8. Электромагнетизм. Электрическое поле в вакууме

8.1 Электрический заряд. Закон Кулона

Все тела в природе образованы из атомов или молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Существуют два типа электрических зарядов, условно называемых ***отрицательными и положительными***. Между заряженными телами возникают особые силы взаимодействия, называемые ***электрическими силами***. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются.

Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. ***Его можно назвать элементарным зарядом***. Положительный элементарный заряд мы будем ***обозначать буквой е.***

К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (несущий отрицательный заряд - е), протон (несущий положительный заряд +е) и нейтрон (заряд которого равен нулю). Из этих частиц построены атомы и молекулы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным.

Наименьший по величине электрический заряд, экспериментально обнаруженный в природе, называемый ***элементарным*** равен:

$$e = 1.6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \qquad (8.1.1)$$

Прилагая некоторые усилия, можно оторвать электроны от одних тел, которые становятся при этом положительно заряженными, и передать их другим телам, которые заряжаются отрицательно. Такие тела являются макроскопически заряженными. Электрический заряд любого тела кратен элементарному заряду e, то есть изменяется:

$$q = \pm Ne, \qquad (8.1.2)$$

где N – целое число.

Факт, выражаемый формулой (8.1.2), означает, что электрический заряд квантуется.

Многочисленные эксперименты доказали, что имеет место ***закон сохранения электрического заряда,*** который утверждает, что ***суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться.***

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь. Однако всегда возникают или исчезают два элементарных заряда противоположных знаков. Например, электрон и позитрон (положительный электрон) при встрече аннигилируют, т. е. превращаются в нейтральные гамма-фотоны. При этом исчезают заряды -е и +е. В ходе процесса, называемого рождением пары, гамма-фотон, попадая в поле атомного ядра, превращается в пару частиц — электрон и позитрон. При этом возникают заряды -е и +е.

Отметим, что закон сохранения электрического заряда тесно связан с релятивистской инвариантностью заряда. Действительно, если бы величина заряда зависела от его скорости, то, приведя в движение заряды одного какого-то знака, мы изменили бы суммарный заряд изолированной системы.

Электрон – самая легкая из заряженных частиц, и благодаря закону сохранения заряда ему просто не на что распадаться. Поэтому электрон стабилен, и это есть необходимая предпосылка стабильности атомов, молекул, вещества и нас с вами.

Пусть имеются два заряженных макроскопических тела, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними. В этом случае каждое тело можно считать материальной точкой или ***точечным зарядом.***

Французский физик Ш. Кулон (1736-1806) экспериментально установил закон, носящий его имя ***(закон Кулона):***

Сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в пустоте, пропорциональна величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}. \qquad (8.1.3)$$

На рис. 8.1.1 показаны электрические силы отталкивания, возникающие между двумя одноименными точечными зарядами.

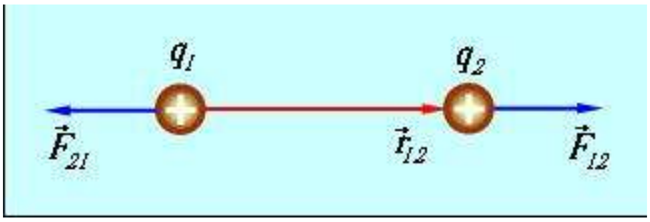


Рис. 8.1.1.

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона записывается в виде:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (8.1.4)$$

Величина ε_0 называется **электрической постоянной**. Численное значение электрической постоянной следующее:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}$$

8.2. Электрическое поле. Напряженность

Вокруг отдельного электрического заряда всегда существует электрическое поле.

Электрическое поле, созданное неподвижным зарядом (или системой неподвижных зарядов), называется ***электростатическим.***

Посредством электростатического поля осуществляется взаимодействие между зарядами. Если в некоторую точку пространства на расстоянии r от заряда q внести другой заряд $q_{пр}$ (назовем его «пробным» зарядом), то на него будет действовать электростатическая сила Кулона со стороны заряда q, обусловленная взаимодействием зарядов q и $q_{пр}$:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right).} \qquad (8.2.1)$$

Силы, действующие на один и тот же пробный заряд, в различных точках пространства, будут отличаться и по величине и по направлению (рис. 8.2.1).

