

1.4. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

1.4.1. Способы образования поверхностей. Каркас поверхности

В начертательной геометрии наиболее широкое применение получил *кинематический* способ образования поверхностей.

Поверхность – непрерывное множество последовательных положений некоторой линии, называемой образующей, перемещающейся в пространстве вдоль другой линии (направляющей) по определенному закону.

Некоторые поверхности образуются движением линий постоянной формы (поверхности с постоянной образующей), другие же так, что образующая вместе с изменением положения в пространстве изменяет и свою форму (поверхности с переменной образующей).

На поверхностях можно выделить семейство направляющих и семейство образующих (рис. 4.1).

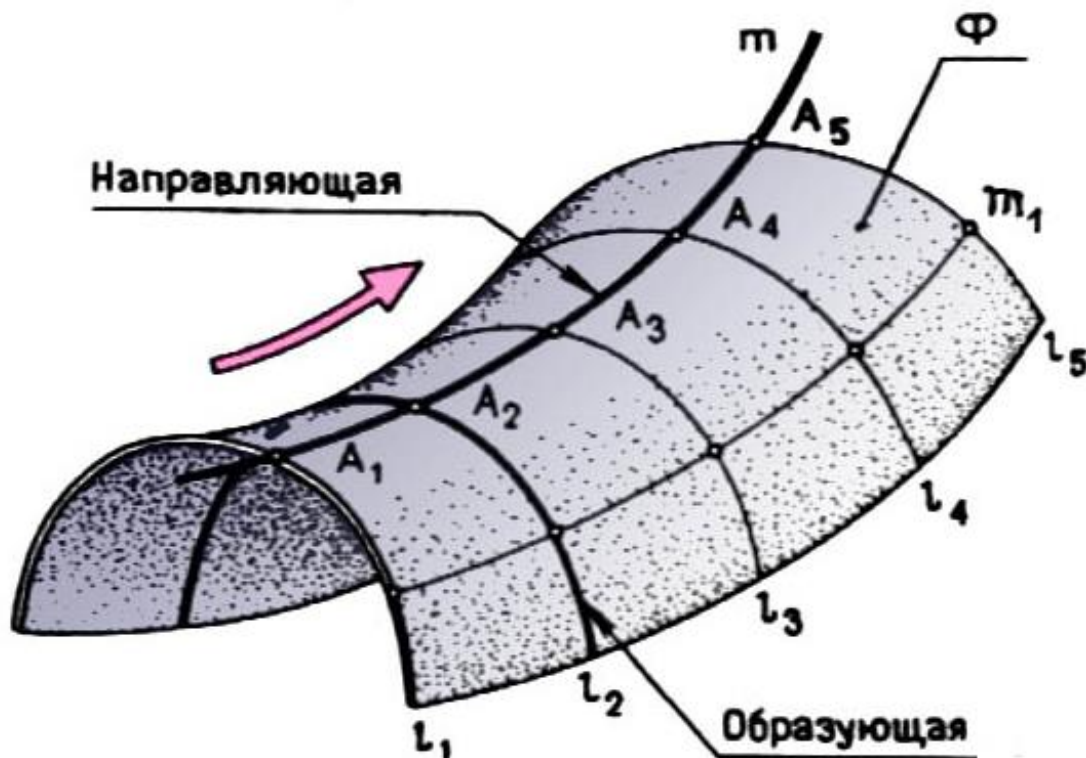


Рис. 4.1

Каркас поверхности – множество точек или линий, принадлежащих поверхности и объединенных каким-либо общим признаком.

Следовательно, каждая кинематическая поверхность имеет два каркаса: направляющих и образующих. Эти каркасы образуют каркасную сеть.

Обычно каркасом задают поверхности, образование которых подчинено сложному геометрическому закону. Каркас может быть линейным и точечным.

Точечным каркасом поверхности называют совокупность точек на поверхности, выбранных таким образом, что, ориентируясь по ним, можно достаточно полно представить вид и форму поверхности во всех ее частях. Точки можно выбрать или изолированными друг от друга, или же связать их между собой прямыми линиями (рис. 4.2).

Линейным каркасом поверхности называют совокупности намеченных на поверхности линий.

Пользуясь точечными и линейными каркасами поверхностей можно построить модели поверхностей. На рис. 4.3 показана модель каркаса поверхности, заданной двумя семействами линий $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots$ и $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, \dots$.

