1.2. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

1.2.1. Взаимное расположение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекающимися. Частным случаем пересекающихся плоскостей являются взаимно перпендикулярные плоскости.

Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны между собой, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой.

Поэтому чтобы построить параллельные плоскости на эпюре, достаточно построить две такие пары пересекающихся прямых. На эпюре (рис. 2.1) показаны две параллельные плоскости, заданные двумя парами пересекающихся прямых, проходящих через точки A (a, a') и B (b, b').

Если параллельные плоскости задаются на эпюре следами, то одноименные следы этих плоскостей должны быть параллельными (рис. 2.2).

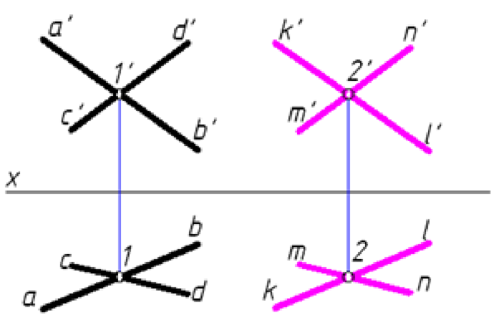


Рис. 2.1

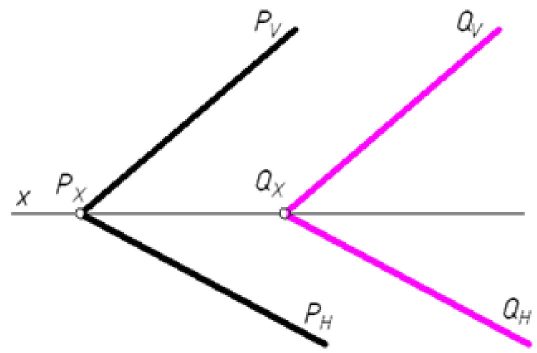


Рис. 2.2

Задача. Построить плоскость S (S_H, S_V), параллельную плоскости P и отстоящую от нее на три масштабные единицы.

На натуральной величине перпендикуляра AK (рис. 2.3) откладываем от точки k три масштабные единицы - получаем точку III_0. Опустив из этой точки перпендикуляр на горизонтальную проекцию отрезка ak, получим точку 3, а затем в проекционной связи точку $3'$ на фронтальной проекции перпендикуляра $a'k'$. Проводим через точку (3, $3'$) горизонталь искомой плоскости S параллельно произвольной горизонтали плоскости P. Ее горизонтальная проекция должна проходить через точку 3, параллельно следу P_H, а фронтальная проекция - через точку $3'$ параллельно оси проекций. Найдя фронтальный след этой горизонтали $N_1 \equiv n_1'$ проводим следы искомой плоскости: сначала фронтальный след S_V через точку $N_1 \equiv n_1'$, параллельно следу P_V до пересечения с осью проекций в точке S_X, а затем через эту точку - горизонтальный след S_H, параллельно следу P_H.

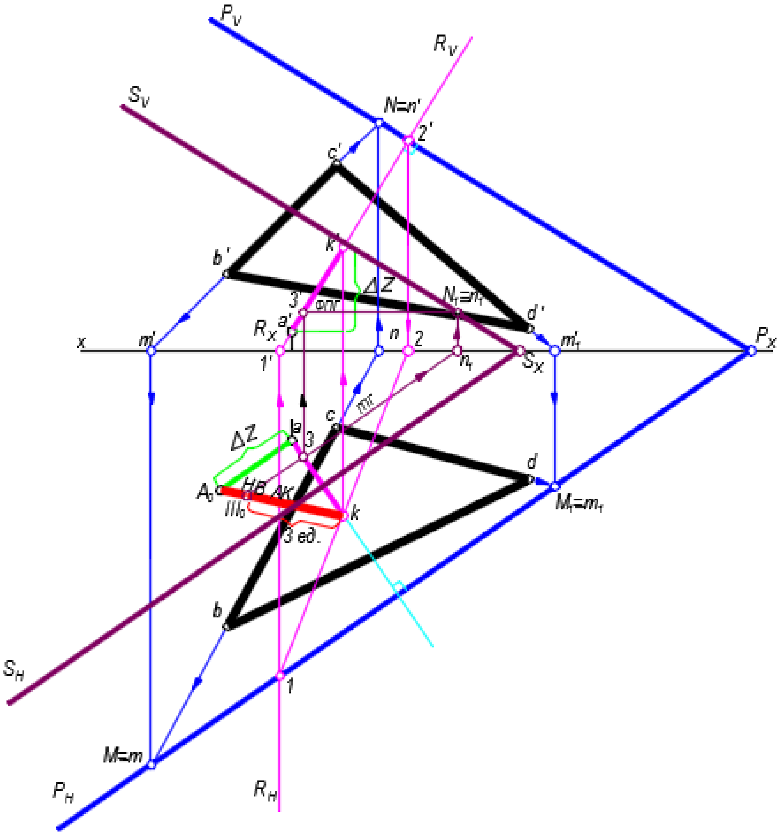


Рис. 2.3

Пересекающиеся плоскости

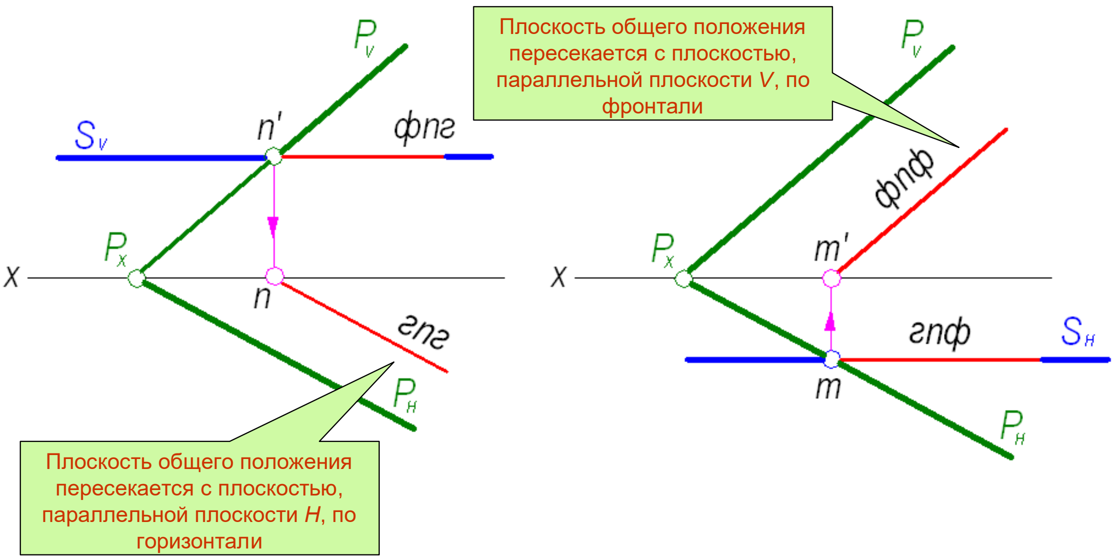
Построение линии пересечения плоскостей является одной из основных задач начертательной геометрии.

Две плоскости пересекаются по прямой линии.

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо определить две точки этой прямой или одну точку и направление этой прямой.

