

1.5 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПЛОСКОСТЬЮ

1.5.1. Пересечение многогранников плоскостью

В общем случае для того чтобы построить линию пересечения многогранника с плоскостью, нужно найти ряд точек, принадлежащих как многограннику, так и плоскости, а затем эти точки соединить ломаной линией.

Сечение – это плоская фигура, которая получается при пересечении многогранника плоскостью.

Построить сечение многогранника плоскостью – это значит определить точки пересечения прямой с плоскостью или определить линии пересечения плоскостей.

При построении сечения гранных поверхностей плоскостью используют два способа: *способ граней* – определяются стороны многоугольника сечения; *способ ребер* – определяются вершины многоугольника сечения.

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник. Его вершины являются точками пересечения ребер с заданной плоскостью, а стороны – линиями пересечения граней с плоскостью.

Количество вершин и размеры многоугольника зависят от формы и размеров многогранника, а также расположения секущей плоскости.

Построение сечений значительно упрощается, если секущая плоскость является проецирующей. В этом случае одна проекция сечения совпадает с проецирующим следом плоскости.

На рис. 5.1 показаны примеры сечений призмы, а на рис. 5.2 – пирамиды.

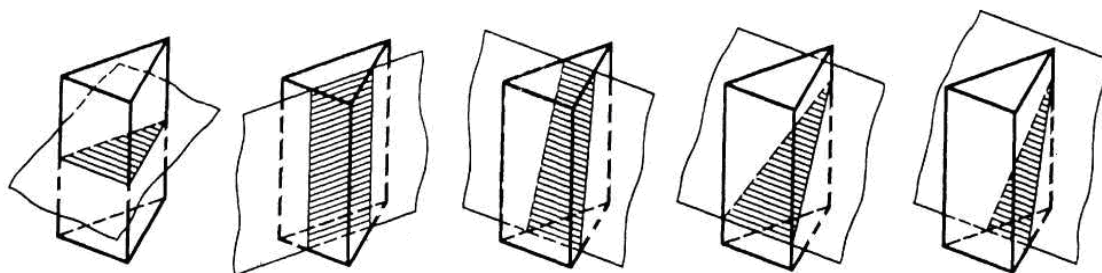


Рис. 5.1

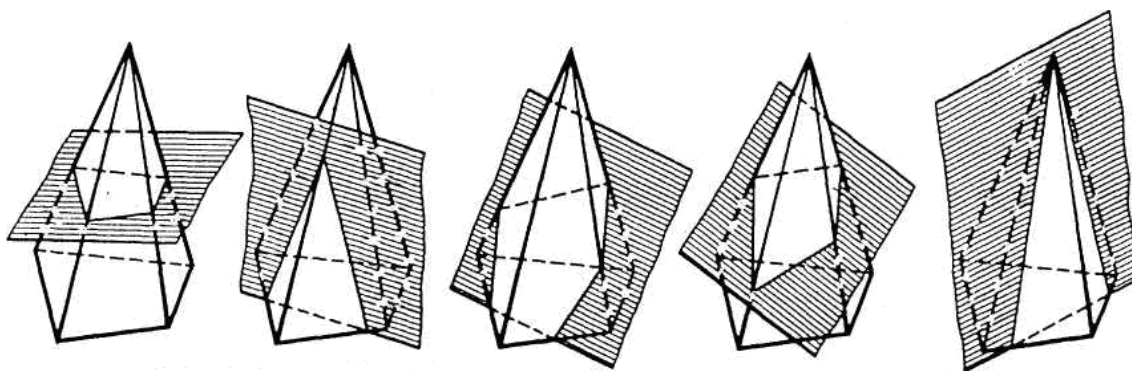


Рис. 5.2

1. Пересечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью P

Фронтальная проекция сечения пирамиды (рис. 5.3) совпадает с фронтальным следом P_V секущей плоскости. Горизонтальную проекцию фигуры сечения строят по точкам, которые являются точками пересечения плоскости P с ребрами пирамиды.

Действительный вид фигуры сечения в этом случае определяется способом замены плоскостей проекций или способом совмещения.

На рис. 5.3 для этой цели применен способ замены плоскостей проекций. В качестве дополнительной плоскости следует принять плоскость H_1 , параллельную плоскости S и перпендикулярную плоскости V (в данном примере H_1 совпадает с S). Натуральный вид фигуры сечения $a_1b_1c_1d_1$.

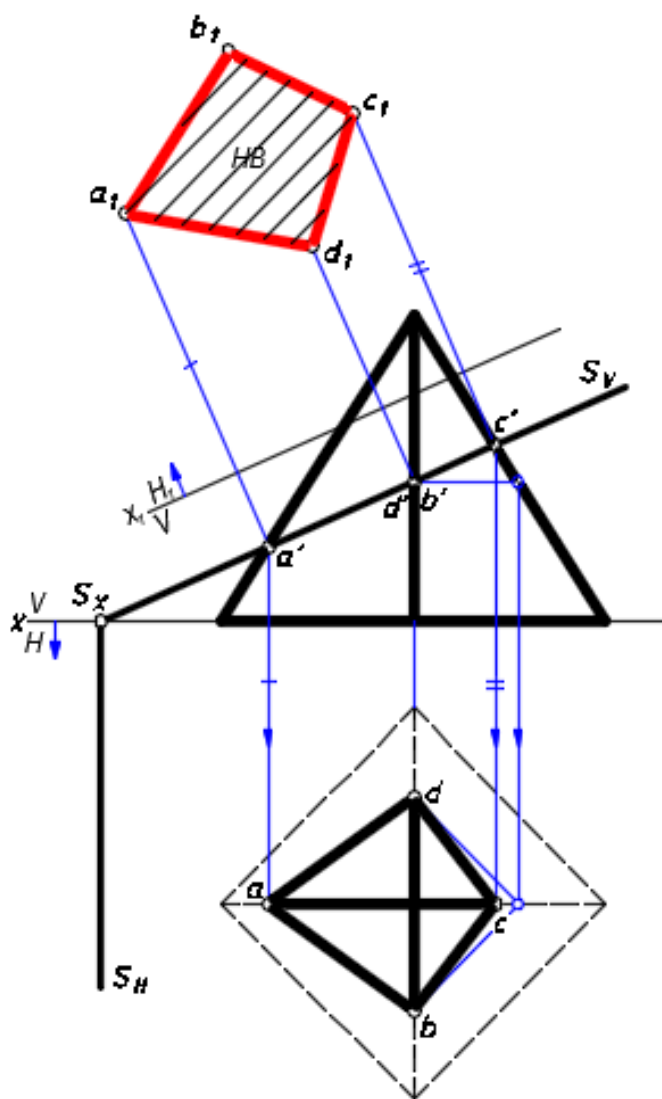


Рис. 5.3

2. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения P

Для того чтобы построить линию пересечения (рис. 5.4), нужно найти точки пересечения боковых ребер призмы с данной плоскостью P , используя их проецирующие свойства. Так как ребра призмы перпендикулярны к плоскости H , то горизонтальные проекции (1, 2, 3, 4) точек пересечения совпадают с горизонтальными проекциями ребер (a, b, c, d) призмы.

Находим точку (1, 1') пересечения ребра (a, a') с плоскостью P . Горизонтальная проекция (1) этой точки совпадает с горизонтальной проекцией ребра. Пользуясь условием, что точка (1, 1') лежит и на плоскости P , находим фронтальную проекцию (1') точки. Аналогично находим точки (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') пересечений остальных ребер с плоскостью P , используя фронтолы плоскости P . Соединив последовательно найденные точки, получаем фронтальную (1'2'3'4') проекцию искомой линии пересечения. Из чертежа видно, что две стороны фронтальной проекции линии пересечения (1'4' и 3'4') являются видимыми, а две другие стороны (1'2' и 2'3') – невидимыми.