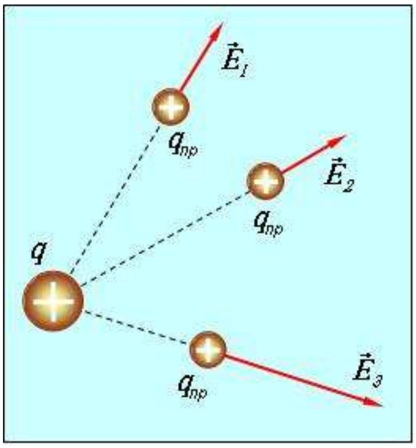


Рис. 8.2.1.

Легко видеть, что электрическое поле будет полностью охарактеризовано по величине и по направлению, если найти в каждой точке поля силу, действующую на единичный положительный пробный заряд $q_{пр}$.

Напряженностью электрического поля в какой-либо точке пространства называется вектор $\vec{\mathbf{E}}$, который численно равен и совпадает по направлению с силой $\vec{\mathbf{F}}$, действующей со стороны поля на помещенный в рассматриваемую точку единичный положительный заряд.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \tag{8.2.2}$$

В соответствии с определением напряженность электрического поля точечного заряда q равна:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},} \tag{8.2.3}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки местонахождения заряда q, создающего электрическое поле, в точку наблюдения.

К понятию о напряженности электрического поля мы пришли, исследуя поле неподвижного точечного заряда. Однако определение (8.2.2) распространяется и на случай поля, создаваемого любой совокупностью неподвижных зарядов. В этом случае, впрочем, необходимо следующее уточнение. Может случиться, что расположение зарядов, обусловливающих исследуемое поле, изменяется под воздействием пробного заряда. Это произойдет, например, когда заряды, создающие поле, расположены на проводнике и могут свободно перемещаться в его пределах. Поэтому, чтобы не внести заметных изменений в исследуемое поле, величину пробного заряда нужно брать достаточно малой.

В СИ единица напряженности электрического поля имеет название вольт на метр и обозначается В/м.

Сила, действующая со стороны поля на произвольный точечный заряд $q_{пр}$, равна:

$$\boxed{\vec{F} = q_{пр}\vec{E}.} \tag{8.2.4}$$

Сила, с которой данная система зарядов действует на некоторый точечный заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на него каждый из зарядов системы. Отсюда следует, что электрическое поле системы зарядов определяется **векторной суммой** напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами системы. Имеет место так называемый **принцип суперпозиции (независимого наложения) электрических полей**

Напряженность поля, созданного системой неподвижных заряженных тел, равна ***векторной сумме*** напряженностей полей, создаваемых каждым телом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \qquad (8.2.5)$$

На рис. 8.2.2 иллюстрируется принцип суперпозиции полей на примере поля, создаваемого двумя точечными зарядами.

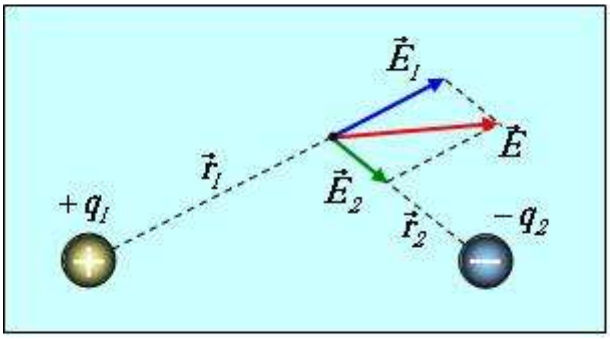


Рис. 8.2.2.

Электрическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$. Для наглядного изображения электрического поля используют **силовые линии** (или **векторные линии напряженности**).

Линией напряженности электрического поля (силовой линией) называется такая линия, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля.

На рис. 8.2.3 показана силовая линия электрического поля. Векторы напряженности электрического поля направлены по касательной к силовой линии.

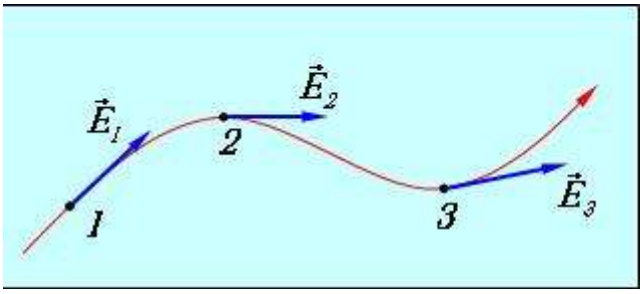


Рис. 8.2.3.