Если одна из пересекающихся плоскостей является плоскостью уровня, то одна из проекций линии пересечения совпадает с соответствующим следом плоскости S, а вторая находится как вторая проекция линии уровня (рис. 2.4).

1. Одна из пересекающихся плоскостей является плоскостью уровня



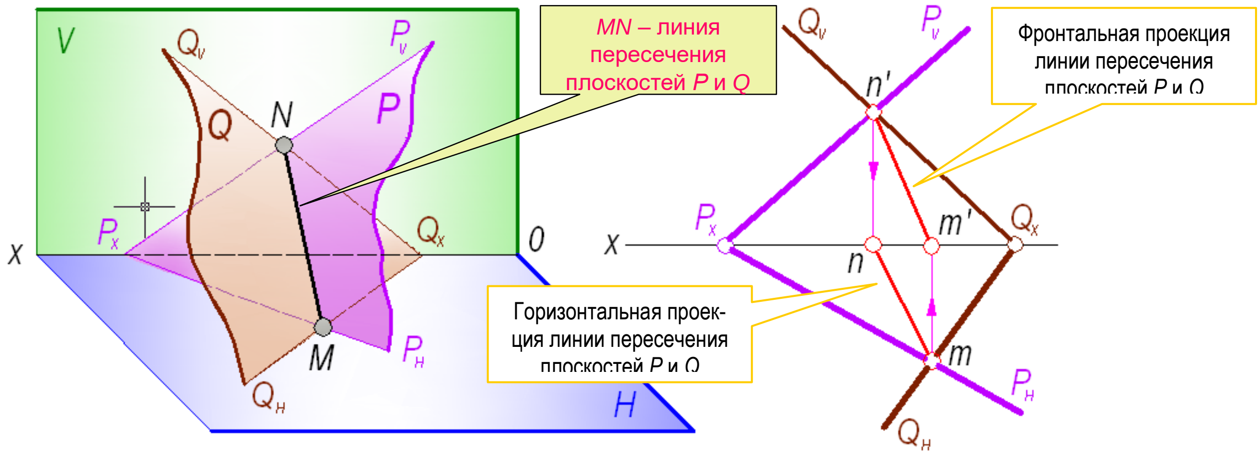
Алгоритм решения задачи :

Чтобы построить прямую пересечения двух плоскостей *P* и *S*, необходимо найти точку пересечения этих плоскостей и направление прямой.

Рис. 2.4

Рассмотрим общий случай пересечения, когда обе плоскости – общего положения. На рис. 2.5 приведены две плоскости, заданные следами. Общими точками плоскостей являются точки пересечения M и N одноименных следов, соединяя одноименные проекции этих точек m и n, m' и n' прямой линией, получим проекции линии пересечения плоскостей.

2. Плоскости общего положения *P* и *Q* заданы следами



Алгоритм решения задачи :

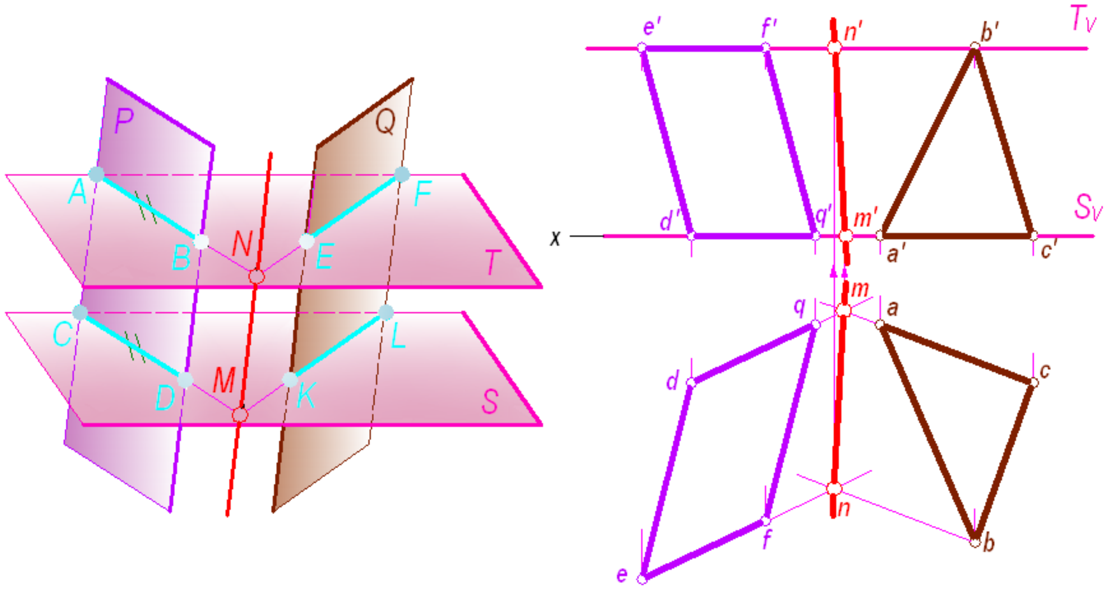
Чтобы построить прямую пересечения двух плоскостей *P* и *Q*, необходимо найти две точки, о б щ и е для пересекающихся плоскостей.

Рис. 2.5

На рис. 2.6 показаны две плоскости общего положения, заданные треугольником и четырехугольником. Для определения двух общих точек линии пересечения плоскостей проводим две вспомогательные (горизонтальные) плоскости уровня S_1 и S_2. Вспомогательная плоскость S_1 пересекает заданные плоскости по двум горизонталям *cd* и *kl*, которые в своем пересечении определяют точку *M*, общую для плоскостей *P* и Q, так как они одновременно принадлежат вспомогательной секущей плоскости S_1. Вторая вспомогательная плоскость S_2 также пересекает каждую из заданных плоскостей по горизонталям *ab* и *ef*, которые параллельны первым двум горизонталям. В пересечении горизонталей получим вторую общую точку *N* заданных плоскостей. Соединяя на эпюре одноименные проекции этих точек, получим проекции линии пересечения плоскостей.

Если точки пересечения одноименных следов находятся вне поля чертежа, а также в тех случаях, когда плоскости заданы не следами, а другими геометрическими элементами, то для определения линии пересечения плоскостей следует использовать вспомогательные плоскости уровня - горизонтальные или фронтальные (рис. 2.7).