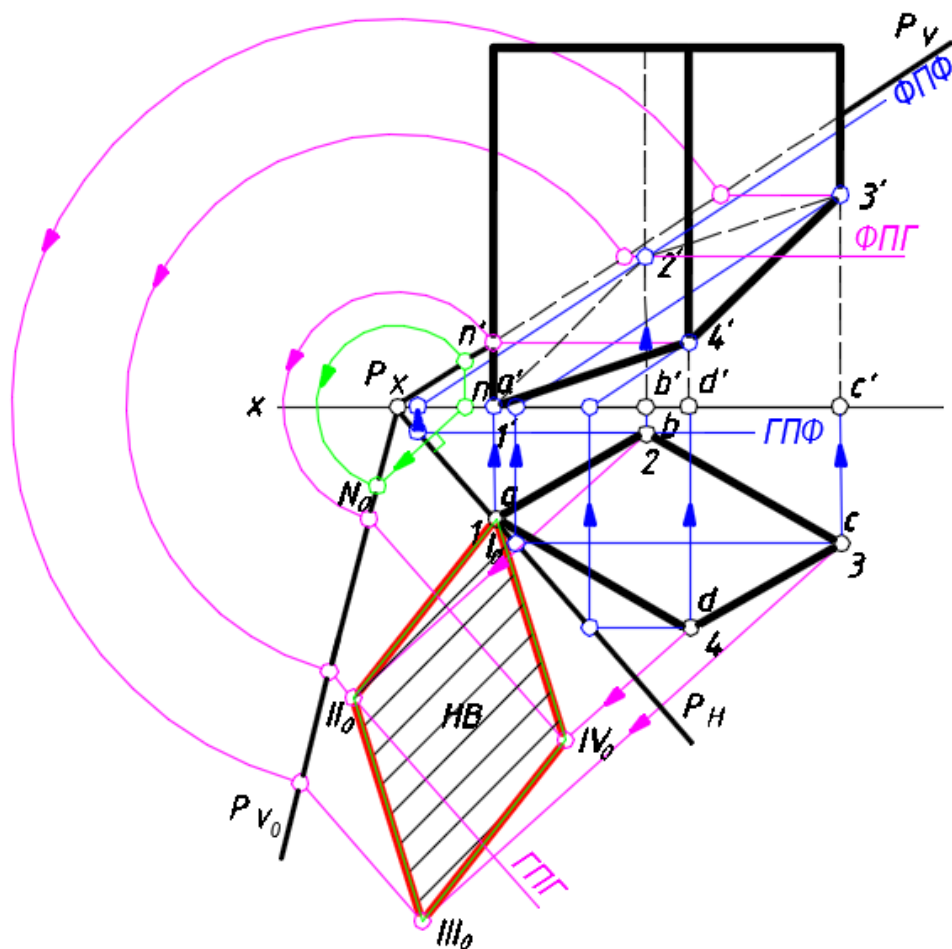


Рис. 5.4

Находим натуральную величину линии пересечения способом совмещения плоскости P с плоскостью H .

1.5.2. Взаимное пересечение многогранников

Порядок построения линии пересечения двух многогранников (A и B):

1. находят точки пересечения ребер *одного* многогранника (A) с гранями другого (B);
2. находят точки пересечения ребер *второго* многогранника (B) с гранями первого (A);
3. найденные точки *последовательно* соединяют между собой прямыми линиями.

Указание. Соединяют между собой *обязательно* только те точки, которые лежат на одних и тех же гранях каждого многогранника.

Если одна из пересекающихся поверхностей является проецирующей (цилиндр, призма), то задача на пересечение поверхностей сводится к более простой задаче на принадлежность линии поверхности, ибо одна из проекций искомой линии в этом случае известна.

При пересечении гранных поверхностей линия пересечения представляет собой пространственную ломаную линию с точками излома на ребрах призм.

На рис. 5.5 представлен пример неполного пересечения поверхностей, так как у каждой из призм не все ребра участвуют в пересечении. В результате получается одна замкнутая ломаная линия. В случае полного пересечения получаются две замкнутые ломаные линии.

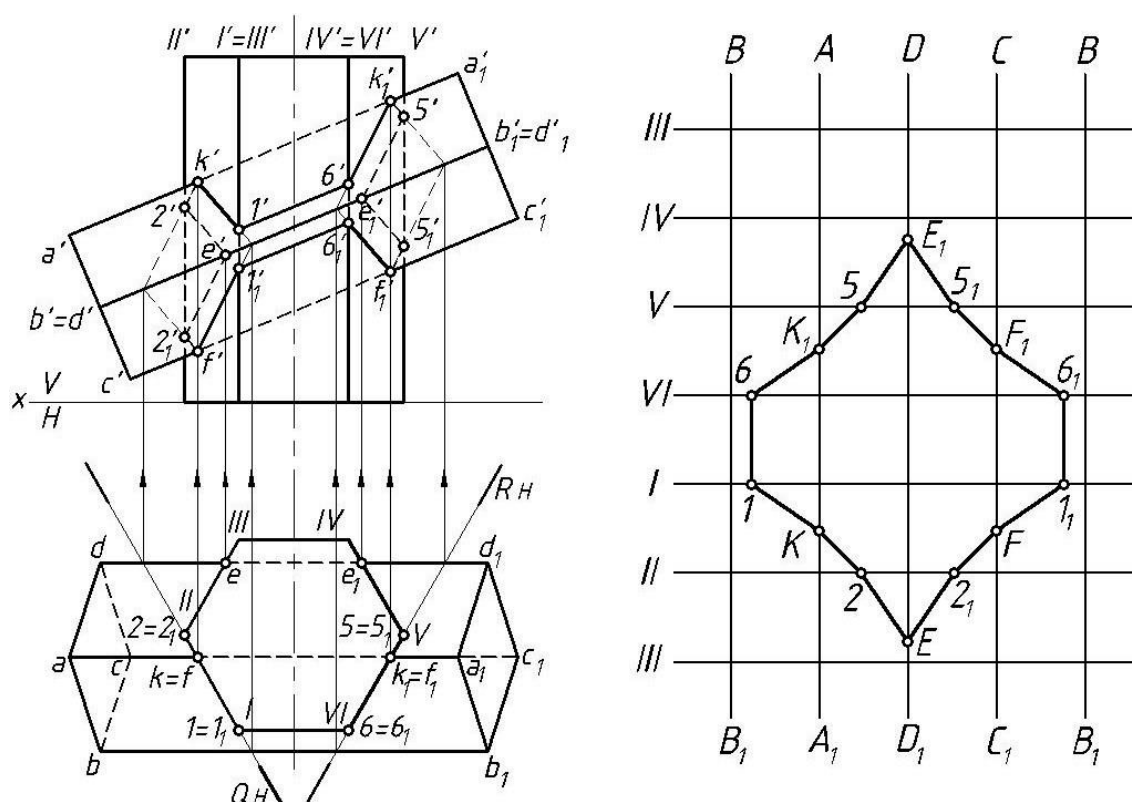


Рис. 5.5

Поверхность шестигранной призмы – проецирующая на плоскость H , поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с очерком шестигранной призмы, и задача решается только на фронтальной проекции.

Левая передняя грань шестигранной призмы представляет собой горизонтально проецирующую плоскость (плоскость Q). В сечении плоскости Q с четырехгранной призмой получается четырехугольник, показанный штрихпунктирной линией. Построив аналогично пересечение правой передней грани шестигранной призмы, можно добавить к полученным точкам еще две – точки пересечения ребра DD_1 (точки E и E_1) и затем последовательно, с учетом видимости, соединить их.

Соединение точек не вызывает затруднений, если использовать способ

сетки. Вертикальные линии сетки соответствуют, например, ребрам наклонной призмы, а горизонтальные – ребрам шестигранной призмы, причем первое ребро изображается дважды. Первым ребром обычно выбирается то ребро, которое не участвует в пересечении (например, такие ребра как BB_1 и III). Далее все ребра обозначают последовательно, читая их на горизонтальной проекции в одном направлении, по часовой стрелке или против нее. Затем отмечают на сетке все полученные точки в соответствии с их принадлежностью грани или ребру. Например, точка E принадлежит ребру DD_1 и находится в грани $II-III$. Отметив на сетке все точки, соединяют их между собой так, чтобы соединяющая линия не пересекала линии сетки.