Число линий, пронизывающих единицу поверхности площадки, перпендикулярной к силовым линиям, характеризует численное значение величины ***E*** в данной области пространства. Конфигурация силовых линий позволяет судить об изменении направления и величины вектора ***E*** в пространстве.

Отметим некоторые важные свойства силовых линий:

- силовые линии начинаются на положительных зарядах (или на бесконечности) и заканчиваются на отрицательных зарядах (или на бесконечности);

- силовые линии нигде не пересекаются (в противном случае, напряженность* E *была бы неоднозначной величиной);

- через любую точку пространства можно провести силовую линию.

На рис. 8.2.4 приведена картина силовых линий поля уединенного точечного заряда.

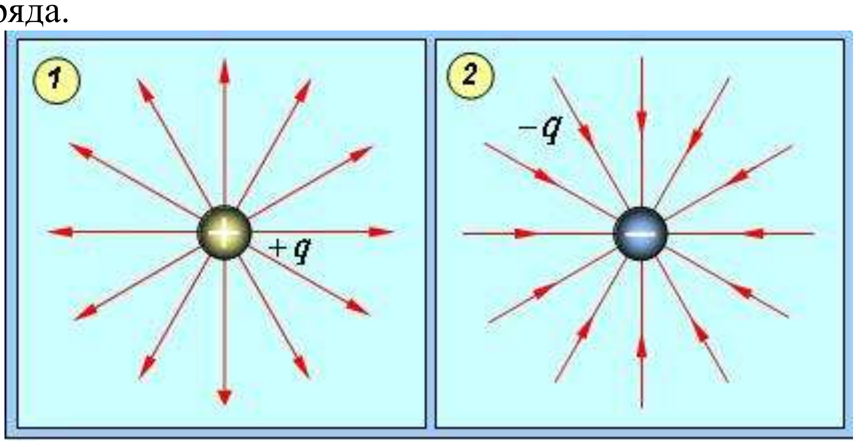


Рис. 8.2.4

В первом случае силовые линии начинаются на точечном заряде и уходят в бесконечность, во втором случае силовые линии приходят из бесконечности и заканчиваются на точечном заряде.

Силовые линии электрического поля, образованного двумя равными по модулю точечными зарядами одноименными зарядами, представлены на рис. 8.2.5.

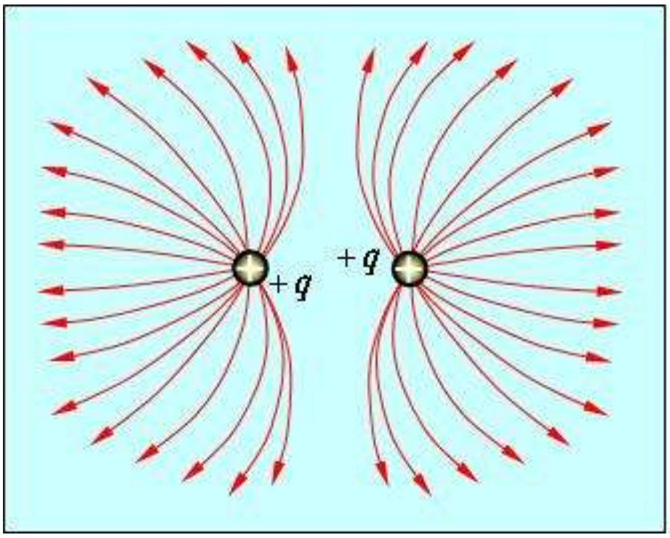


Рис. 8.2.5.

Картина силовых линий электрического поля, образованного двумя равными по модулю точечными разноименными зарядами, приведена на рис. 8.2.6.