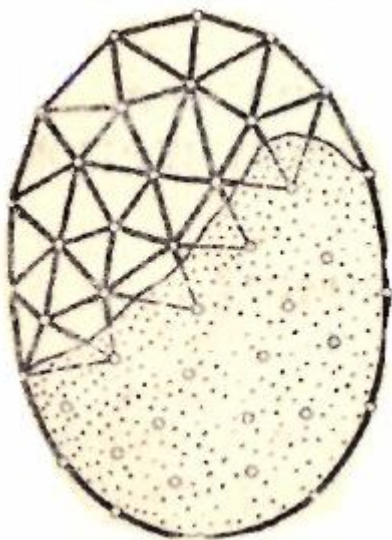


Рис. 4.2

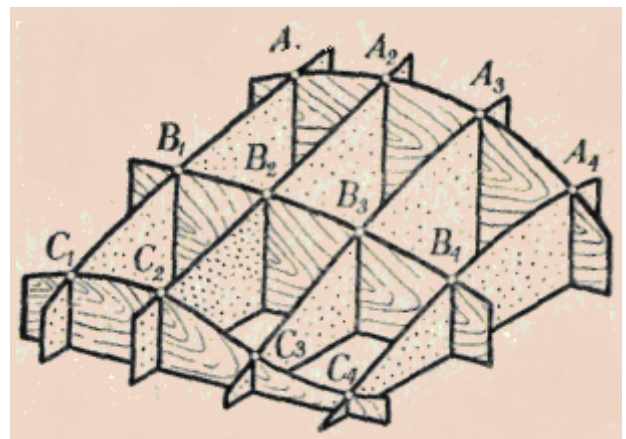


Рис. 4.3

Такой способ задания поверхности применяют при изготовлении кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении и т. п. Линейным каркасом задают и топографические поверхности.

1.4.2. Способы задания поверхностей

а) Аналитический способ задания поверхностей

В этом случае поверхность рассматривается как геометрическое множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению.

Поверхность называется *алгебраической n -го порядка*, если ее уравнение $F(x, y, z) = 0$ – алгебраическое уравнение n -й степени.

В частности, плоскость выражается уравнением первой степени, и ее можно назвать поверхностью первого порядка. Поверхность n -го порядка можно геометрически определить как поверхность, пересекающуюся с произвольной плоскостью по кривой того же порядка, или как поверхность, пересекаемую произвольной прямой, не принадлежащей ей целиком, в n точках.

б) Графические способы задания поверхностей

Определитель поверхности

Определитель поверхности – совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже (рис. 4.4, а).

Определитель поверхности включает в себя:

- геометрические элементы поверхности (*геометрическая часть*);
- соотношение между ними (взаиморасположение элементов, условие перемещения одного элемента относительно другого, закон изменения образующей – для поверхностей с переменной образующей и т. д.). Эта часть определителя поверхности называется *алгоритмической*. Соотношение элементов может быть задано аналитически, в словесной форме, чертежом.

Одна и та же поверхность может иметь несколько различных определителей. Выбирают тот из них, который по каким-либо признакам удобнее в каждом конкретном случае.

Например, поверхность прямого кругового цилиндра может быть образована вращением прямолинейной образующей l вокруг параллельной ей оси i . Но эта же поверхность может быть образована поступательным перемещением окружности постоянного радиуса вдоль прямой линии (оси) таким образом, что ее центр всегда принадлежит оси.

Изобразить поверхность можно проекциями геометрической части ее определителя. Такое изображение обеспечивает обратимость чертежа, но не является наглядным, и затрудняет чтение чертежа. Поэтому для получения

наглядного изображения поверхности на чертеже следует показывать очерк (очертание) этой поверхности.

Очерк поверхности

Очерк поверхности – проекция контура видимости поверхности при ее проецировании по заданному направлению (рис. 4.4, б).