Пользуясь сеткой, в той же последовательности соединяют точки на фронтальной проекции с учетом видимости граней. Звено ломаной считается видимым, если обе грани, которым оно принадлежит, видимы. Если хотя бы одна из граней является невидимой, звено ломаной также будет невидимым.

1.5.3. Пересечение прямой с многогранником

Точки пересечения поверхности тела с прямой линией называют также точками встречи прямой с поверхностью, или точками входа и выхода прямой.

Этапы решения задачи на пересечение прямой линии с поверхностью:

1. проводят через данную прямую вспомогательную секущую плоскость;
2. находят линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью;
3. получают искомые точки в пересечении заданной прямой с построенной линией сечения поверхности.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость.

При пересечении поверхности многогранника вспомогательной плоскостью образуется ломаная линия.

Пересечение прямой линии с поверхностью пирамиды

На рис. 5.6 приведено построение проекций e , e' и f , f' точек пересечения прямой AB с боковыми гранями пирамиды. Для этого прямую AB заключили во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость P (P_V). Горизонтальные проекции e и f искомых точек построены в пересечении проекции ab заданной прямой с горизонтальной проекцией сечения 123 , по которому плос-

кость P пересекает пирамиду. Фронтальные проекции e' и f' определены по линиям связи.

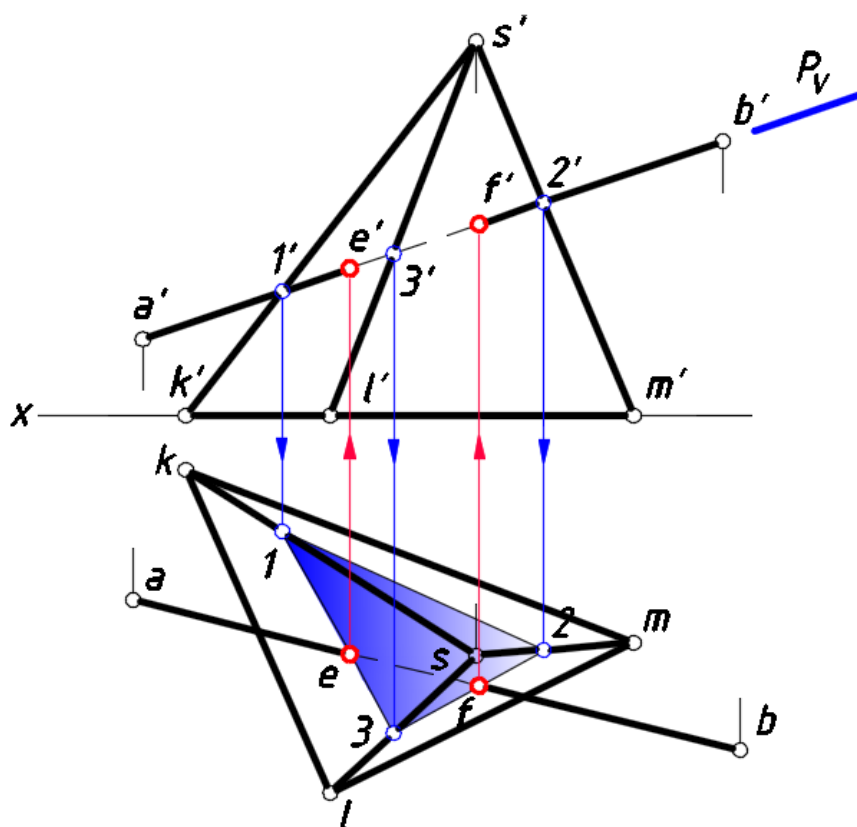


Рис. 5.6

1.5.4. Пересечение поверхностей вращения плоскостями

В общем случае для того чтобы построить линию пересечения поверхности с плоскостью, нужно найти ряд точек, принадлежащих как поверхности, так и плоскости, а затем эти точки соединить плавной кривой линией.

Для нахождения произвольной точки линии пересечения, необходимо:

1. рассечь заданные фигуры вспомогательной плоскостью;
2. найти линии пересечения этой плоскости с поверхностью и с заданной плоскостью;
3. на пересечении найденных линий получить искомые точки (чаще всего - две).

Последовательно проводя ряд вспомогательных плоскостей, можно найти необходимое число точек.

Вспомогательную плоскость следует выбирать так, чтобы ее линия пересечения с поверхностью проецировалась на плоскости проекций в виде простейших линий - прямой или окружности.

При построении линии пересечения находят прежде всего ее характерные (опорные) точки (рис. 5.7), а затем, по мере необходимости, промежуточные точки.



Рис. 5.7

Если заданная поверхность имеет прямолинейные образующие, то линию пересечения можно найти также следующим образом: нанести на поверхности ряд образующих и найти точки их пересечения с плоскостью, а затем соединить эти точки плавной кривой линией.

Построение сечений значительно упрощается, если секущая плоскость является проецирующей. В этом случае одна проекция сечения совпадает с проецирующим следом плоскости.

Сечение цилиндра. Плоскость пересекает поверхность прямого кругового цилиндра:

- 1) *по окружности*, если она перпендикулярна оси цилиндра (рис. 5.8, а);
- 2) *по эллипсу* (части эллипса), если она произвольно наклонена к оси цилиндра (рис. 5.8, б, в, г, д);
- 3) *по прямоугольнику*, если она параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстоянии, которое меньше радиуса цилиндра (рис. 5.8, е).

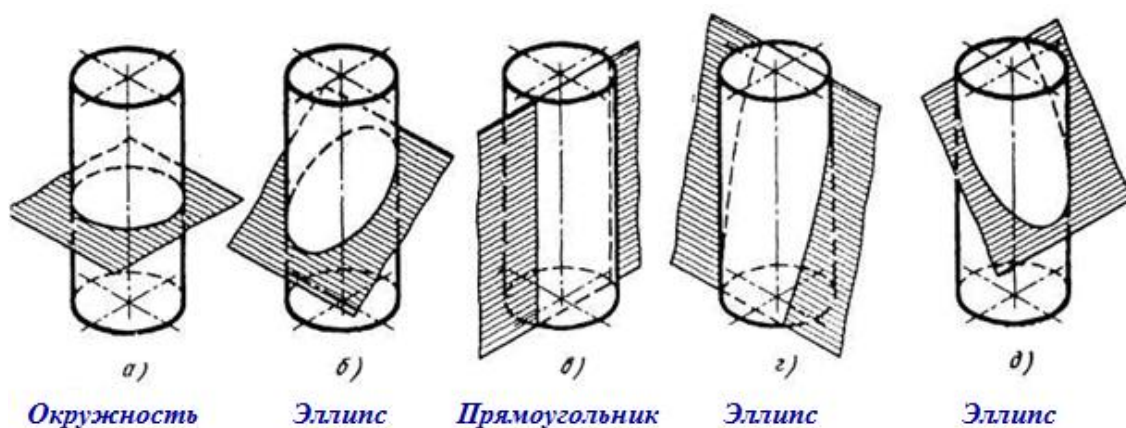


Рис. 5.8

Сечение конуса. На рис. 5.9 показаны примеры пересечения конуса плоскостями различного положения, где каждому наглядному изображению соответствует фронтальная проекция конуса со следами секущей плоскости. Обозначим угол наклона образующей конуса к его основанию через β , а угол наклона плоскости к основанию конуса – через α .