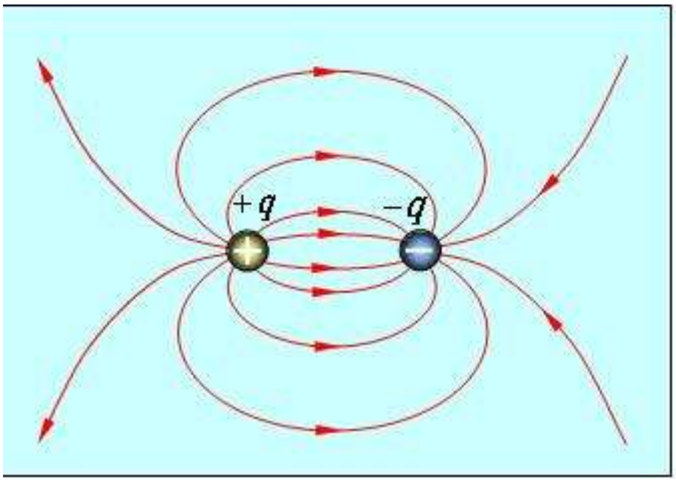


Рис. 8.2.6.

Электрическое поле, напряженность которого одинакова по модулю и направлению во всех точках пространства, называется ***однородным электрическим полем***.

8.3. Потенциал. Энергия взаимодействия системы зарядов

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. В любой точке этого поля на точечный заряд q' действует сила:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r = F(r)\vec{e}_r \qquad (8.3.1)$$

Здесь F (r) — модуль силы $\vec{F}$, $\vec{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$, определяющего положение заряда q' относительно заряда q.

Сила (8.3.1) является центральной. Центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом q' при перемещении его из одной точки в другую, не зависит от пути. Эта работа равна:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\vec{e}_r\, d\vec{l} \qquad (8.3.2)$$

где $d\vec{l}$ — элементарное перемещение заряда q'. Из рис. 8.3.1 видно, что скалярное произведение $\vec{e}_r d\vec{l}$ равно приращению модуля радиуса-вектора $\vec{r}$, т. е. $d\vec{r}$. Поэтому, формулу (8.3.2) можно представить в виде:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(r)\, d\vec{r}$$

Подстановка выражения для $\vec{F}$ (r) дает:

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_2} \qquad (8.3.3)$$

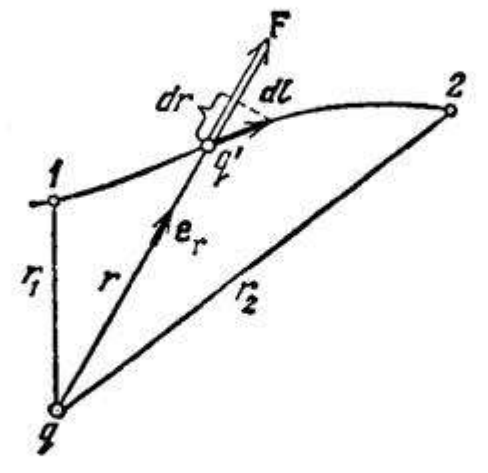


Рис. 8.3.1.

Работа сил консервативного поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{p1} — W_{p2} \qquad (8.3.4)$$

Сопоставление формул (8.3.3) и (8.3.4) приводит к следующему выражению для потенциальной энергии заряда q' в поле заряда q:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + const$$

Значение константы в выражении потенциальной энергии обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. при r = ∞) потенциальная энергия обращалась в нуль.

При этом условии получается, что:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}. \qquad (8.3.5)$$

Воспользуемся зарядом q' в качестве пробного заряда для исследования поля. Согласно (8.3.5) потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины q', но и от величин q и r, определяющих поле. Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля, подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды $q'_{пр}$, $q''_{пр}$ и т. д. будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией W'_p, W''_p и т. д. Однако отношение $W_p/q_{пр}$ будет для всех зарядов одним и тем же (см. формулу (8.3.5). Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{пр}} \qquad (8.3.6)$$

называется ***потенциалом поля*** в данной точке и используется, наряду с напряженностью поля $\vec{E}$, для описания электрических полей.