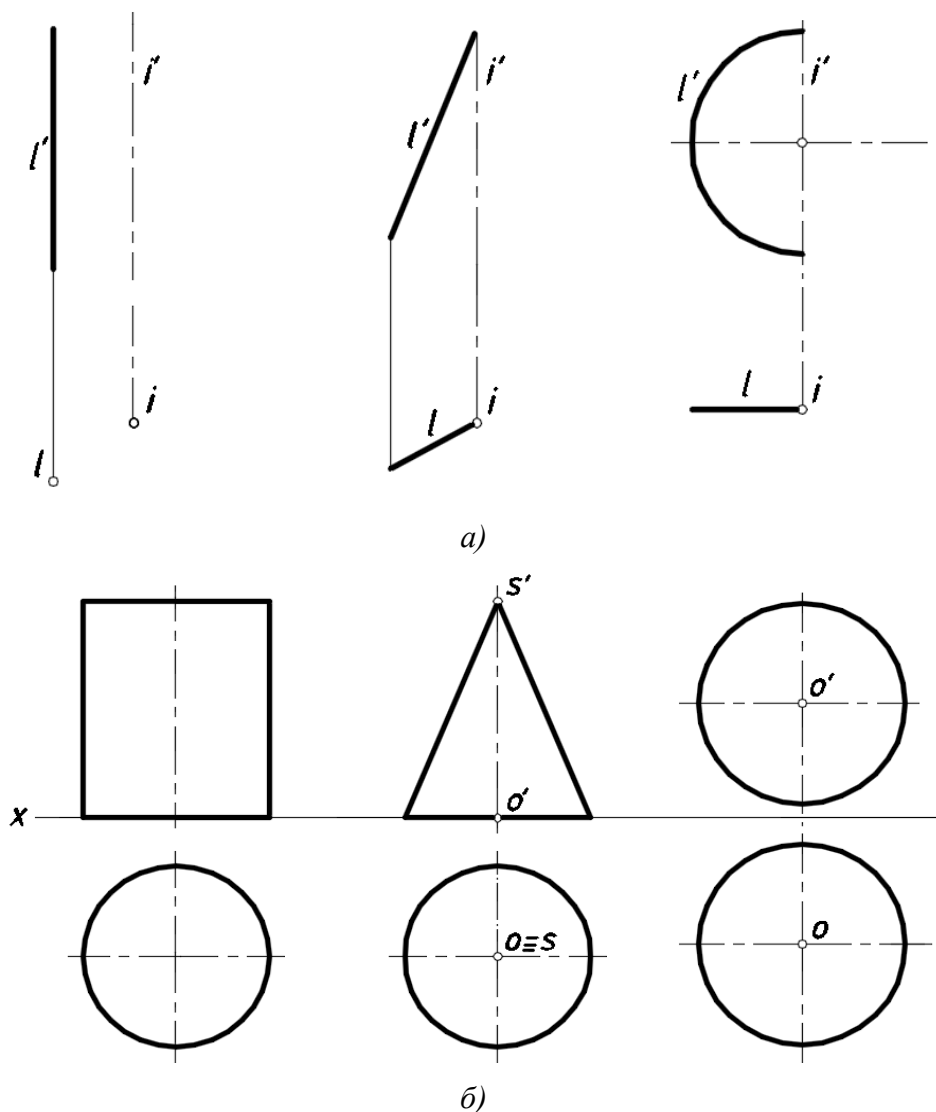


Рис. 4.4

Так, например, очерк прямого кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, на главном виде ограничен проекциями крайних образующих (представляет прямоугольник), а на виде сверху – проекцией основания (представляет окружность).

1.4.3. Классификация поверхностей

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для облегчения процесса изучения поверхностей целесообразно осуществить их систематизацию. Из большого числа возможных признаков классификации остановимся на двух главных – по виду образующей и закону ее перемещения.

По *виду образующей* различают поверхности:

1. линейчатые, образующая – прямая линия;
2. нелинейчатые, образующая – кривая линия.

По *закону перемещения образующей* различают:

1. поверхности параллельного переноса (образованные поступательным перемещением образующей);
2. поверхности вращения (образованные вращением образующей вокруг оси);
3. винтовые поверхности (образованные винтовым перемещением образующей).

Очевидно, что некоторые поверхности могут быть отнесены одновременно к различным типам. Например, поверхность прямого кругового цилиндра является одновременно линейчатой и поверхностью вращения.

а) Поверхности параллельного переноса.

Поверхность параллельного переноса – это поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей – плоской кривой линии l по криволинейной направляющей n .