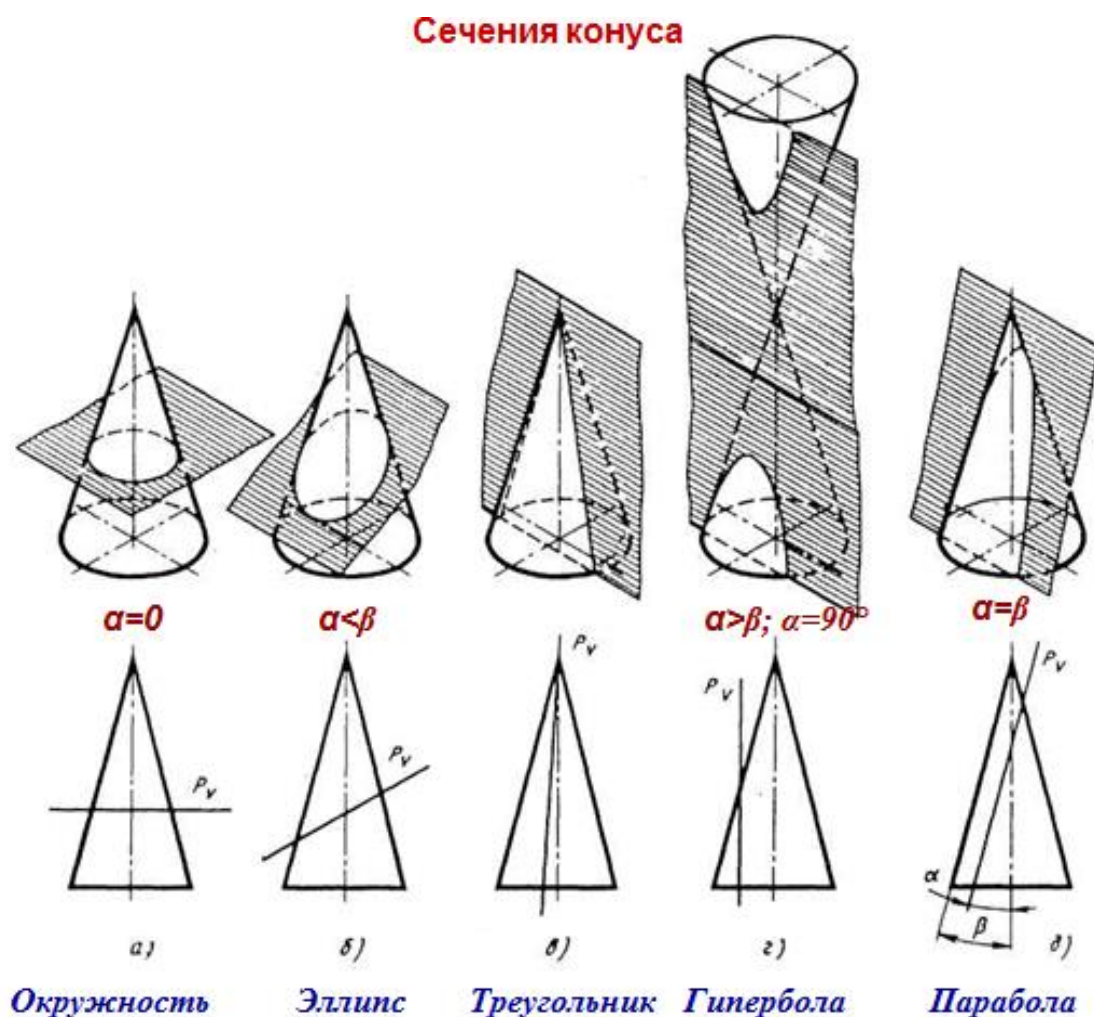


Рис. 5.9

Плоскость, *проходящая через вершину* прямого кругового конуса, пересекает его поверхность *по треугольнику*, если α больше β или $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда плоскость проходит через ось конуса (рис. 5.9, в).

Плоскость, *не проходящая* через вершину прямого кругового конуса, пересекает его поверхность:

- 1) *по окружности*, если плоскость перпендикулярна оси конуса, т. е. $\alpha = 0$ (рис. 5.8, а);
- 2) *по эллипсу*, если α меньше β (рис. 5.9, б);
- 3) *по гиперболе*, если α больше β или $\alpha = 90^\circ$, т. е. когда плоскость параллельна оси конуса (рис. 5.9, г);
- 4) *по параболе*, если $\alpha = \beta$, т. е. плоскость параллельна одной из образующих конуса (рис. 5.9, д).

Для выявления вида линии пересечения, когда секущая плоскость - общего положения, вращают ее вокруг оси конуса до такого положения, чтобы она стала фронтально проецирующей, если ось конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, и горизонтально проецирующей, если ось конуса перпендикулярна фронтальной плоскости проекций.

Сечение сферы. Любая плоскость пересекает поверхность сферы *по окружности*, если расстояние l от плоскости до центра сферы меньше радиуса R сферы (рис. 5.10).

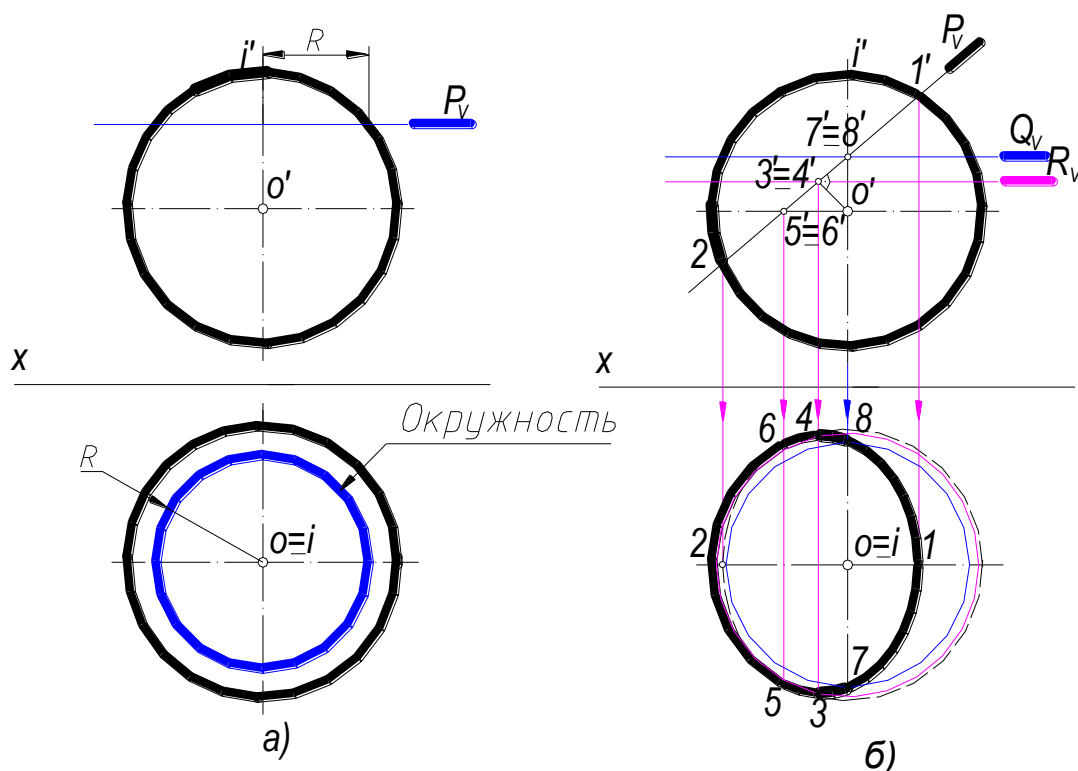


Рис. 5.10

Если плоскость занимает положение плоскости уровня, то на параллельную плоскость проекций эта окружность сечения будет проецироваться без искажения, а на перпендикулярную плоскость проекций – в отрезок прямой, рав-

ный по длине диаметру окружности.

На рис. 5.10, *а* P_V – горизонтальная плоскость уровня. Линия пересечения проецируется на горизонтальную плоскость проекций H без искажения в окружность, а на плоскость проекций V – в отрезок прямой.

Если секущая плоскость R_V занимает проецирующее положение, то на плоскость проекций, перпендикулярную плоскости R_V , линия сечения (окружность) будет проецироваться в отрезок прямой, равный по длине диаметру окружности, а на другую плоскость проекций – в эллипс, большая ось которого равна диаметру окружности (рис. 5.10, *б*).

В частном случае плоскость является *касательной* к поверхности сферы, если $l = R$.

В дальнейшем при решении задач придется задавать точку на поверхности. Для этого поступают так: проводят на поверхности *вспомогательную* линию (прямую, окружность) и затем на этой линии берут точку.