3. Две плоскости общего положения. Общий случай

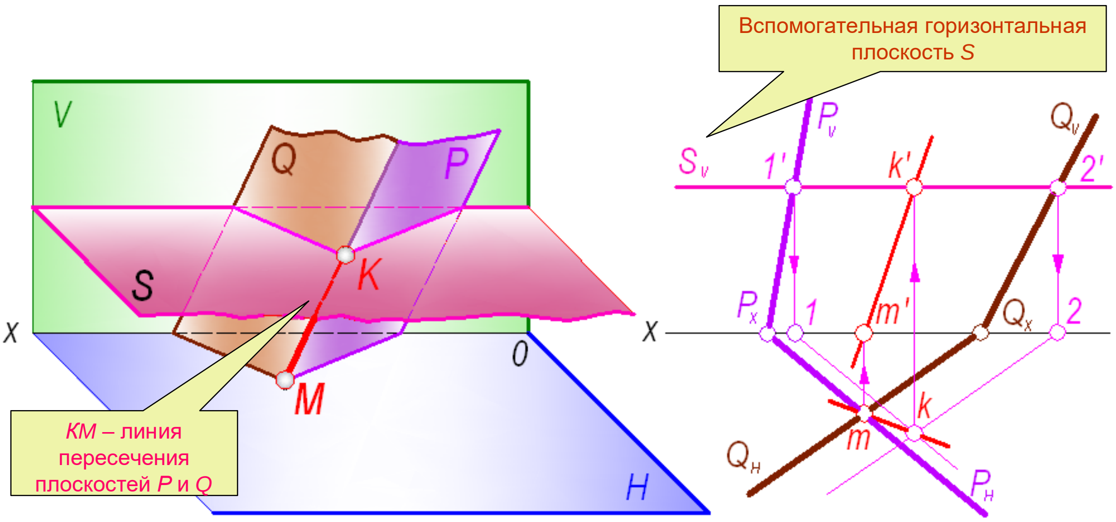


Алгоритм решения задачи :

Для определения двух общих точек *M* (*m*; *m*') и *N* (*n*; *n*') линии пересечения плоскостей *ABC* и *DEFQ* использованы две вспомогательные горизонтальные плоскости уровня *S* и *T*.

Рис. 2.6

4. В пределах чертежа пересекаются только два следа заданных плоскостей *P* и *Q*



Алгоритм решения задачи
по определению второй точки линии пересечения плоскостей *P* и *Q* :

1. Пересекают заданные плоскости *P* и *Q* вспомогательной плоскостью уровня *S*.
2. Находят линии пересечения плоскости *S* с каждой из заданных плоскостей *P* и *Q*.
3. Отмечают искомую точку *K* на пересечении полученных линий.

Рис. 2.7

Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой. На рис. 2.8 проведена прямая *AB,* перпендикулярная плоскости, заданной в одном случае следами, а в другом – горизонталью и фронталью. Через прямую *AB* можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости. Следовательно, искомая плоскость, заданная пересекающимися прямыми *AB* и *AC*, будет перпендикулярна плоскостям *P* и *KMN*.

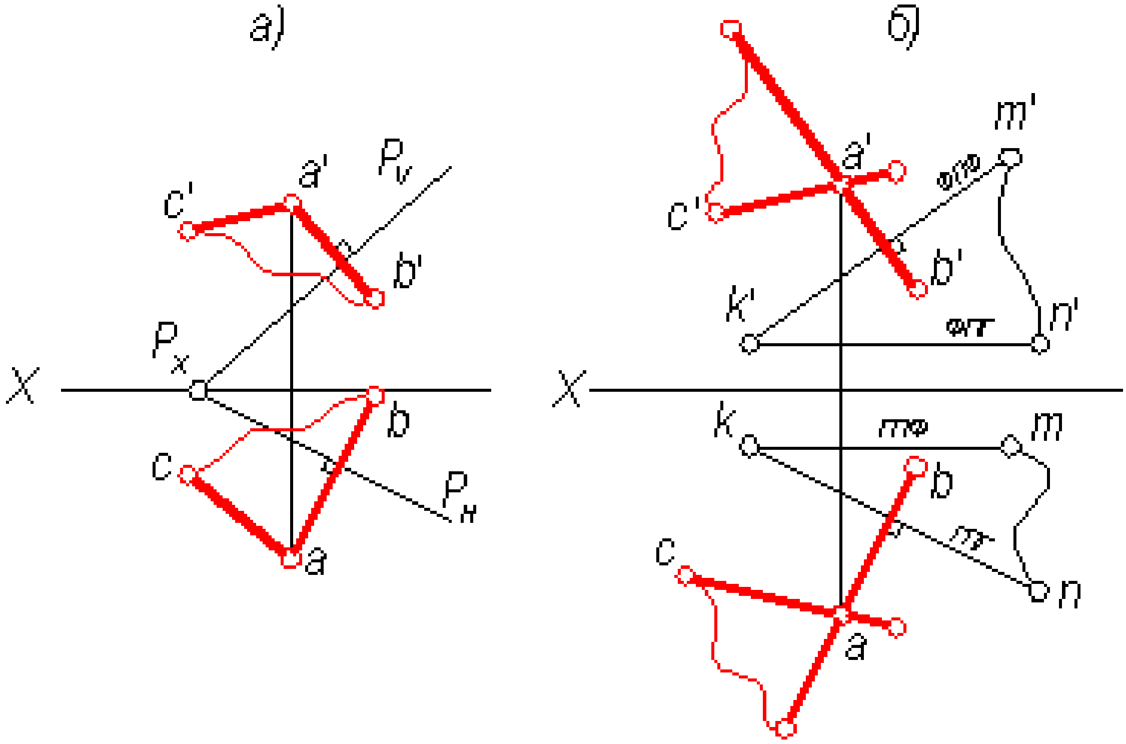


Рис. 2.8

1.2.2. Взаимное расположение прямой линии и плоскости

Взаимное расположение прямой и плоскости и двух плоскостей определяется на эпюре взаимным расположением их проекций.

Прямая линия в пространстве может принадлежать плоскости, а также быть параллельной плоскости или пересекать ее. При пересечении прямой линии с плоскостью следует выделить частный случай, когда прямая перпендикулярна плоскости.

Прямая линия параллельна плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

Поэтому, чтобы построить на эпюре прямую, параллельную плоскости, надо взять в плоскости вспомогательную прямую, заведомо ей принадлежащую, и искомую прямую провести параллельно вспомогательной. На рис. 2.9 и 2.10 показаны примеры построения на эпюре прямой, проходящей через точку D (d, d') параллельно плоскости P, заданной в первом случае треугольником ABC (abc, $a'b'c'$), а во втором — следами P_H и P_V.

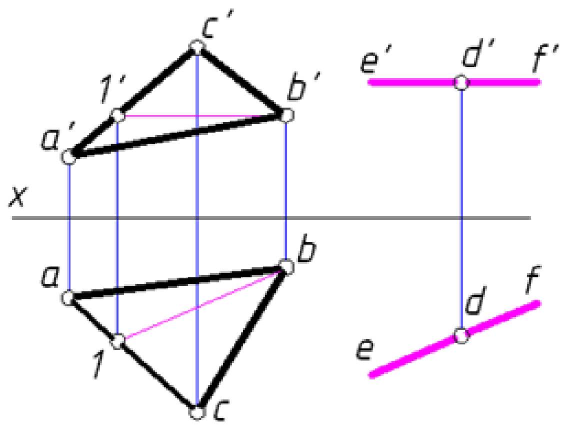


Рис. 2.9

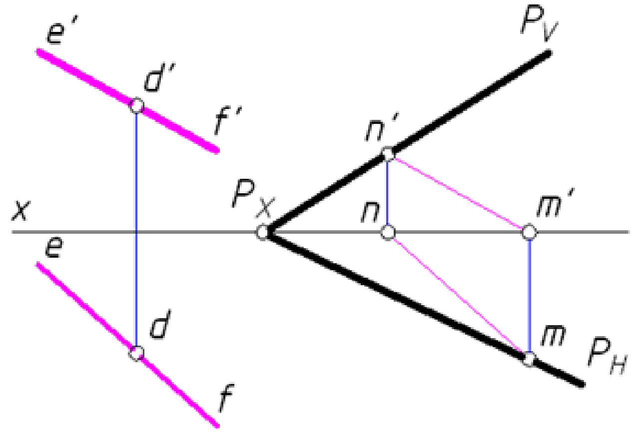


Рис. 2.10

Прямая линия, пересекающая плоскость

Алгоритм решения задачи на построение точки пересечения прямой линии с плоскостью является весьма важным среди других позиционных задач начертательной геометрии. Этот алгоритм используется также для решения задач на построение точек пересечения прямых с поверхностью, поверхности с плоскостью, взаимного пересечения линейчатых поверхностей.