При поступательном движении все точки образующей перемещаются по параллельным кривым на некоторое одинаковое расстояние путем параллельного переноса (рис. 4.5). На проекционном чертеже поверхность переноса задается формой образующей и начальным ее положением l_1 , направлением параллельного переноса – формой и положением направляющей n . Поверхность параллельного переноса может быть образована и другим способом. Ряд положений образующей и параллельные линии перемещения отдельных ее точек создают *линейный каркас* поверхности.

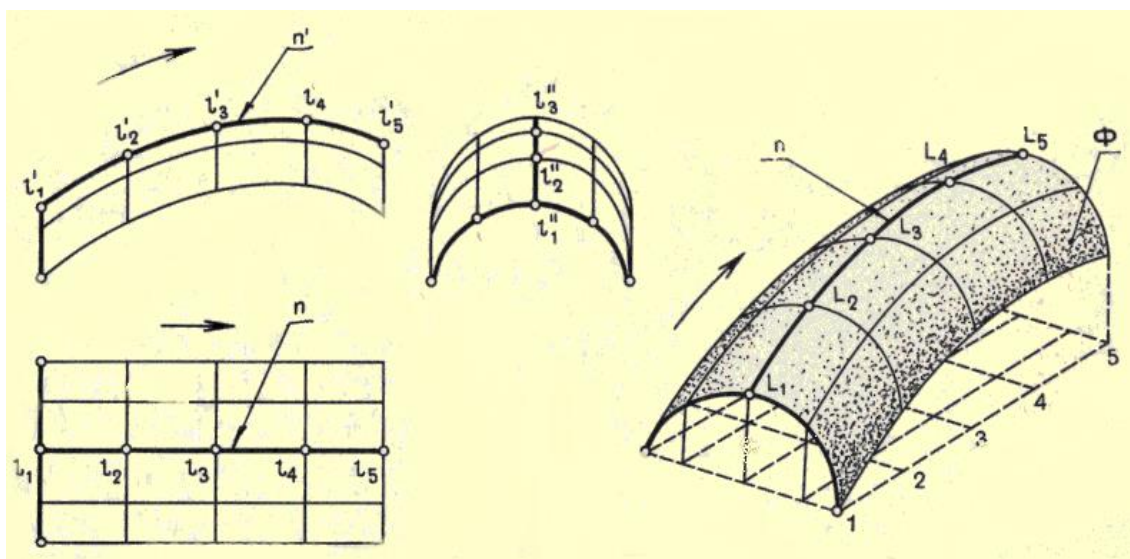


Рис. 4.5

б) Поверхности вращения

Поверхность вращения общего вида – это поверхность, образованная произвольной кривой (образующей l) при ее вращении вокруг неподвижной оси i .

Следовательно, геометрическая часть определителя включает в себя образующую l и ось вращения i .

Каждая точка образующей (A, B, C, D) при вращении вокруг оси описывает окружность с центром на оси (рис. 4.6). Эти окружности (различных или одинаковых диаметров) называются *параллелями* поверхности.

Наименьшая параллель называется *горлом*, наибольшая параллель – *экватором*. Поверхность вращения в зависимости от формы образующей может иметь несколько горл и несколько экваторов или не иметь ни одного горла.

Плоскости, проходящие через ось вращения, называются *меридиональными* (Q). Линии их пересечения с поверхностью называются *меридианами*.

Меридиональная плоскость (Q_v), параллельная плоскости проекций, называется *главной меридиональной плоскостью*, а линия ее пересечения с поверхностью вращения – *главным меридианом*. Он проецируется в истинную величину и определяет очерк поверхности. Через ось вращения можно провести бесчисленное множество меридиональных плоскостей, т. е. получить бесчисленное множество меридианов.

Вид поверхности вращения зависит от формы образующей и ее положения относительно оси вращения. Рассмотрим некоторые поверхности вращения.

Сфера. Поверхность сферы образуется вращением окружности вокруг диаметра (рис. 4.7).

Поверхность вращения общего вида – это поверхность, образованная произвольной кривой (образующей l) при ее вращении вокруг неподвижной оси i .