1. Пересечение прямого кругового конуса фронтально проецирующей плоскостью P

Секущая плоскость P пересекает боковую поверхность конуса по эллипсу ($\alpha > \beta$), фронтальная проекция которого совпадает с фронтальным следом (P_V) плоскости (рис. 5.11). Горизонтальную проекцию эллипса строим по точкам: задаем фронтальные проекции ряда его точек и находим их горизонтальные проекции. Сначала строим габаритные точки, т.е. точки, лежащие на большой и малой осях эллипса. На фронтальной проекции точки $1'$ и $2'$ лежат на крайних образующих, горизонтальные проекции которых совпадают с центральной линией, параллельной оси Ox . Опустив из точек $1'$, $2'$ линии проецирующей связи до пересечения с центральной линией на горизонтальной проекции, получим точки 1 и 2 .

Малая ось эллипса $III-III_1$ перпендикулярна большой оси и делит ее пополам. Точки 3 и 3_1 строим с помощью параллели конуса.

Для построения горизонтальной проекции малой оси $III-III_1$ на фронтальной проекции через середину большой оси $1'2'$ эллипса проводим окружность, лежащую в горизонтальной плоскости $R(R_V)$, диаметр которой будет равняться малой оси эллипса. На горизонтальной плоскости проекций на пересечении линий проецирующей связи с окружностью получаем точки 3 и 3_1 . Характерные точки IV и IV_1 , а также промежуточные точки V и V_1 строят аналогично точкам III и III_1 . Найденные точки можно построить также с использованием образующих конуса. Затем через горизонтальные проекции точек проводим по лекалу плавную кривую – эллипс.

Для построения натуральной формы фигуры сечения используем способ совмещения.

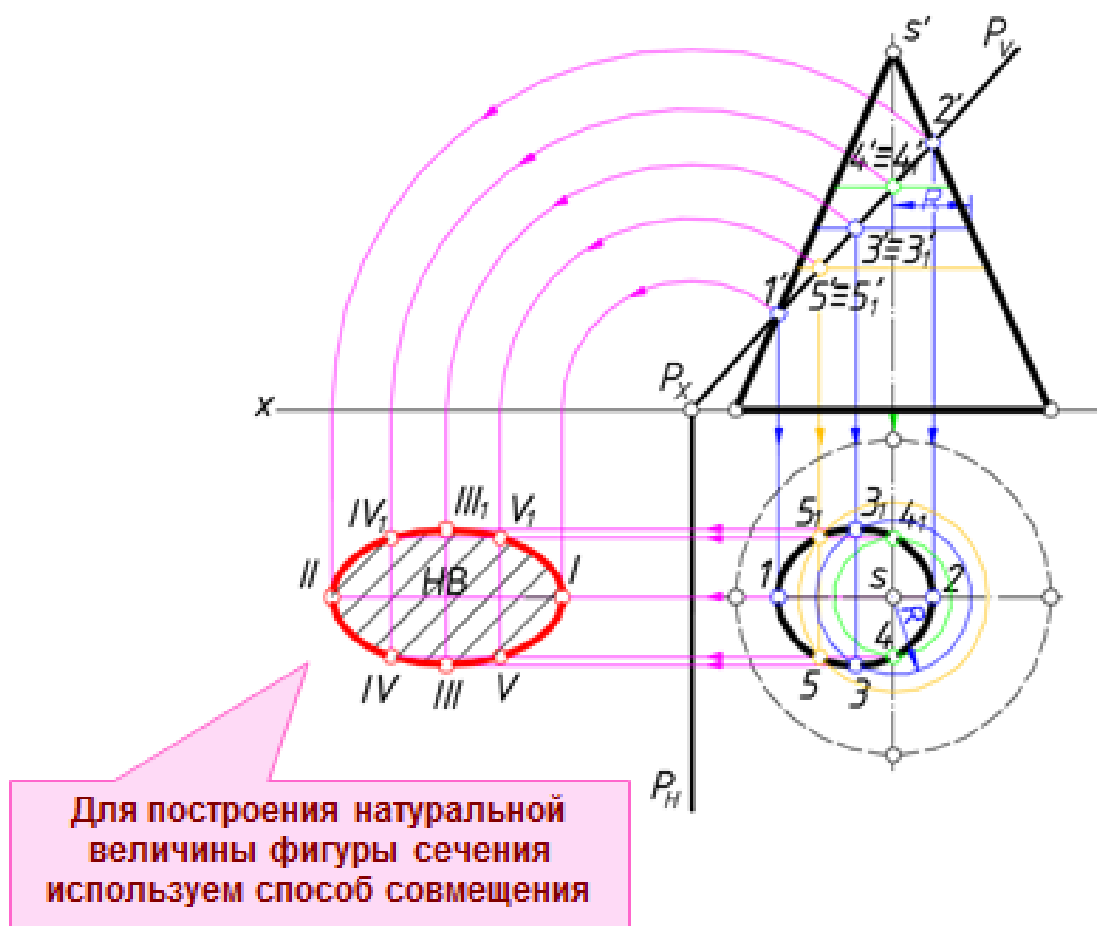


Рис. 5.11

2. Пересечение прямого кругового конуса плоскостью общего положения P

Так как плоскость P пересекает все образующие конуса и не проходит через его вершину, то линией пересечения является эллипс (рис. 5.12). Большая ось этого эллипса пересекается с осью конуса и имеет направление линии наибольшего ската плоскости, а малая ось пересекается с большой в ее середине и имеет направление горизонтали плоскости.

Характерными точками будут высшая и низшая точки линии пересечения, являющиеся конечными точками большой оси эллипса, и точки, делящие линию пересечения на две части – видимую и невидимую.

Важно определить также концы малой оси эллипса, которые необходимы для построения его натуральной величины.

Для определения высшей и низшей точек используем горизонтально проецирующую плоскость Q , проходящую через ось конуса перпендикулярно к следу P_H . Эта плоскость пересекает плоскость P по линии MN (mn , $m'n'$), а поверхность конуса по образующим SA (sa , $s'a'$) и SB (sb , $s'b'$), которые в пересечении дают искомые точки I (1 , $1'$) и II (2 , $2'$). Точка O (o , o'), лежащая

на середине найденной большой оси $I II$ эллипса, является его центром. Концы $III (3, 3')$ и $IV (4, 4')$ малой оси эллипса находим с помощью горизонтальной плоскости T , проходящей через центр O эллипса. Плоскость T пересекает плоскость P по горизонтали, а конус – по окружности, в пересечении которых и находим точки III и IV . При этом сначала находим горизонтальные проекции 3 и 4 , используя дугу окружности радиуса R , измеренного на фронтальной проекции, а затем – фронтальные проекции $3'$ и $4'$. Точки, являющиеся границей видимости кривой $V (5, 5')$ и $VI (6, 6')$ находим с помощью фронтальной плоскости R , проходящей через ось конуса и пересекающей его по контурным образующим, а плоскость P – по фронтали.