Потенциал и напряженность электростатического поля связаны между собой соотношением $\vec{E} = \nabla\varphi$, где ∇ - градиент функции φ, с помощью этого соотношения можно доказать, что:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \qquad (8.3.7)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, ибо работа сил электростатического поля не зависит от пути.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется ***эквипотенциальной (поверхностью равного потенциала).*** Ее уравнение имеет вид:

$$\varphi(x, y, z) = const. \qquad (8.3.8)$$

Из (8.3.6) следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд. Подставив в (8.3.6) значение потенциальной энергии (8.3.5), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (8.3.9)$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой N точечных зарядов q_1, q_2,…, q_N. Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим r_1, r_2,. , r_N. Работа, совершаемая силами этого поля над зарядом q', будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

Согласно (8.3.3) каждая из работ A_i равна:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q'}{r_{i2}}$$

где r_{i1}- расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q', r_{i2}-расстояние от q_i до конечного положения заряда q'. Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i2}}$$

Сопоставив это выражение с соотношением (8.3.4), получим для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов выражение:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_i}$$

из которого следует, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \qquad (8.3.10)$$

Сопоставление полученной формулы с выражением (8.3.9) приводит к выводу, что ***потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*** В то время как напряженности поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов оказывается обычно гораздо проще, чем вычисление напряженностеи электрического поля.

Из формулы (8.3.6) вытекает, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией:

$$W_p = q\varphi. \tag{8.3.11}$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом q может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{8.3.12}$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках (т. е. на убыль потенциала).

Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна:

$$A_\infty = q\varphi. \tag{8.3.13}$$

Отсюда следует, что ***потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность.***

Такую же по величине работу нужно совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Формулу (8.3.13) можно использовать для установления единиц потенциала. За единицу потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. Так, в СИ за единицу потенциала, называемую вольтом (сокращенное обозначение — В), принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного одному кулону, нужно совершить работу в один джоуль: 1 Дж=1 Кл·1 В, отсюда:

$$1\text{В} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} \tag{8.3.14}$$

Выражение (8.3.5) можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию зарядов q и q'. Обозначив заряды через q_1 и q_2, получим для их энергии взаимодействия формулу:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{8.3.15}$$

Расстояние между зарядами мы обозначили символом r_{12}. Рассмотрим систему, состоящую из N точечных зарядов q_1, q_2,…, q_N. Энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} W_{pik}(r_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_k}{r_{ik}} \qquad (8.3.16)$$

В формуле (8.3.16) суммирование производится по индексам i и k. Оба индекса пробегают, независимо друг от друга, все значения от 1 до N. Слагаемые, для которых значение индекса i совпадает со значением индекса к, не принимаются во внимание. Придадим формуле (8.3.16) следующий вид:

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i \sum_{\substack{k \\ i \neq k}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i \qquad (8.3.17)$$

Выражение (8.3.17) представляет собой формулу энергии взаимодействия системы зарядов.

8.4. Теорема Гаусса и ее применение к расчету полей

Рассмотрим поле точечного заряда q и вычислим поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S, заключающую в себе заряд (рис. 8.4.1). Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен числу линий, выходящих наружу, т. е. начинающихся на заряде, если он положителен, и числу линий, входящих внутрь, т. е. оканчивающихся на заряде, если он отрицателен. Учтя, что количество начинающихся или оканчивающихся на точечном заряде линий численно равно q/ε_0 можно написать, что:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (8.4.1)$$

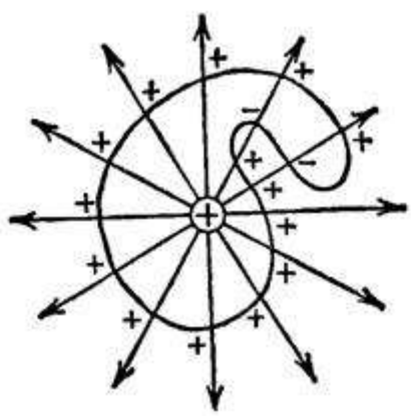


Рис. 8.4.1.

Знак потока совпадает со знаком заряда q. Размерность обеих частей равенства (8.4.1) одинакова.

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находятся N точечных зарядов q_1 , q_2 ... , q_N. В силу принципа суперпозиции напряженность $\vec{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей $\vec{E}_i$ создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$. Поэтому

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \sum_i \oint \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \qquad (8.4.2)$$

Доказанное нами утверждение носит название ***теоремы Гаусса***. Эта теорема гласит, что ***поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0.***

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т. е. зарядами, образованными огромным числом элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с конечной всюду плотностью. Объемная плотность заряда q определяется по аналогии с плотностью массы как отношение заряда dq к физически бесконечно малому объему dV, в котором заключен этот заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad (8.4.3)$$

В данном случае под физически бесконечно малым объемом нужно понимать такой объем, который с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы плотность в пределах его можно было считать одинаковой, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность заряда.

