перпендикулярного оси вращения

Величина, равная

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

называется угловой скоростью тела.

С учетом формулы (9.6) окончательно получаем для линейной скорости точки M:

$$V_M = \omega \cdot h_M . \tag{9.7}$$

Формула (9.7) называется формулой Эйлера. В дальнейшем будет получен векторный вариант этой формулы. На Рис. 9.5 представлено распределение скоростей точек сечения тела, перпендикулярного оси вращения.

Вычислим ускорение любой точки M тела. Поскольку траектория точки окружность, то из естественного способа задания движения точки находим касательное и нормальное ускорения данной точки:

$$W_M^\tau = \frac{dV_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega \cdot h_M\right) = \frac{d\omega}{dt} \cdot h_M ;$$

$$W_M^n = \frac{V_\tau^2}{h_M} = \frac{\left(\omega h_M\right)^2}{h_M} = \omega^2 \cdot h_M .$$

Величина

$$\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} = \ddot{\varphi}$$

называется угловым ускорением тела. Окончательно получаем, что вращательное ускорение любой точки твердого тела при вращении вычисляется по формуле:

$$W_M^\tau = \varepsilon \cdot h_M ; \qquad (9.8)$$

Центростремительное ускорение точки твердого тела при вращательном его движении определяется по формуле:

$$W_M^n = \omega^2 \cdot h_M . \qquad (9.9)$$

Пример на вращательное движение твердого тела.

Вращение маховика в период пуска машины определяется уравнением

$$\varphi = \frac{1}{3} t^3$$

где t — в *сек*, φ — в *рад*.

Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 *см*, в тот момент, когда ее скорость равна 8 *м/с*.

Решение.

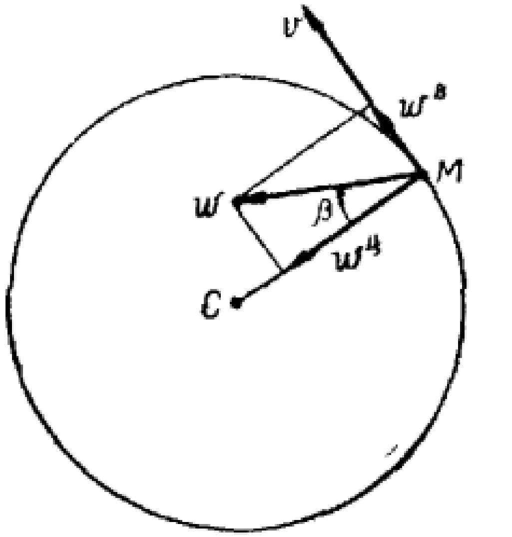

Рис. 9.8. Вращательное движение маховика

По уравнению вращения маховика находим его угловую скорость для любого момента времени согласно формуле:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{3}\,3\,t^2 = t^2 \qquad (9.10)$$

Так как дан закон движения маховика, то определяем его угловое ускорение в любой момент времени согласно формуле:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2t \qquad (9.11)$$

Находим значения угловой скорости и углового маховика в данный момент времени t_1, когда скорость точки М равна 8 *м/с*:

$$v = R\omega, \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0{,}5} = 16\ \text{с}^{-1}$$

По этому значению ω из (9.10) находим t_1:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4\ \text{с}.$$

По уравнению (9.11) вычисляем ε . Обратим внимание на знаки ω и ε для момента времени t_1. Если знаки этих величин одинаковые, то вращение тела ускоренное, если разные. То замедленное. В данном случае рассматривается ускоренное движение маховика.

Согласно уравнениям (9.8), (9.9) вычисляем модули вращательного и центростремительного ускорений, а затем, по теореме Пифагора, с учётом того, что оба эти ускорения взаимно перпендикулярны, вычисляем полное ускорение точки М в данный момент времени t_1 :

$$\varepsilon_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ с}^{-2}$$

$$W_1^{\text{в}} = R\varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 8 = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$W_1^{\text{ц}} = R\omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 16^2 = 128\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$W_1 = \sqrt{(W_1^{\text{в}})^2 + (W_1^{\text{ц}})^2} = \sqrt{4^2 + 128^2} = 128{,}06\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$$

Как видно, модуль полного ускорения точки W_1 весьма мало отличается от модуля центростремительного ускорения точки $W_1^{\text{ц}}$ (Рис. 9.8).

Направление ускорения точки определяется углом β, образованным между вектором полного ускорения точки и радиусом вращения СМ:

$$tg\ \beta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}$$

$$\beta_1 = 1^{\circ}48^{`}$$

Ответ: $W_1 = 128{,}06\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$