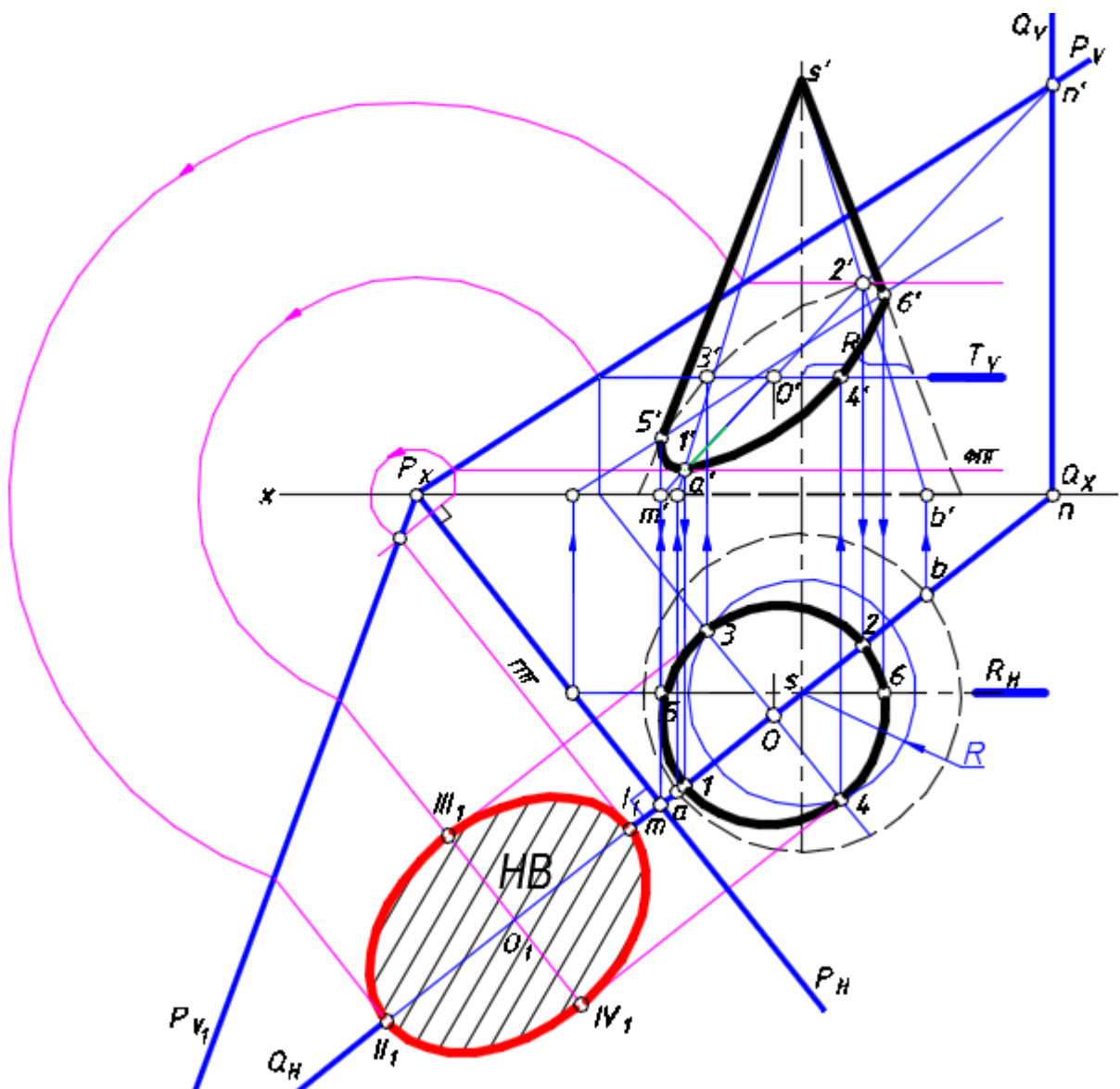


Рис. 5.12

Для точного построения проекций линии пересечения, необходимо построить еще промежуточные точки, которые могут быть определены с помощью горизонтальных плоскостей, проходящих через ось конуса.

Для построения натуральной величины фигуры сечения совмещаем плоскость P с плоскостью H , вращая ее вокруг следа P_H . В совмещенном положении строим след P_{V_1} , а затем точки I_1, II_1, III_1 и IV_1 , используя горизонтали. По этим точкам строим искомый эллипс.

3. Пересечение цилиндра плоскостью общего положения P

Боковая поверхность цилиндра пересекается плоскостью P по эллипсу (рис. 5.13). Большая ось этого эллипса пересекается с осью цилиндра и имеет направление линии наибольшего ската плоскости, а малая ось пересекается с большой в ее середине и имеет направление горизонтали плоскости.

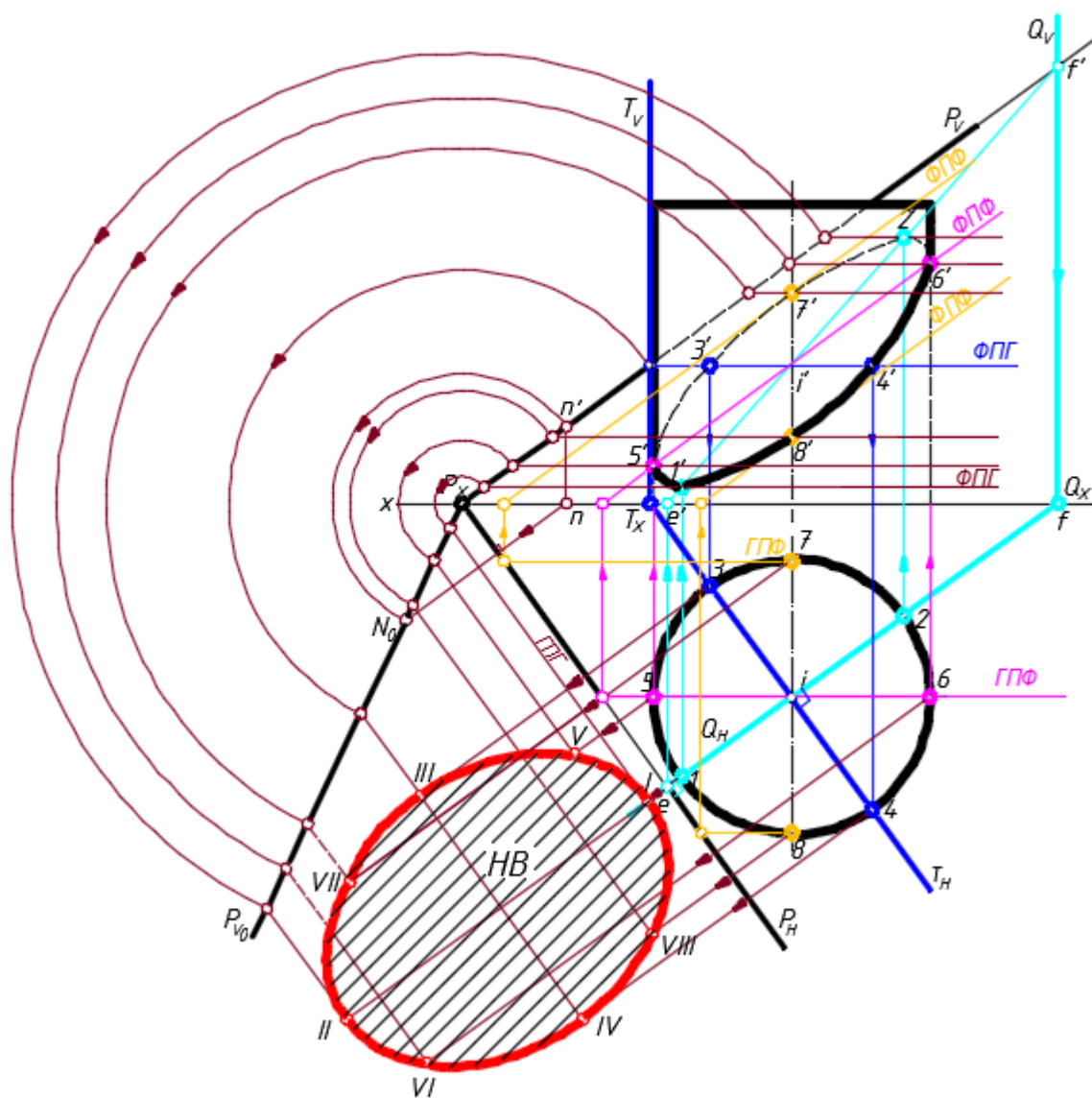


Рис. 5.13

Характерными точками будут высшая и низшая точки линии пересечения, являющиеся конечными точками большой оси эллипса, и точки, делящие линию пересечения на две части – видимую и невидимую.

Важно определить также концы малой оси эллипса, которые необходимы для построения его натуральной величины.

Для нахождения высшей и низшей точек используем горизонтально проецирующую плоскость Q , проходящую через ось цилиндра перпендикулярно к следу P_n . Эта плоскость пересекает плоскость P по линии MN ($mn, m'n'$), а поверхность цилиндра по образующим, которые в пересечении дают искомые точки I ($1, 1'$) и II ($2, 2'$). Точка O (o, o'), лежащая на середине найденной большой оси $I II$ эллипса, является его центром. Концы III ($3, 3'$) и IV ($4, 4'$) малой оси эллипса находим с помощью горизонтально проецирующей плоскости T , проходящей через центр O эллипса перпендикулярно плоскости Q . Плоскость T пересекает плоскость P по горизонтали, а цилиндр – по образующим, в пересечении которых и находим точки III и IV . Натуральная величина малой оси эллипса, как видно, равна диаметру цилиндра.