Зная плотность заряда в каждой точке пространства, можно найти суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S. Для этого нужно вычислить интеграл от р по объему, ограниченному поверхностью:

$$\sum_i q_i = \int \rho dV$$

Таким образом, формуле (8.4.2) можно придать вид:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV \qquad (8.4.4)$$

Теорема Гаусса позволяет в ряде случаев найти напряженность поля гораздо более простыми средствами, чем с использованием формулы (8.2.3) для напряженности поля точечного заряда и принципа суперпозиций полей.

Поле бесконечной однородно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\sigma = \frac{dq}{dS}$ - поверхностная плотность заряда.

Поле двух разноименно заряженных бесконечных плоскостей:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра радиусом R:

$$E(r) = \frac{1}{2\mu\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

r > R, $\lambda = \frac{dq}{dl}$ - линейная плотность заряда

Поле однородно заряженной сферы радиусом R:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \; r > R$$

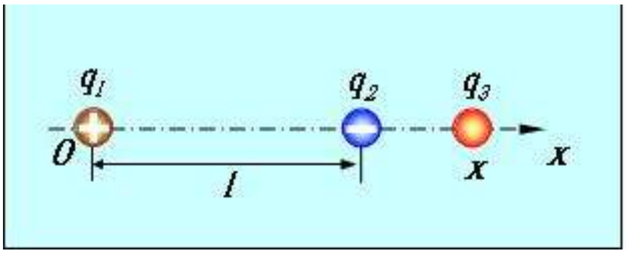
Поле объемно заряженного шара радиусом R:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3} \; r \leq R$$

Вне шара поле тождественно с полем, которое создавал бы точечный заряд q, помещенный в центр шара.

Примеры решения задач

Задача 1. Два заряда $q_1=9q$ и $q_2=-q$ находятся на расстоянии $l=20$ *см* друг от друга. Где надо поместить третий заряд q_3, чтобы силы, действующие на него со стороны зарядов q_1 и q_2, уравновешивались?



Решение:

Две силы, действующие на заряд q_3, направлены по линиям, соединяющим его с зарядами q_1 и q_2. Мы ищем точку, где бы эти силы уравновесились. Для этого прежде всего необходимо, чтобы они были колинеарны. Это, в свою очередь, означает, что заряд q_3 должен быть помещен на линии, соединяющей заряды q_1 и q_2 (см. рис.).

В задаче не заданы знаки зарядов q и q_3, поэтому будем представлять себе для определенности, что они положительны. Если заряд q_3 помещается между зарядами q_1 и q_2, то он будет притягиваться к отрицательному заряду q_2 и отталкиваться от положительного заряда q_1. Обе силы действуют в одном направлении и их сумма никак не может равняться нулю. Если же заряд q_3 помещен справа от q_2 (как на рис.) или слева от q_1, то действующие на него силы имеют разные направления и при определенном соотношении между их абсолютными величинами могут взаимно скомпенсироваться.

Однако, при помещении заряда q_3 слева от q_1, мы имеем следующую ситуацию: заряд q_3 расположен к q_1 ближе, чем к q_2, а абсолютная величина q_1 превышает абсолютную величину q_2. Оба этих фактора действуют в одну сторону, так что сила со стороны q_1 заведомо больше силы со стороны q_2, и они никак не могут скомпенсироваться, хотя и имеют разные направления. Эти соображения не действительны при помещении q_3 справа от заряда q_2: меньшая величина последнего по сравнению с q_1 при меньшем же расстоянии до q_3 вполне может вылиться в одинаковость действующих на q_3 сил.

Сила F_{13}, действующая на заряд q_3 со стороны заряда q_1 задается законом Кулона:

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_3}{|x|^3} x = \frac{qq_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{9x}{|x|^3}.$$

Аналогично выглядит выражение для силы F_{23}, действующей на q_3 со стороны q_2:

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_2 q_3}{|x-l|^3}(x-l) = -\frac{qq_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{(x-l)}{|x-l|^3}.$$

Если эти силы уравновешиваются (то есть $F_{13}+F_{23}=0$), то должно выполняться равенство:

$$\frac{9x}{|x|^3} - \frac{(x-l)}{|x-l|^3} = 0. \qquad (1)$$

Заметим, что в уравнение не вошли заряды q, q_3, равно как и диэлектрическая проницаемость среды ε – ответ задачи от этих параметров не будет зависеть.