Рис. 4.6

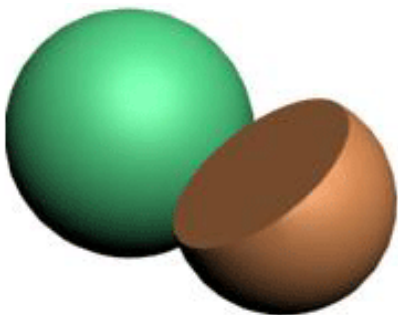


Рис. 4.7

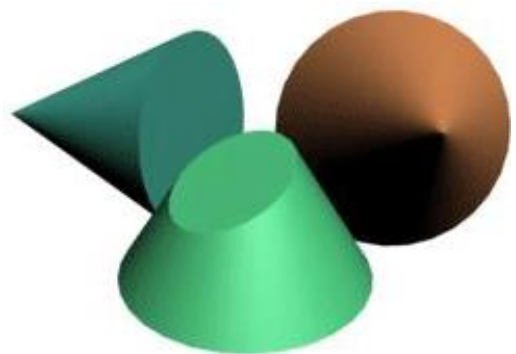


Рис. 4.8

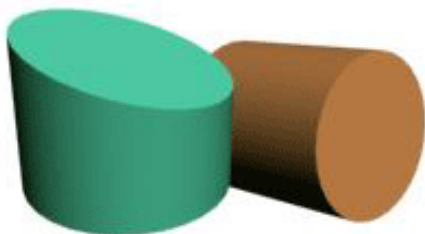


Рис. 4.9

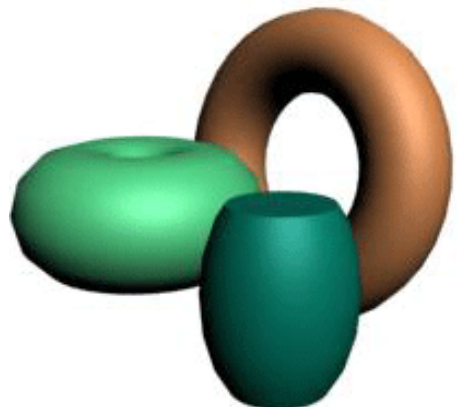


Рис. 4.10

Коническая поверхность вращения образуется вращением прямой l вокруг пересекающей ее прямой – оси i . Эту поверхность называют еще конусом вращения или прямым круговым конусом (рис. 4.8).

Цилиндрическая поверхность вращения образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i . Эту поверхность называют еще цилиндром или прямым круговым цилиндром (рис. 4.9).

Тор. Поверхность тора образуется вращением окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности (рис. 4.10). Если окружность не пересекает ось вращения, поверхность называется *открытым тором* или *кольцом*. Если ось касается окружности, то поверхность называют *закрытым тором*, а если ось пересекает окружность, тор *называют самопересекающимся*.

в) Винтовые поверхности

Винтовая поверхность – это поверхность, образованная винтовым перемещением образующей линии.

Винтовое перемещение представляет собой совокупность двух движений образующей – поступательного перемещения вдоль оси поверхности и вращательного вокруг оси.

Если образующая – прямая линия, винтовую поверхность называют *геликоидом*. Геликоид называют *прямым*, если образующая составляет с осью поверхности прямой угол (рис. 4.11); в других случаях геликоид называют *наклонным* (рис. 4.12).

Если образующая пересекается с осью поверхности, геликоид называют *закрытым*, если не пересекается – геликоид называют *открытым*.

На рис. 4.12 изображены проекции наклонного закрытого геликоида, сечение этой поверхности горизонтальной плоскостью, перпендикулярной оси, дает спираль Архимеда.