Определим теперь границы видимости фронтальной проекции кривой сечения. Точки, являющиеся границей видимости кривой, лежат на очерковых образующих. Отмечаем горизонтальные проекции этих точек (5 и 6) и находим фронтальные проекции ($5'$ и $6'$), проведя через эти точки фронталь плоскости P .

Характерные точки VII ($7, 7'$) и $VIII$ ($8, 8'$) находим аналогично точкам V и VI .

Для построения натуральной величины сечения совмещаем плоскость P с плоскостью H , вращая ее вокруг следа P_n . В совмещенном положении строим след P_{v1} , а затем точки $I_1, II_1, III_1, \dots, VIII_1$, используя горизонталь плоскости P . По этим точкам строим искомый эллипс.

1.5.5. Пересечение прямой линии с поверхностями вращения

Этапы решения задачи на пересечение прямой линии с поверхностью рассмотрены в § 1.3.6.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость. Однако в отдельных случаях следует применять плоскость общего положения с тем, чтобы проекции сечения имели графически простую форму – прямые линии или окружности. В случаях пересечения прямой линии с цилиндрической поверхностью можно использовать преобразование этой поверхности в проецирующую.

При пересечении кривой поверхности вспомогательной плоскостью в общем случае образуется кривая линия, в частном случае – прямая или ломаная (линейчатые поверхности).

1. Пересечение прямой линии с поверхностью прямого цилиндра

В некоторых частных случаях можно обойтись без применения вспомогательной плоскости. Например, точки входа и выхода прямой AB с поверхностью прямого кругового цилиндра (рис. 5.14) определяют следующим образом.

Горизонтальная проекция цилиндрической поверхности представляет собой окружность, поэтому горизонтальные проекции всех точек, расположенных на цилиндрической поверхности, в том числе и двух искомых точек, будут расположены на этой окружности.

Фронтальные проекции n' и m' искомых точек определяют, проводя через точки n и m вертикальные линии связи до встречи с фронтальной проекцией $a'b'$ прямой AB .

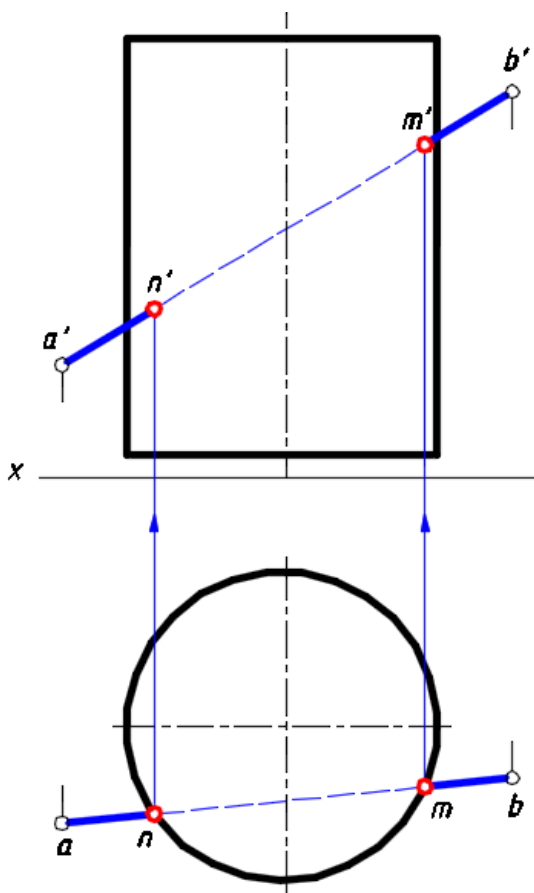


Рис. 5.14

2. Пересечение прямой линии с конической поверхностью

На рис. 5.15, а, б показано построение точек пересечения прямой AB и поверхности прямого кругового конуса. Через прямую AB проводят вспомогательную плоскость P , проходящую через вершину конуса. Плоскость P пересечет конус по образующим SI и SII .

На эпюре (рис. 5.15, б) плоскость P строят следующим образом. На прямой AB берут произвольную точку K и соединяют ее с вершиной S конуса прямой линией. Две пересекающиеся прямые AB и SK определяют плоскость P .

Определив горизонтальные следы $M_1 (m_1, m'_1)$ и $M_2 (m_2, m'_2)$ прямых AB и SK строим след P_H вспомогательной плоскости P .

Горизонтальная проекция основания конуса (окружность) пересекается со следом P_H в точках 1 и 2. Эти точки соединяют с проекцией вершины s и получают сечение $ISII$.

Горизонтальные проекции точек пересечения e и f находят на пересечении горизонтальных проекций образующих $s1$ и $s2$ с горизонтальной проекцией прямой ab . Через точки e и f проводят вертикальные линии связи до пересечения с $a'b'$ и находят фронтальные проекции e' и f' точек входа и выхода.

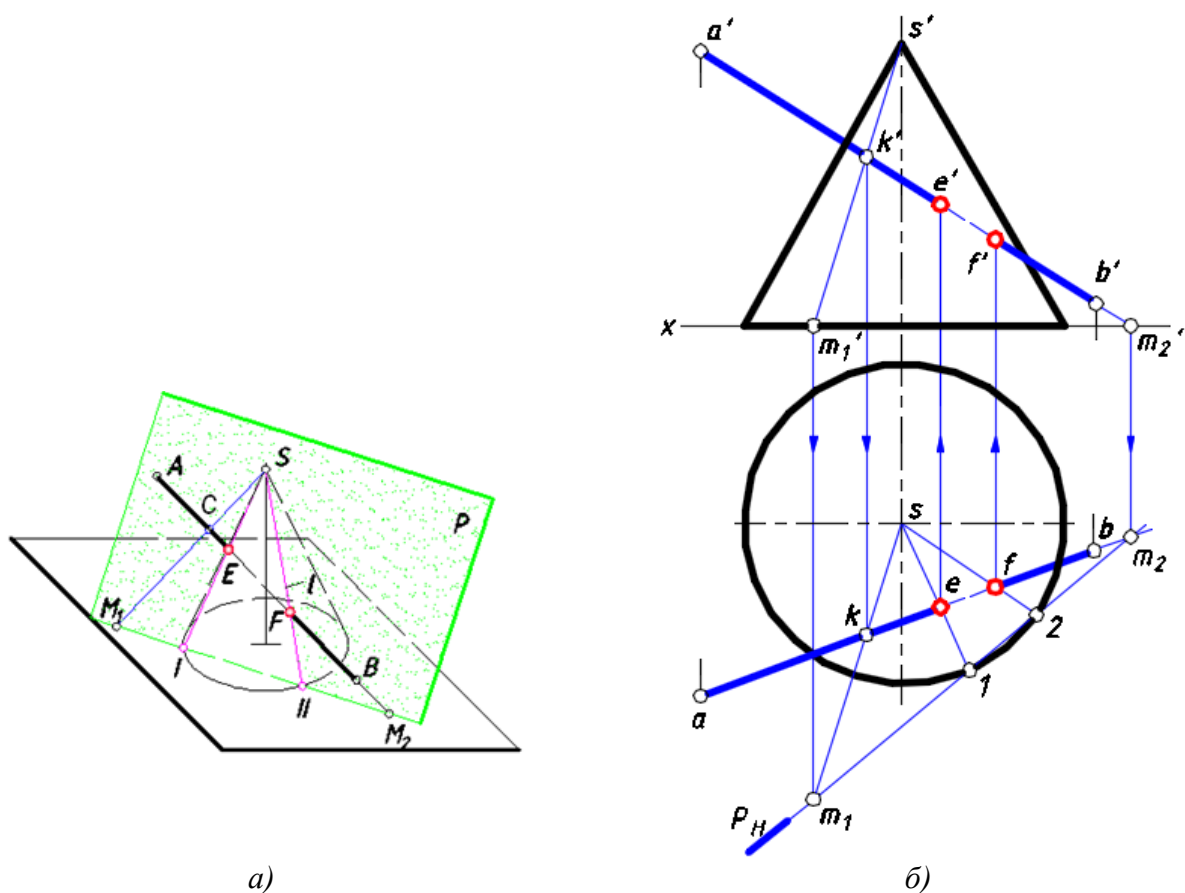


Рис. 5.15

2. Пересечение прямой линии с поверхностью наклонного цилиндра

Для определения точек пересечения $K_1 (k_1, k'_1)$ и $K_2 (k_2, k'_2)$ в этом случае также более целесообразно провести вспомогательную плоскость общего положения так, чтобы она пересекала цилиндр по его образующим (рис. 5.16). Для этого проводим ее через заданную прямую AB и дополнительную прямую $BM_1 (bm_1 b'm'_1)$, проходящую через одну из точек прямой AB параллельно образующим цилиндра. Определив горизонтальные следы $M (m, m')$ и $M_1 (m_1, m'_1)$ прямых AB и BM_1 строим след Q_H вспомогательной плоскости Q .