Рассмотрим алгоритм решения задачи на построение точки пересечения прямой с плоскостью на пространственной модели.

Пусть плоскость общего положения Q пересекается прямой с EF (рис. 2.11). В этом случае точка пересечения прямой с плоскостью определяется с помощью вспомогательной плоскости. Для упрощения построений вспомогательная плоскость обычно берется проецирующей.

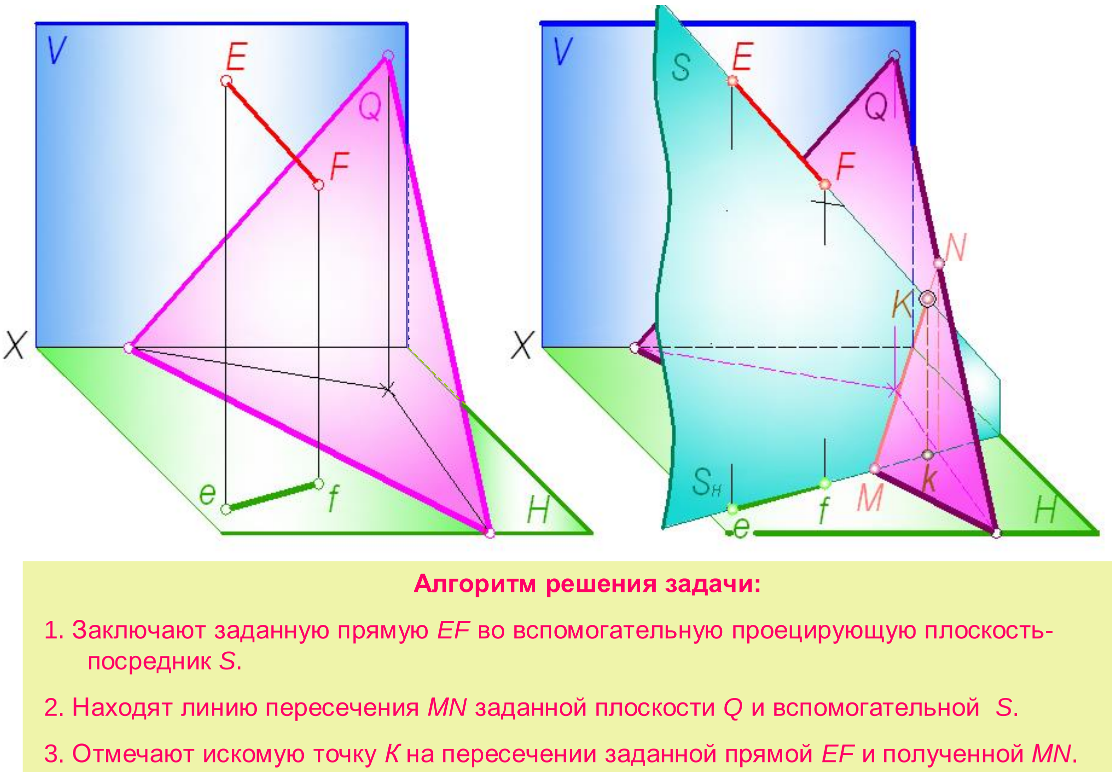


Рис. 2.11

Алгоритм решения состоит из трех операций.

1. Заключают заданную прямую *EF* во вспомогательную проецирующую плоскость-посредник *S*.

2. Находят линию пересечения заданной плоскости Q и вспомогательной *S*. На слайде видно, что эти плоскости пересекаются по линии *MN*.

3. Отмечают искомую точку *K* на пересечении заданной прямой *EF* и полученной *MN*.

На рис. 2.12 показано решение аналогичной задачи на метрическом эпюре.

В качестве вспомогательной плоскости использована фронтально проецирующая плоскость *S*, проведенная через прямую *EF*.

Найдена линия пересечения двух плоскостей – отрезок *I-II*. Последовательность построения показана на рисунке стрелками.

На пересечении горизонтальных проекций прямых *ef* и *12* отмечена горизонтальная проекция искомой точки *k*, фронтальная проекция которой определяется по проекционной связи.

Определим видимость прямой относительно плоскостей проекций, применяя способ так называемых конкурирующих точек.

Конкурирующими называют точки, лежащие на одном проецирующем луче.

Если смотреть по направлению проецирующего луча, то можно увидеть ту из конкурирующих точек, которая наиболее удалена от плоскости проекций (или, что то же самое, наиболее близко расположена к нам).

Так на горизонтально-проецирующем луче *III-IV* находятся точки *33′* и *44′*, принадлежащие прямым *EF* и *CD*. Точка *33′* принадлежит прямой *EF*, а точка *44′* стороне *CD* четырехугольника.