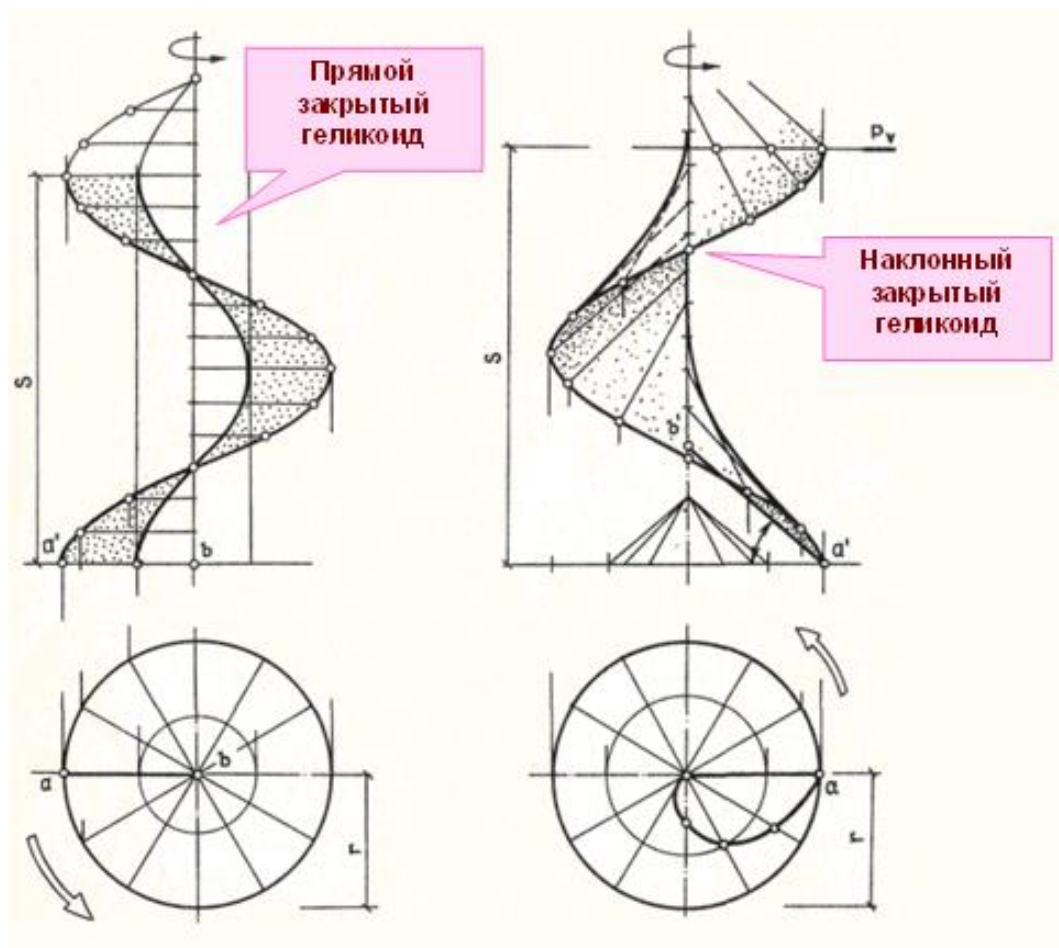


Рис. 4.11

Рис. 4.12

г) Поверхности с плоскостью параллелизма

Поверхности с плоскостью параллелизма образуются перемещением прямолинейной образующей по двум, не лежащим в одной плоскости направляющим, при условии, что образующая во всех своих положениях остается параллельной некоторой плоскости Π , называемой плоскостью параллелизма.

Цилиндроид. Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l по двум направляющим кривым линиям m и n , при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма Π (рис. 4.13, а).

Коноид. Коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l по двум направляющим, одна из которых кривая линия m , а другая – прямая n , при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма Π (рис. 4.13, б).

Гиперболический параболоид. Гиперболическим параболоидом или косой плоскостью называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l по двум направляющим линиям – скрещивающимся прямым m и n , при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма Π (рис. 4.13, в).

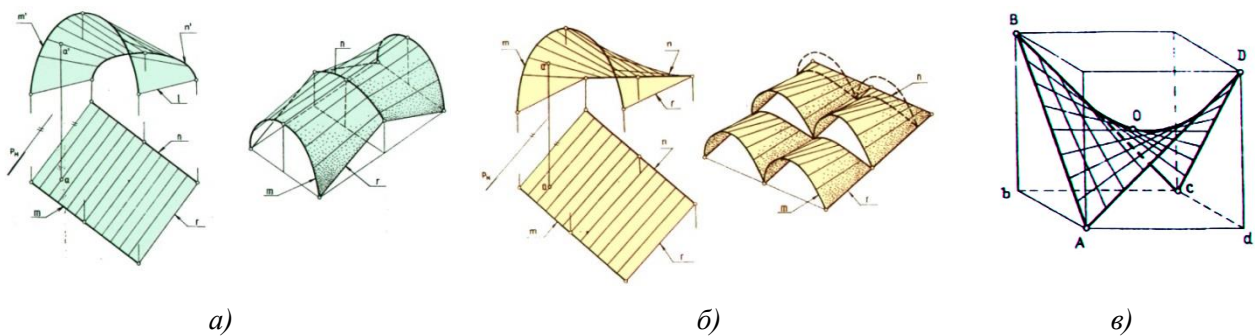


Рис. 4.13

1.4.4. Построение недостающих проекций точек, принадлежащих поверхностям вращения