Точки $I(1, 1')$ и $II(2, 2')$ пересечения следа Q_H с окружностью основания определяют образующие, по которым цилиндр пересекается плоскостью Q . Искомые точки K_1 и K_2 находятся на пересечении этих образующих с заданной прямой.

Невидимыми на плоскостях проекций являются проекции отрезка K_1K_2 прямой AB . О видимости части прямой, находящейся за пределами этого отрезка, но в пределах контура цилиндра на той и другой проекциях можно судить по видимости точек K_1 и K_2 . Точка K_1 принадлежит образующей, проходящей через точку $I(1, 1')$ окружности основания цилиндра. Эта образующая лежит на сторонах поверхности, обращенных к зрителю, и поэтому точка K_1 и примыкающая к ней часть прямой видима на обеих проекциях. Точка K_2 принадлежит образующей $II(2, 2')$, лежащей на ближних к плоскостям V и H половинах поверхности цилиндра, поэтому точка K_2 и примыкающая к ней часть прямой невидимы на обеих проекциях.

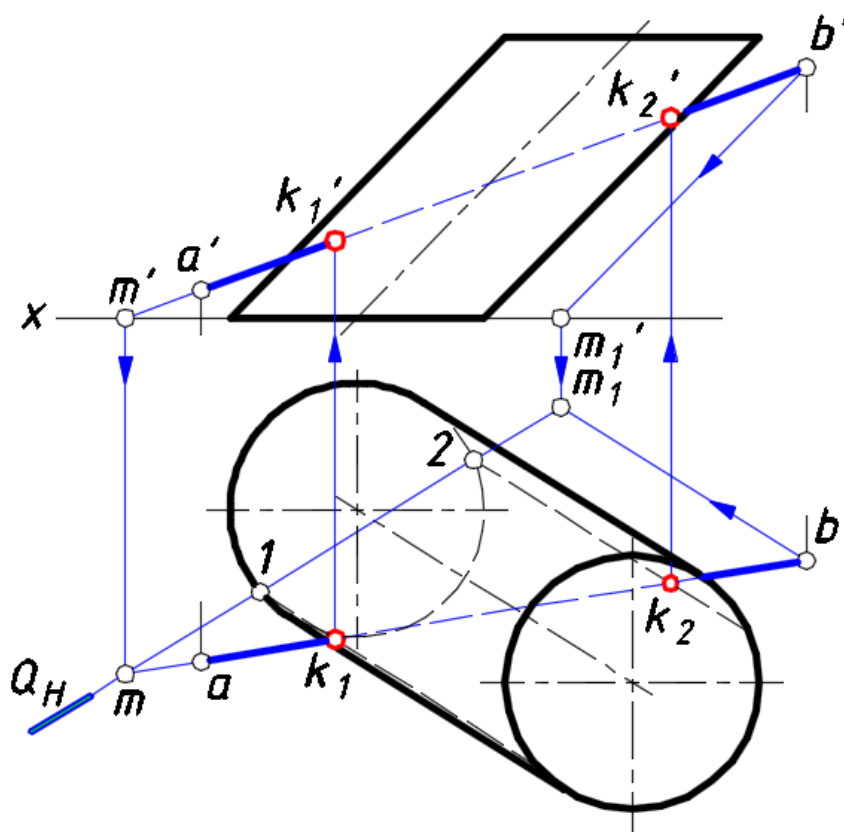


Рис. 5.16

3. Пересечение прямой линии с поверхностью сферы

Точки входа и выхода прямой AB с поверхностью сферы (рис. 5.17) находят, проводя через заданную прямую вспомогательную фронтально проецирующую плоскость P .

Вспомогательная плоскость P пересекает сферу по окружности, которая проецируется на плоскость H в виде эллипса, что затрудняет построение. Поэтому в данном случае необходимо применить способ замены плоскостей проекций. Новую плоскость проекций выбирают так, чтобы вспомогательная плоскость P была бы ей параллельна, т.е. следует провести новую ось проекций x_1 так, чтобы она была параллельна фронтальной проекции $a'b'$ прямой AB (для упрощения построений на рис. 5.17 ось x_1 проведена через проекцию $a'b'$).

Затем необходимо построить новую горизонтальную проекцию a_1b_1 прямой AB и новую горизонтальную проекцию окружности диаметра D , по которой плоскость P пересекает сферу. На пересечении новых горизонтальных проекций прямой AB и окружности отмечают две искомые точки m_1 и n_1 . Обратным построением определяем фронтальные m' и n' и горизонтальные m и n проекции точек входа и выхода.

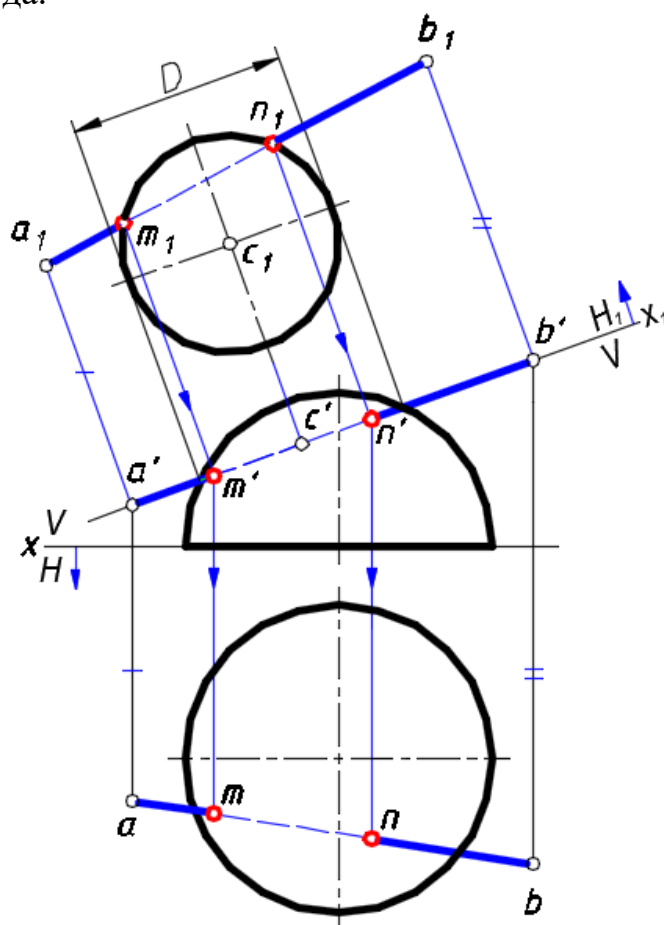


Рис. 5.17

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как строится линия пересечения многогранника плоскостью?
2. Как определяется на эюре натуральная величина сечения?
3. Что представляет собой сечение?

4. Как строится линия пересечения двух многогранников?
5. В чем состоит способ построения точек пересечения прямой линии с многогранником?
6. Что представляет собой сечение?
7. Как строится линия пересечения поверхностей плоскостью?
8. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового цилиндра, конуса, сферы?
9. Как определяется на эюре натуральная величина сечения?
10. Как следует провести вспомогательную секущую плоскость при пересечении конуса прямой линией, чтобы получить на поверхности конуса прямые линии?
11. Почему при построении точек пересечения прямой линии с поверхностью сферы использовали способ замены плоскостей проекций?