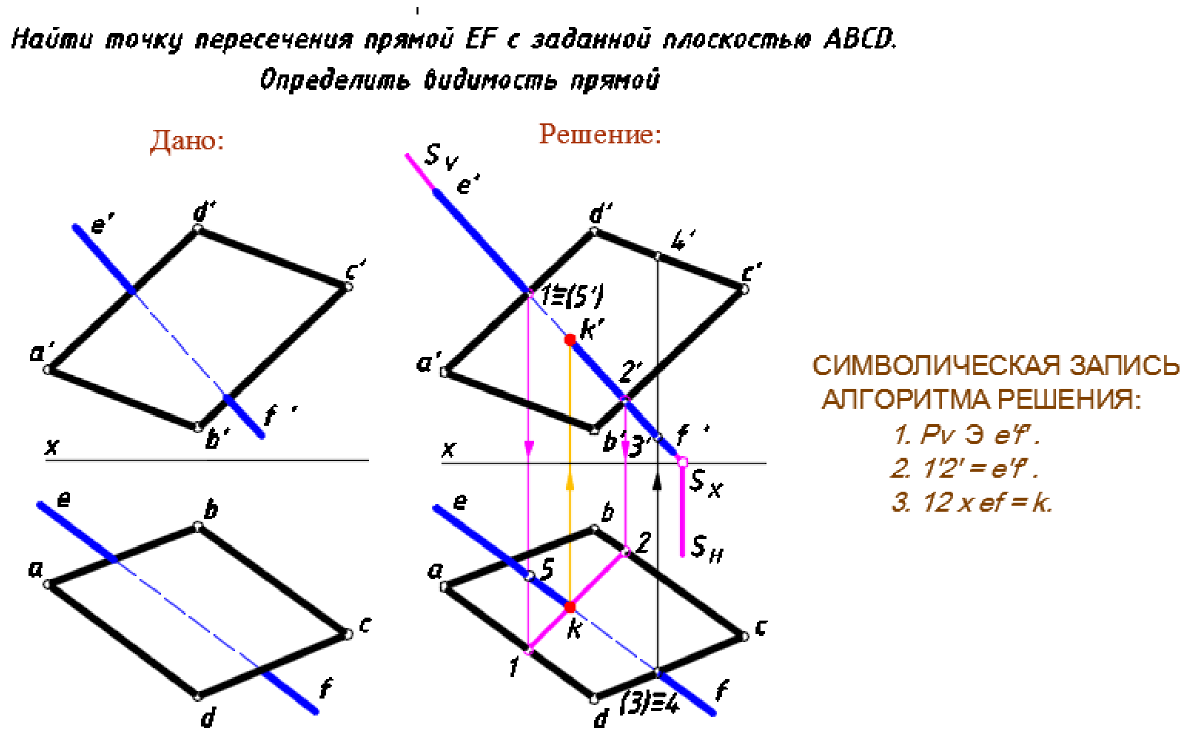


Рис. 2.12

По фронтальным проекциям *3′* и *4′* этих точек устанавливаем, что одна из них (точка *44′*) расположена выше другой (точка *33′*) относительно плоскости проекций *H*. Следовательно, на участке *KIII* прямая линия *EF* (если смотреть на горизонтальную плоскость проекций *H*) находится под плоскостью *ABCD*, т.е. закрыта четырехугольником. Поэтому условно горизонтальную проекцию прямой на участке *k3* покажем штриховой линией.

Чтобы определить видимость прямой относительно фронтальной плоскости проекций, воспользуемся фронтально проецирующим лучом *I-V*. Здесь точка *11′* принадлежит стороне *AD* четырехугольника, а точка *55′* – прямой *EF*. По местоположению горизонтальных проекций этих точек устанавливаем, что точка *I* ближе к нам, чем точка *V*.

Поэтому на участке *K-V* (если смотреть на фронтальную плоскость проекций *V*) прямая *EF* закрыта плоскостью *ABCD* и является невидимой. Условно на участке *k′5′* фронтальную проекцию *e′f′* прямой покажем штриховой линией.

Если один из элементов пересечения – плоскость или прямая - проецирующие, то использовать рассмотренный алгоритм не рекомендуется, так как в большинстве таких случаев нахождение точки пересечения значительно упрощается.

На рис. 2.13 показано построение точки *K* пересечения горизонтально проецирующей прямой *EF* с плоскостью общего положения *ABC*. Горизонтальная проекция *k* точки *K* совпадает с проекцией *ef*, а фронтальная проекция *k′* легко определяется из условия принадлежности точки *K* плоскости *ABC*, для чего использована вспомогательная прямая *A-I*, принадлежащая плоскости *ABC*.

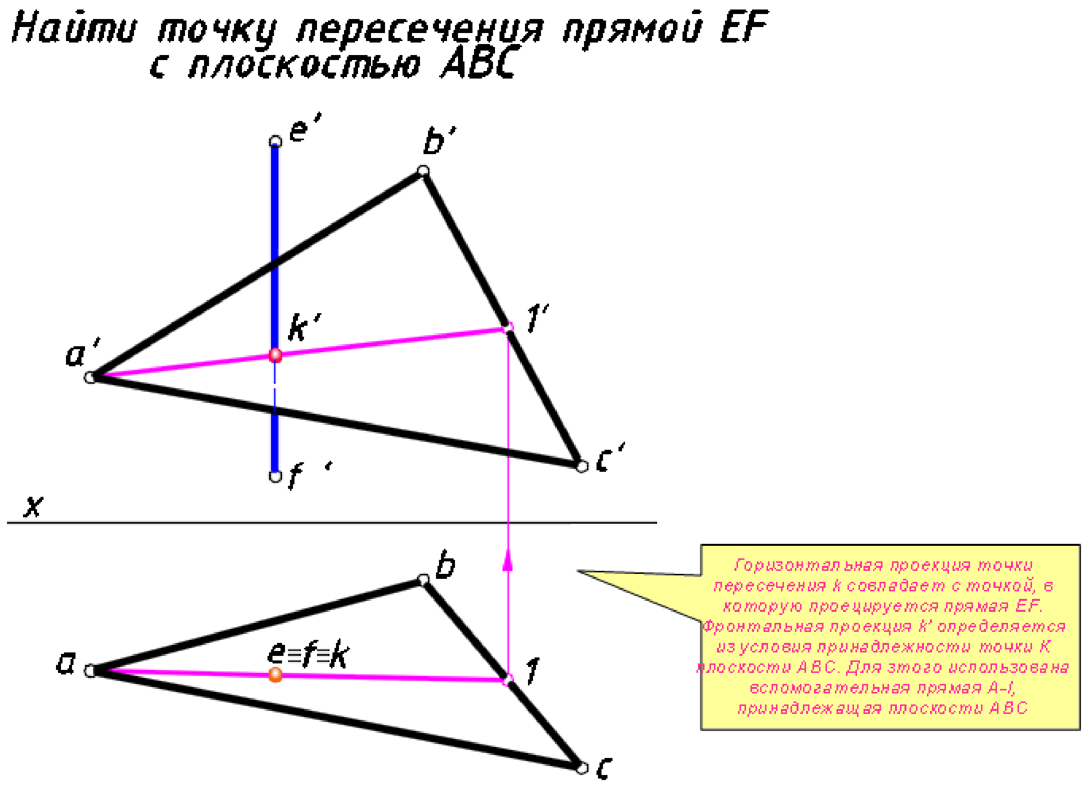


Рис. 2.13

Прямая линия перпендикулярна плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам плоскости или соответствующим проекциям горизонтали и фронтали (рис. 2.35 и 2.36).

Прямой угол между перпендикуляром к плоскости и горизонталью, проходящей через его основание, проецируется на плоскость *H* в виде прямого угла, как угол, одна из сторон которого параллельна плоскости *H*. Аналогично прямой угол между перпендикуляром и фронталью, проецируется на плоскость *V* в виде прямого угла.

На эпюре (рис. 2.14) показано построение проекций прямой, проведенной через точку *A* (*a, a'*) перпендикулярно к плоскости, заданной треугольником *BCD (bcd, b'c'd')*. Для определения положения проекций перпендикуляра в плоскости треугольника проведены горизонталь и фронталь.

На эпюре (рис. 2.15) показано такое же построение в случае, когда плоскость задана следами P_H и P_V. Для определения положения проекций перпендикуляра здесь служат следы плоскости.