Для того чтобы на эюре поверхности построить проекции принадлежащей ей точки, необходимо вначале построить проекцию какой-либо линии, принадлежащей поверхности и проходящей через заданную проекцию точки. Затем строят вторую проекцию линии и находят на ней недостающую проекцию искомой точки.

В качестве вспомогательных надо использовать простые и удобные для построения линии: окружности и прямые. Следовательно, для линейчатых поверхностей вращения можно использовать каркасные линии – параллели и образующие. Для нелинейчатых – только параллели.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Прямой круговой цилиндр. Занимает проецирующее положение, на виде сверху вся боковая поверхность цилиндра спроецировалась в линию (окружность). Все параллели цилиндра проецируются в эту окружность. По заданным фронтальным проекциям точек A и B их горизонтальные проекции определяются как точки пересечения линии проекционной связи с окружностью в соответствующих местах (в зависимости от расположения точки на цилиндре). Невидимые точки изображаются заключенными в круглые скобки (рис. 4.14).

2. Прямой круговой конус. Если на поверхности конуса задана одна проекция точки A (например, фронтальная проекция на рис. 4.15), то горизонтальную проекцию этой точки определяют с помощью вспомогательных линий – образующей, расположенной на поверхности конуса и проведенной через точку A (рис. 4.15, а), или окружности, расположенной в плоскости, параллельной основанию конуса (рис. 4.15, б).

В первом случае проводят фронтальную проекцию $s'a'e'$ вспомогательной образующей. Пользуясь вертикальной линией связи, проведенной из точки e' , расположенной на фронтальной проекции окружности основания, находят горизонтальную проекцию se этой образующей, на которой с помощью линии связи, проходящей через a' , находят искомую точку a .

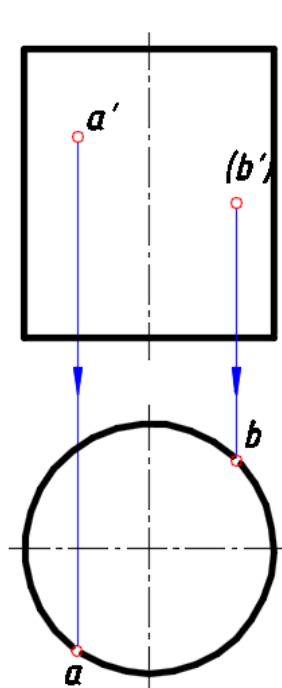
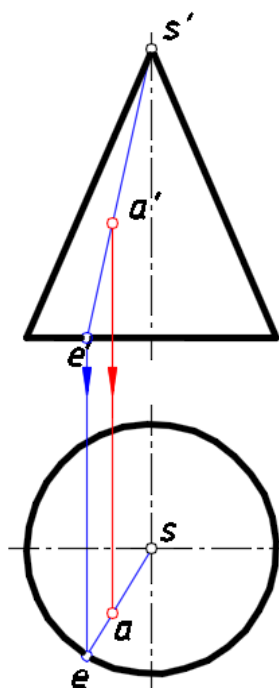
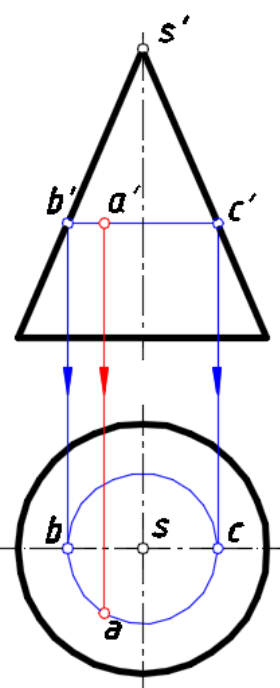


Рис. 4.14



а)



б)

Рис. 4.15

Во втором случае вспомогательной линией, проходящей через точку A , будет окружность, расположенная на конической поверхности и параллельная плоскости H . Фронтальная проекция этой окружности изображается в виде отрезка $b'c'$ горизонтальной прямой, величина которого равна диаметру вспомогательной окружности. Искомая горизонтальная проекция a точки A находится на пересечении линии связи, опущенной из точки a' , с горизонтальной проекцией вспомогательной окружности.