Рассмотрим два случая.

1. При $0<x<l$ оба слагаемых имеют одинаковые знаки, и равенство $F_{13}+F_{23}=0$ не выполняется.

2. В случае $x>l$ мы можем снять знаки модулей

$$\frac{9}{x^2} - \frac{1}{(x-l)^2} = 0.$$

Это условие в конечном итоге сводится к квадратному уравнению:

$$8x^2 - 18lx + 9l^2 = 0,$$

которое имеет два корня

$$x = \frac{3l}{2}$$

И

$$x = \frac{3l}{4}.$$

Но это уравнение получено при условии $x>l$, которому второй из корней не удовлетворяет. Поэтому пока мы имеем только решение:

$$x = \frac{3l}{2}$$

3. При $x<0$ также можно избавиться от знаков модулей, учитывая, что при отрицательном x имеем

$$\frac{x}{|x|^3} = -\frac{1}{x^2}$$

И

$$\frac{(x-l)}{|x-l|^3} = -\frac{1}{(x-l)^2}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем уравнение:

$$\frac{9}{x^2} - \frac{1}{(x-l)^2} = 0,$$

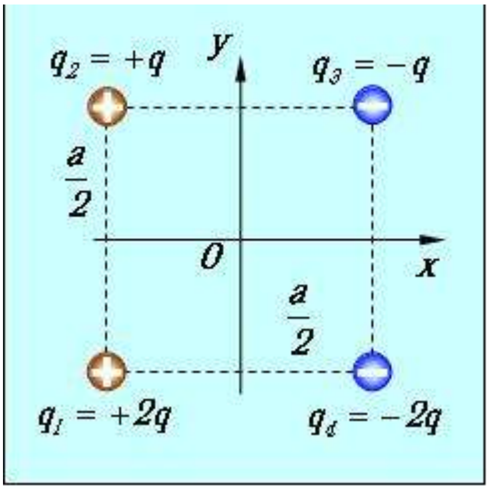
которое совпадает с уравнением предыдущего случая. Корни его мы уже знаем, но ни один из них не удовлетворяет условию $x<0$.

Таким образом, в соответствии с качественными рассуждениями, мы получили единственное решение задачи:

$$x = \frac{3l}{2} = \frac{3\cdot 20}{2} = 30 \text{ см},$$

то есть заряд q_3 действительно должен располагаться справа от q_2.

Задача 2. Пусть в углах квадрата со стороной *a=20 см* помещены электрические заряды q_i, показанные на рис. Найти силу, действующую на заряд q_1 в левом нижнем углу. Положить *q=0.1 мкКл, a=20 см*.



Решение:

Подобные задачи можно решать разными способами, исходя из геометрии системы. Поместим начало координат в центр квадрата (точка *0*) и направим оси, как показано на рис. Пронумеруем точки в соответствии с индексом находящегося в ней заряда. Запишем теперь радиус-векторы углов квадрата в координатной форме *(x, y)*:

$$\vec{r}_1 = \left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right); \quad \vec{r}_2 = \left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right);$$
$$\vec{r}_3 = \left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right); \quad \vec{r}_4 = \left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right). \tag{1}$$

Сила, действующая на заряд q_1, со стороны других зарядов, записываются согласно закону Кулона и принципу суперпозиции

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=2,3,4} \frac{q_1 q_i}{r_{i1}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{i1}}{r_{i1}}, \tag{2}$$

где $\vec{r}_{i1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_i$.