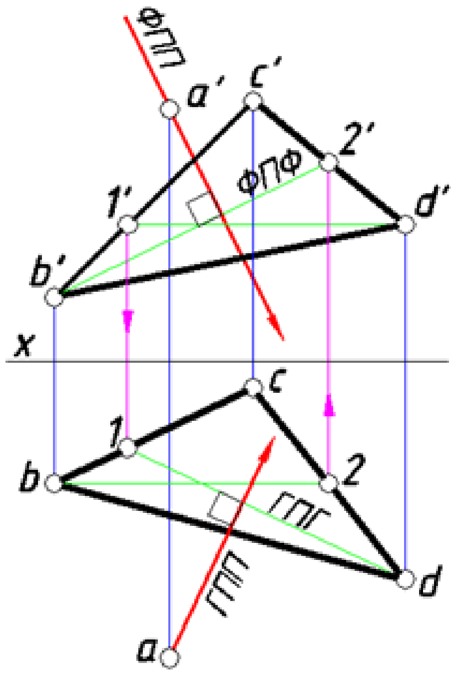


Рис. 2.14

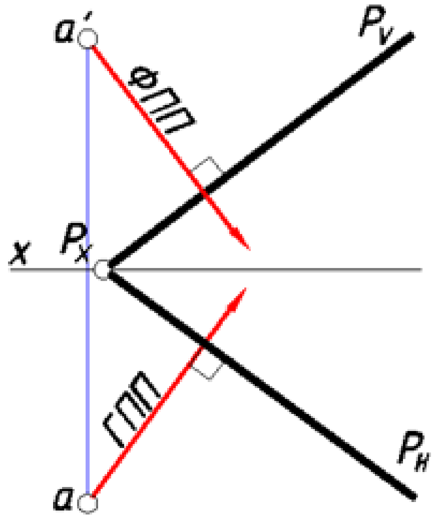


Рис. 2.15

Таким образом, *если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости*.

Данное условие позволяет решать ряд задач начертательной геометрии: опустить или восстановить перпендикуляр к плоскости, решить обратную задачу – провести плоскость перпендикулярно прямой и определить расстояние от точки до плоскости.

Задача 1. Определить расстояние от точки *A* до плоскости треугольника *BCD*.

Проведем в плоскости треугольника *BCD* (рис. 2.16) горизонталь *B1* (*b1*; *b′1′*) и фронталь *C2* (*c2*; *c′2′*) и опустим из точки *a′* перпендикуляр на прямую *c′2′*, а из точки *a* - перпендикуляр на прямую *b1*. Основанием перпендикуляра является точка его пересечения с плоскостью *BCD*. Для того, чтобы найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью заключаем перпендикуляр в горизонтально проецирующую плоскость *R,* которая пересекает плоскость треугольника *BCD* по прямой *MN* (*mn*; *m′n′*). На пересечении *m′n′* с фронтальной проекцией перпендикуляра находим фронтальную проекцию его основания - точку *k′*. Спроецировав точку *k′* на горизонтальную проекцию линии *MN* (*mn*), получим точку *k*. Натуральную величину перпендикуляра *AK* определим способом прямоугольного треугольника как длину гипотенузы A_0k'треугольника A_0 $a'k'$.

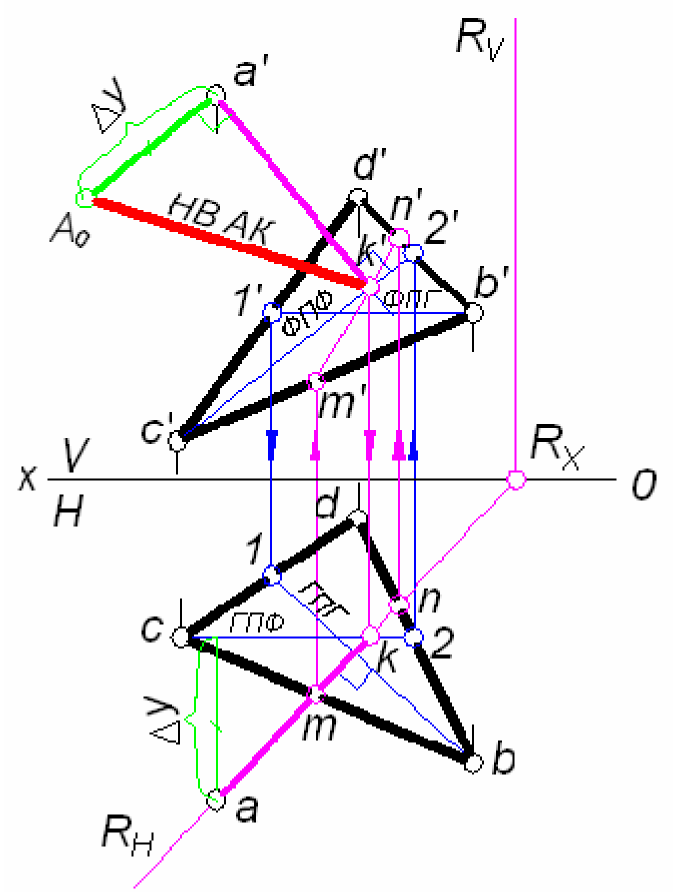


Рис. 2.16

Задача 2. Определить расстояние от точки *A* до плоскости *P*, заданной следами.

Строим проекции перпендикуляра к плоскости. Горизонтальную проекцию перпендикуляра проводим из точки *a* перпендикулярно горизонтальному следу плоскости P_H, а фронтальную проекцию из точки *a'* перпендикулярно P_V (рис. 2.17). Основанием перпендикуляра является точка его пересечения с плоскостью *P*. Чтобы ее найти, заключаем перпендикуляр в горизонтально проецирующую плоскость *T*, которая пересекает плоскость *P* по прямой *MN* (*mn*; *m'n'*). На пересечении фронтальной проекции прямой с фронтальной проекцией перпендикуляра находим фронтальную проекцию его основания – точку *k'*. Спроецировав точку *k'* на горизонтальную проекцию линии *MN* (*mn*), получим точку *k*. Натуральную величину перпендикуляра *AK* определим способом прямоугольного треугольника.

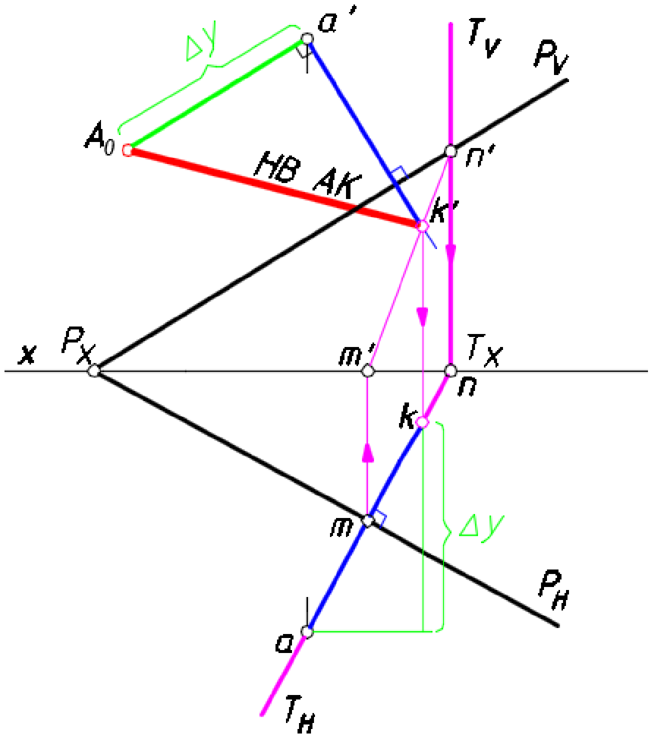


Рис. 2.17

1.2.3. Позиционные задачи на взаимное расположение прямых и плоскостей

Задача 1. Через точку *A* провести плоскость Q, параллельную заданной плоскости *P*.