Если заданная фронтальная проекция b' точки B расположена на контурной (очерковой) образующей, то горизонтальная проекция точки находится без вспомогательных линий (рис. 4.15, б).

3. Сфера. Это нелинейчатая поверхность вращения. Поэтому для построения недостающих проекций точек надо использовать параллели (рис. 4.16).

4. Тор. Если задана фронтальная проекция a' точки A , лежащей на видимой части поверхности тора, то для нахождения ее горизонтальной проекции через a' проводят фронтальную проекцию вспомогательной окружности – отрезок горизонтальной прямой $k'l'$. Затем строят горизонтальную проекцию kl этой окружности и на ней, применяя линию связи, находят точку a (рис. 4.17).

Если задана горизонтальная проекция b точки B , расположенной на поверхности этого тора, то для нахождения фронтальной проекции точки B через b проводят горизонтальную проекцию вспомогательной окружности радиуса Ob . Затем через левую и правую точки mn этой окружности проводят вертикальные линии связи до пересечения с фронтальными проекциями образующей окружности радиуса R и получают точки m' и n' . Эти точки соединяют горизонтальной

прямой, которая представляет собой фронтальную проекцию вспомогательной окружности. Проведя вертикальную линию связи из точки b до пересечения с прямой $m'n'$ получаем искомую точку b' .

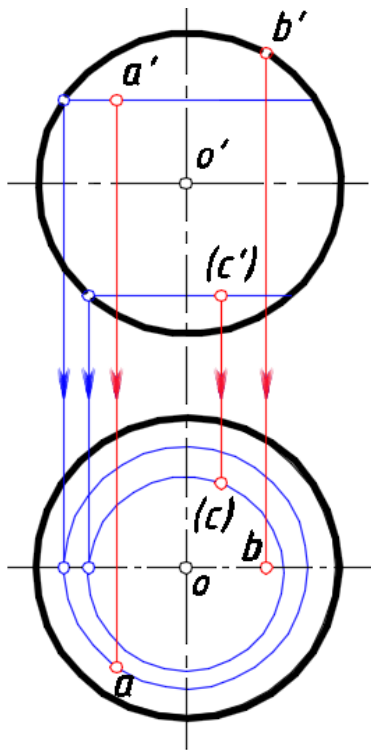


Рис. 4.16

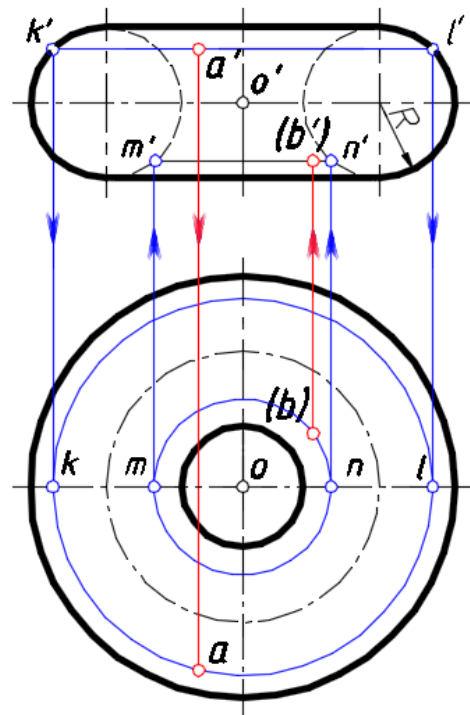


Рис. 4.17

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит сущность кинематического способа образования поверхностей?
2. В чем различие между линейчатой и нелinearчатой поверхностями?
3. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма?
4. Какие поверхности называются поверхностями вращения? Какими свойствами они обладают?
5. Какие вы знаете поверхности вращения?
6. Что называется параллелями и меридианами на поверхности вращения, экватором, горлом, главным меридианом?
7. Как образуются прямой и наклонный геликоиды?
8. Какими приемами определяют недостающие проекции точек, лежащих на поверхности конуса, сферы и тора?