Имея в виду выражения (1), получаем для векторов, соединяющих заряды *2, 3, 4* с зарядом *1* следующие выражения:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = a(0,\ -1); \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = a(-1,\ -1);$$
$$\vec{r}_{41} = a(-1,\ 0); \tag{3}$$
$$r_{21} = a; \quad r_{31} = a\sqrt{2}; \quad r_{41} = a.$$

Подставляем теперь (3) в (2) вместе с выражениями для зарядов q_i, получаем вектор искомой силы $\boldsymbol{F}_1$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{2q^2}{a^2}(0,\ -1) - \frac{2q^2}{2a^2\sqrt{2}}(-1,\ -1) - \frac{4q^2}{a^2}(-1,\ 0) \cdot \right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Абсолютную величину искомой силы находим по теореме Пифагора

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \sqrt{\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{21 + 2\sqrt{2}}.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$F_1 = \frac{\left(0.1 \cdot 10^{-6}\right)^2}{4\pi \cdot \left(0.85 \cdot 10^{-12}\right) \cdot 0.05^2} \cdot \sqrt{21 + 2\sqrt{2}} \approx 0.176\ H.$$

Направление этой силы задается единичным вектором:

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{F}_1}{F_1} = \frac{1}{\sqrt{21+2\sqrt{2}}}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}},\ -2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0.964,\ -0.265\right).$$

Иными словами, сила $\boldsymbol{F_1}$ направлена почти по $0x$, слегка отклоняясь от нее вниз (отрицательный знак второй компоненты вектора) на угол:

$$\varphi = arctg\left(\frac{-0.265}{0.964}\right) = -arctg\left(0.275\right) = 15.4°.$$

Задача 3. Проводящий диск радиусом *20 см* вращается с угловой скоростью *1 600 рад/с*. Учитывая, что ток в проводнике переносится электронами, определить разность потенциалов между осью диска и его периферией.

Решение:

Сила, сообщающая электрону, который движется внутри диска по окружности радиусом *r*, центростремительная ускорению, равна:

$$F = m_e\omega^2 r,$$

Эта сила обеспечивается перераспределением концентрации электронов в диске, создающей радиальное электрическое поле *E*. Условие равновесия электрона имеет вид:

$$m_e\omega^2 r = eE = -e\frac{d\varphi}{dr}.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим искомую разность потенциалов.

Проинтегрируем обе части этого уравнения:

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi_R} d\varphi = \frac{m_e\omega^2}{e}\int_0^R r\,dr,$$

где φ_0 и φ_R – соответственно потенциалы в центре и на периферии диска. В результате получаем для разности потенциалов:

$$U = \varphi_0 - \varphi_R = \frac{m_e\omega^2 R^2}{2e} = \frac{\left(9.1\cdot 10^{-31}\right)\cdot\left(1\,600\right)^2\cdot 0.2^2}{2\cdot\left(1.6\cdot 10^{-19}\right)} = 2.9\cdot 10^{-7}\ В.$$

В принципе, полученная формула, может быть использована для определения отношения заряда электрона к его массе. Однако практически это крайне затруднительно, поскольку столь малое напряжение в движущейся с очень высокой скоростью системе измерить весьма сложно.

Задача 4. Сферическая капля воды имеет на поверхности потенциал *500 В*. Каким будет значение потенциала на поверхности новой сферической капли, образовавшейся при слиянии двух прежних?

Решение:

Потенциал на поверхности заряженной сферы (или шара – в данном случае это дает одинаковый результат) равен:

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

откуда находим радиус капли

$$r = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varphi_0}.$$

Объем капли при этом будет:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

При слиянии n капель образуется новая капля, с увеличенным в n раз объемом:

$$V_n = nV_0 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

откуда можно найти ее радиус.

Новая капля будет нести также и увеличенный заряд:

$$Q = nq_0.$$

Тогда можно найти потенциал поверхности новой капли.

Радиус новой капли будет равен:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V_n}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3n\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi}} = r\sqrt[3]{n}.$$

Отсюда находим для потенциала на поверхности новой капли выражение:

$$\varphi_n = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = n^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \varphi_0 n^{\frac{2}{3}}.$$

При слиянии двух капель получаем для потенциала:

$$\varphi_2 = 500 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \approx 795\ В.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая частица обладает элементарным отрицательным электрическим зарядом?
2. Чему равен элементарный заряд?
3. Что такое точечный заряд?
4. Сформулировать закон Кулона.
5. Чему равна электрическая постоянная?
6. Дать определение напряженности электростатического поля.
7. Сформулировать принцип суперпозиций.
8. Дать определение силовой линии электростатического поля.
9. Перечислить свойства силовых линий.
10. Какое поле называется однородным.
11. Дать определение потенциала электростатического поля.
12. Чему равна работа сил электростатического поля по перемещению электрического заряда?
13. Что такое эквипотенциальная поверхность?