Если плоскость задана пересекающимися прямыми (рис. 2.18), то решение задачи сводится к проведению через точку *A* пары прямых, параллельных заданным.

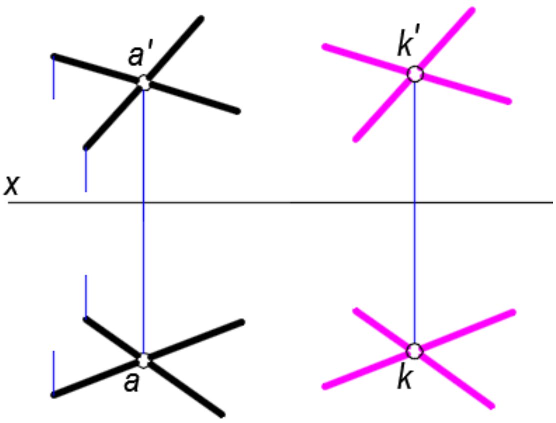


Рис. 2.18

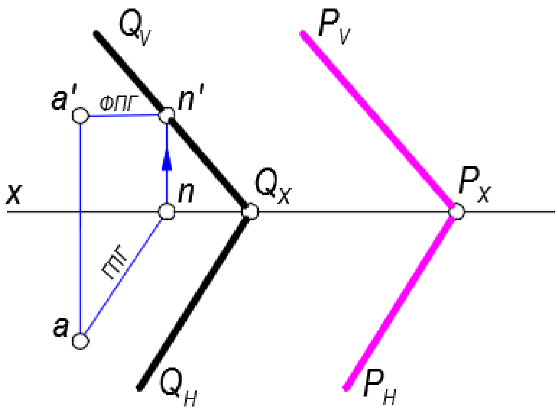


Рис. 2.19

Если плоскость задана следами (рис. 2.19), то построение может быть выполнено по следующему алгоритму:

1. Через точку *A* проводим, например, горизонталь искомой плоскости Q, параллельную горизонталям заданной плоскости *P*.

2. Через эту горизонталь проводим искомую плоскость параллельно заданной. Фронтальный след Q_V проводим через фронтальную проекцию *n′* фронтального следа горизонтали параллельно следу P_V; горизонтальный след Q_H - через точку Q_X параллельно следу P_H.

Задача 2. Через точку *A* (*a, a′*) провести плоскость Q, перпендикулярную к прямой (рис. 2.20).

а) Требуется показать искомую плоскость пересекающимися прямыми. В этом случае наиболее просто построить плоскость Q главными линиями — горизонталью и фронталью, проходящими через точку *A (a, a′)*.

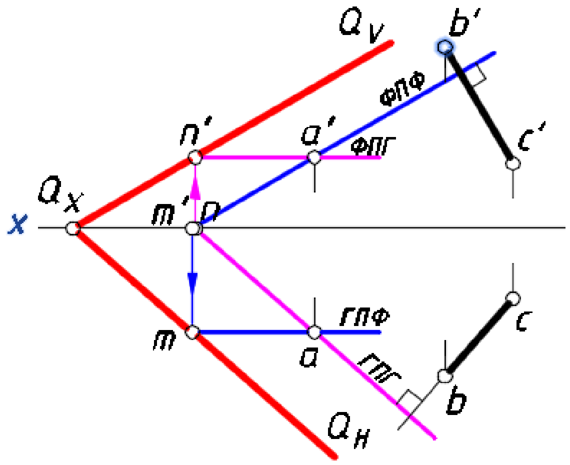


Рис. 2.20

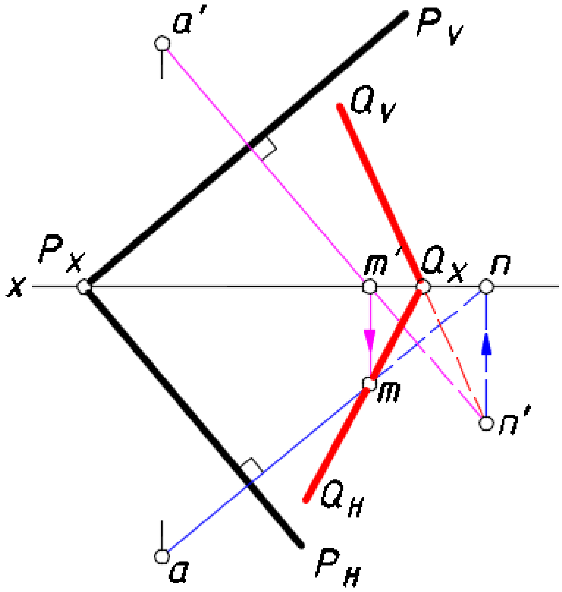


Рис. 2.21

б) Требуется показать искомую плоскость следами. Построение может быть выполнено по следующему алгоритму. Через точку *A* проводим горизонталь плоскости Q перпендикулярно к отрезку *BC*. Затем через эту горизонталь проводим искомую плоскость перпендикулярно к прямой *BC*. Фронтальный след Q_V проводим через фронтальную проекцию *n′* фронтального следа горизонтали перпендикулярно *b′c′*; горизонтальный след Q_H − через точку Q_X перпендикулярно к *bc*.

Задача 3. Через точку *A (a, a′)* провести плоскость Q, перпендикулярную к заданной плоскости *P* и проходящую через точку схода следов Q_X на оси *X* (рис. 2.21).

Известно, что плоскость Q будет перпендикулярна к заданной плоскости *P,* если она проходит через перпендикуляр к ней или перпендикулярно к линии, лежащей в плоскости *P*.

На рис. 2.21 решение задачи выполнено по плану, использующему первое из этих условий:

1. Через заданную точку A проведен перпендикуляр к плоскости P ($am\perp P_H$,, $a'm'\perp P_V$).

2. Через этот перпендикуляр и заданную точку Q_X проведена искомая плоскость Q. При этом след Q_H проведен через горизонтальную проекцию m горизонтального следа перпендикуляра и точку Q_X; след Q_V – через фронтальную проекцию n' фронтального следа перпендикуляра и точку Q_X.

Искомую плоскость можно было бы построить и пересекающимися прямыми, если через точку Q_X провести какую-либо прямую, имеющую общую точку с перпендикуляром.

Задача 4. Через точку A (a, a') провести прямую, перпендикулярную к прямой BC.

Искомый перпендикуляр лежит в плоскости, перпендикулярной к заданной прямой BC. Поэтому задача может быть решена по следующему алгоритму:

1. Через точку A проводим плоскость Q, перпендикулярную к прямой BC.

2. Определяем точку K (k, k') пересечения прямой BC с плоскостью Q при помощи горизонтально-проецирующей плоскости S.

3. Соединяем точки A и K.

На эпюре, решая задачу по этому алгоритму, можно плоскость показать двумя пересекающимися главными линиями ($h\times f$) (рис. 2.22) или следами (рис. 2.23).

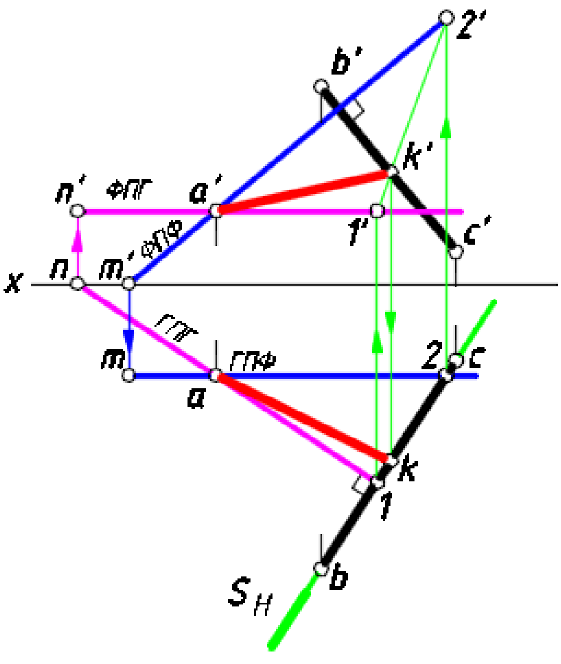


Рис. 2.22

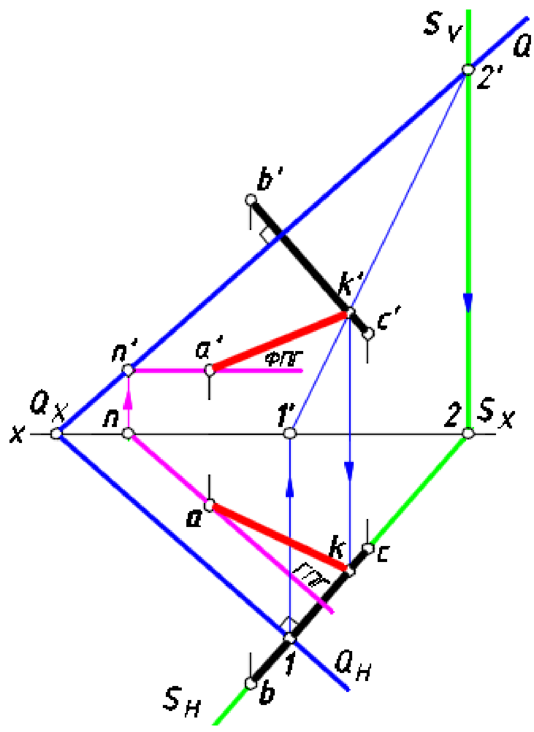


Рис. 2.23

Задача 5. Построить линию пересечения плоскостей ABC и DEF.

Эту задачу можно решать с использованием задачи на пересечение прямой с плоскостью. На рис. 2.24 показано построение линии пересечения плоскостей, заданных треугольниками *ABC* и *DEF*. Прямая *MN* построена по найденным точкам пересечения сторон *DF* и *EF* треугольника *DEF* с плоскостью треугольника *ABC*.

Например, чтобы найти точку *M* пересечения стороны *DF* с плоскостью *ABC*, через прямую *DF* проводят фронтально-проецирующую плоскость *P*, которая пересекается с плоскостью треугольника *ABC* по прямой *I II*. На пересечении горизонтальных проекций *df* и *12* получают горизонтальную проекцию *m* искомой точки *M*. Затем находят фронтальную проекцию *m*' точки *M*. Точку *N* пересечения прямой *EF* с плоскостью *ABC* находят, используя фронтально-проецирующую плоскость Q, которая пересекается с плоскостью треугольника *ABC* по прямой *III IV*. На пересечении горизонтальных проекций *ef* и *34* получают горизонтальную проекцию *n* искомой точки *N*.

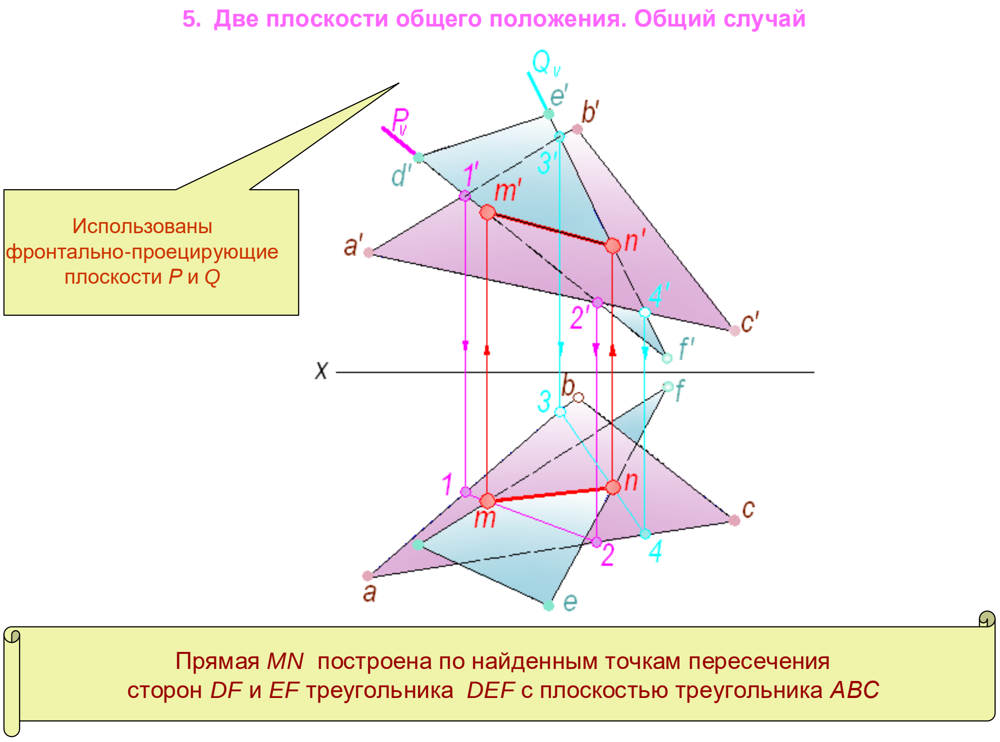


Рис. 2.24

Соединив попарно точки *m*' и *n*', *m* и *n*, получают проекции линии пересечения *MN* плоскостей *ABC* и *DEF*.

Видимость частей отрезков плоскостей устанавливается способом конкурирующих точек.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие могут быть взаимные положения прямой и плоскости; двух

плоскостей?

2. Как построить прямую, параллельную плоскости?
3. Как проверить, параллельна ли прямая данной плоскости?
4. Как провести через данную прямую плоскость, параллельную данной плоскости?
5. Как построить линию пересечения двух плоскостей?
6. Каким свойством обладают проекции перпендикуляра к плоскости?
7. Как построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой?
8. Как построить точку, симметричную данной точке относительно заданной плоскости?
9. Сформулируйте условие перпендикулярности двух плоскостей.
10. Какая прямая является линией пересечения плоскости общего положения с горизонтальной плоскостью уровня?
11. Какая прямая является линией пересечения плоскости общего положения с фронтально проецирующей плоскостью?
12. По какой линии пересекаются две фронтально проецирующие плоскости?
13. Как определяется видимость при пересечении двух плоскостей общего положения?
14. Перечислите этапы построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения.