4. Законы сохранения
4.1. Сохраняющиеся величины

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется ***механической системой***.

Тела системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, подразделяются на: ***внутренние и внешние***. ***Внутренними*** называют силы, с которыми тела системы действуют друг на друга, ***внешними*** — силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. Система, в которой внешние силы отсутствуют, называется ***замкнутой*** (или изолированной).

Для замкнутых систем остаются постоянными (сохраняются) три физические величины: энергия, импульс и момент импульса. Соответственно имеются ***три закона сохранения:*** закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Эти законы тесно связаны со свойствами времени и пространства.

Кроме названных, есть еще ряд законов сохранения (например, закон сохранения электрического заряда), с которыми мы познакомимся в соответствующих разделах курса. Законы сохранения являются фундаментальными законами природы.

Рассматриваемые в механике законы сохранения энергии, импульса и момента импульса оказываются точными законами и имеют всеобщий характер — они применимы не только к механическим явлениям, но и вообще ко всем явлениям природы, в частности они соблюдаются в релятивистской области и в мире элементарных частиц.

Законы сохранения не зависят от природы и характера действующих сил. Поэтому с их помощью можно делать ряд важных заключений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы остаются неизвестными.

4.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему N материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_N$, положения которых задаются радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$, а их импульсы равны $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, соответственно (см. рис. 4.2.1).

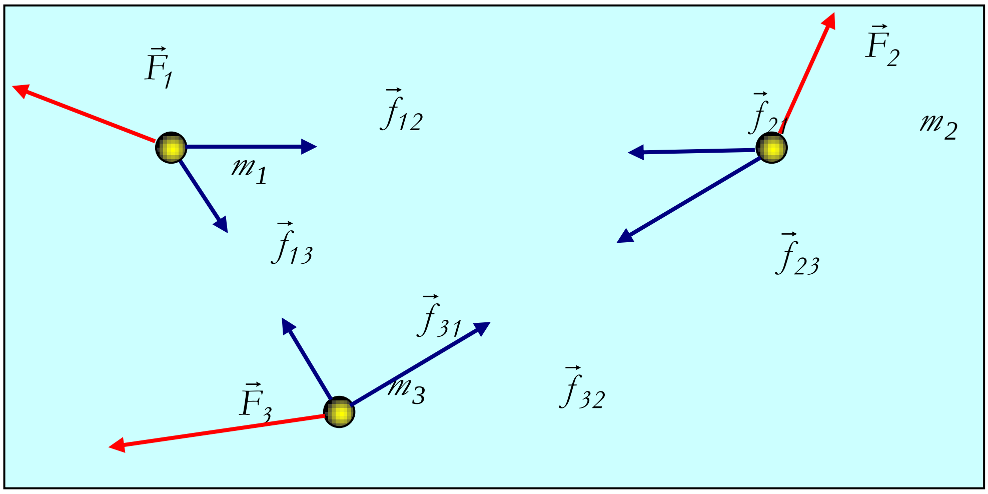


Рис. 4.2.1.

Среди сил, действующих на эти материальные точки, есть внутренние силы между телами, входящими в систему, и внешние силы, действующие на систему со стороны тел, в нее не включенных. Внутренние силы будем обозначать как: $\boldsymbol{f_{ij}}$, где индексы показывают, что данная сила действует на тело с номером *i* со стороны тела с номером *j*. Кроме того, на тело с номером действует какая-то внешняя сила - $\boldsymbol{F_i}$.

Напишем уравнение второго закона Ньютона (скорость изменения импульса тела равна сумме всех действующих на тело сил) для всех *N* материальных точек системы.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1;$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \dots \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N3+1} + \dots \vec{f}_{NN-1} + \vec{F}_N.$$

Сложим вместе эти *N* уравнений. Сумма всех внутренних сил в правой части получится равной нулю. Действительно, она состоит из парных слагаемых типа:

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}.$$

По третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек *i* и *j* равны по величине и противоположно направлены (действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки):

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}.$$

Поэтому в правой части у нас останется только сумма всех внешних сил:

$$\frac{d\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N\right)}{dt}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots\vec{F}_N.$$

Сумма

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

импульсов частиц, образующих механическую систему, называется ***импульсом системы***.

Импульс системы удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \qquad (4.2.1)$$

При отсутствии внешних сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0,$$

Откуда:

$$\vec{p}=const.$$

Суммарный импульс

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

замкнутой системы ***постоянен***.

В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы. Поведение системы на новом месте будет таким же, каким оно было бы на прежнем месте.

Возможны ситуации, когда внешние силы не равны нулю, но равна нулю проекция их равнодействующей на какое-то направление. Тогда, как следует из векторного соотношения второго закона Ньютона для системы частиц, будет сохраняться проекция импульса системы на это же направление.

Снова рассмотрим ту же систему материальных точек. Построим радиус-вектор $\vec{r}_C$ по следующему правилу:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} \qquad (4.2.2)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-той материальной точки системы, а m_i – ее масса.

Радиус-вектор $\vec{r}_C$ определяет положение в пространстве ***центра масс*** системы. Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Спроектировав $\vec{r}_c$ на координатные оси, получим декартовы координаты центра масс:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i,\ \ y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i,\ z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \qquad (4.2.3)$$

Продифференцировав $\vec{r}_c$ по времени, найдем скорость центра масс:

$$\vec{v}_{\mathbf{c}} = \dot{\vec{r_c}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r_i}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m} \qquad (4.2.4)$$

($\vec{v}_i$- скорость, $\vec{p}_i$- импульс i-й частицы, $\vec{p}$ - импульс системы).

Согласно (4.2.4) суммарный импульс системы можно представить в виде произведения массы системы на скорость центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c \qquad (4.2.5)$$

Подставив это выражение в формулу (4.2.1), получим уравнение движения центра масс:

$$\frac{d}{dt(m\vec{v}_c)} = m\dot{\vec{v}}_c = m\vec{a}_{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad (4.2.6)$$

($\vec{a}_c$ — ускорение центра масс). Таким образом, центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы. Для замкнутой системы $\vec{a}_c$ = 0.. Это означает, что центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно либо покоится.

Если имеется система материальных точек, внутреннее расположение и движение которых нас не интересует, мы вправе считать ее материальной точкой с координатами радиус-вектора центра инерции и массой, равной сумме масс материальных точек системы.

Если связать с центром масс замкнутой системы материальных точек (частиц) систему отсчета (ее называют ***системой центра масс***), то полный импульс всех частиц в такой системе окажется равным нулю. Таким образом, в системе центра масс замкнутая система частиц ***как целое*** покоится, и существует только движение частиц относительно центра масс. Поэтому ясно выявляются свойства внутренних процессов, протекающих в замкнутой системе.

В случае, когда системой является тело с непрерывным распределением масс, определение центра масс остается по существу тем же. Окружаем произвольную точку $\mathbf{r}$ в нашем теле небольшим объемом dV. Масса, заключенная в этом объеме, равна $dm(\mathbf{r})=\rho(\mathbf{r})dV$, где ρ – плотность вещества тела, которая может и не быть постоянной по его объему. Сумма по всем таким элементарным массам заменяется теперь на интеграл по всему объему V тела, так что для положения центра масс тела получается выражение:

$$\vec{R}_C = \frac{\int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{\int\limits_V \rho(\vec{r})dV}.$$

Если вещество тела однородно, плотность его постоянна, и ее можно вынести из-под знака интеграла, так что она сократится в числителе и знаменателе. Тогда выражение для радиус-вектора центра масс тела принимает вид:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{V}\int\limits_V \vec{r}dV, \tag{4.2.7}$$

где V – объем тела.

И, в случае непрерывного распределения масс, справедливо утверждение, что ***центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу внешних сил.***

4.3. Работа

Работа определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения:

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = F ds \cos\alpha ,\qquad (4.3.1)$$

где F - модуль силы, ds - путь, пройденный точкой приложения силы, α - угол между векторами силы и перемещения $d\vec{s}$.

Работа – алгебраическая величина, ее знак зависит от знака *cos* α. Положительная работа совершается силой, если ее направление составляет острый угол α с направлением движения тела. Отрицательная работа совершается силой, направление которой составляет тупой угол α с направлением движения, при этом сила тормозит это движение. Величина: $F_s = F\cos\alpha$ – это проекция силы ***F*** на направление перемещения. Следовательно,

$$dA = F_S ds .\qquad (4.3.2)$$

Полная работа силы находится как сумма (интеграл) элементарных работ по всей траектории *L* точки:

$$A = \int_L \vec{F}d\vec{s} = \int_L F_S ds .\qquad (4.3.3)$$

Графически работу можно представить как площадь под кривой $F_s(s)$ (рис. 4.3.1), причем площади под осью абсцисс следует приписывать отрицательное значение.

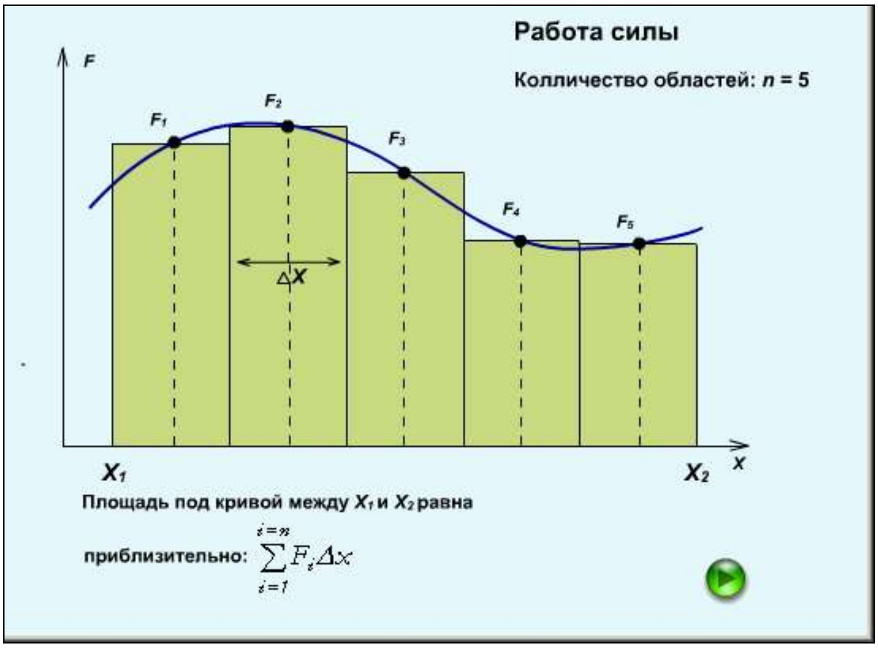


Рис. 4.3.1.

Если перемещение ортогонально силе, то $\cos\alpha = 0$ и работа равна нулю: $dA = 0$.

Если на тело действует несколько сил, то:

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = \left(\sum \vec{F}_i\right)d\vec{s} = \sum (\vec{F}_i d\vec{s}) = \sum dA_i$$

то есть работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности.

Рассмотрим для примера работу, совершаемую внешней силой по сжатию и растяжению пружины с жесткостью к. Направим ось *0x* вдоль пружины, причем за начало координат *0* выберем положение свободного конца пружины, находящейся в ненагруженном состоянии. Процесс сжатия/растяжения представляем как последовательность равновесных состояний: в каждый момент времени прилагаем внешнюю силу, равную по величине силе упругости со стороны пружины. Тогда согласно третьему закону Ньютона и закону Гука:

$$F_{ВН} = -F_{УПР} = \kappa x,$$

где x – удлинение пружины. При положительных x (растяжение пружины) внешняя сила направлена направо, при отрицательных (сжатие) — налево (см. рис. 4.3.2).

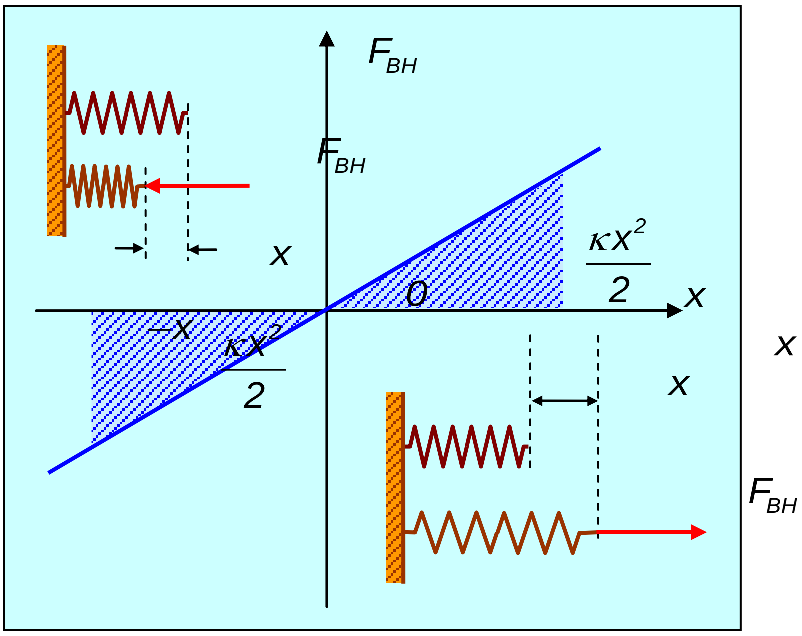


Рис. 4.3.2.

Скалярное произведение для элементарной работы внешней силы имеет в этом случае вид:

$$dA = kxdx,$$

так что для полной ***работы упругой деформации пружины*** получаем:

$$A = \int_0^x \kappa x \cdot dx = \frac{\kappa x^2}{2}. \qquad (4.2.4)$$

Заметим, что *A* не зависит от знака *x*: и при растяжении, и при сжатии пружины внешняя сила совершает одну и ту же положительную работу.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется ***мощностью.***

Мощность P определяется соотношением:

$$P = \frac{dA}{dt}, \qquad (4.3.5)$$

где dA — работа, совершаемая за время dt. Подставив вместо dA выражение (4.3.1) и приняв во внимание, что ds/dt есть скорость v, получим:

$$P = \frac{\vec{F}(d\vec{s})}{dt} = \vec{F}\vec{v} \qquad (4.3.6)$$

Таким образом, мощность равна ***скалярному произведению силы на скорость точки приложения силы.***

Единицей работы служит работа, совершаемая на пути в один метр силой в один ньютон, действующей в направлении перемещения. Эта единица называется джоулем (Дж).

Единицей мощности является такая мощность, при которой за одну секунду совершается работа, равная одному джоулю. Эта единица называется ваттом (Вт). В технике иногда применяется единица мощности, именуемая лошадиной силой (л. с.) и равная 736 Вт.

4.4. Кинетическая энергия

Если внешняя сила действует на покоящееся тело, последнее приобретает некоторую скорость и способно само совершить работу.

Запишем уравнение движения материальной точки:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила. Умножим уравнение движения скалярно на $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$:

$$m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

В правой части уравнения мы получили элементарную работу dA, в левой – выражение, которое можно преобразовать к виду полного дифференциала:

$$m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2} d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

В результате имеем:

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \qquad (4.4.1)$$

то есть элементарная работа, совершенная силой $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении $d\vec{s}$ материальной точки массой m равна приращению величины $mv^2/2 + const$ – кинетической энергии, определяемой с точностью до произвольной постоянной. Получается, что сила совершает некоторую работу, и на такое же количество возрастает кинетическая энергия тела (обычное обозначение K). При отрицательной работе силы кинетическая энергия тела убывает: энергия движения расходуется на преодоление противодействующей ему силы. Обычно считают, что покоящееся тело кинетической энергией не обладает, так что произвольную постоянную полагают равной нулю:

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}.} \qquad (4.4.2)$$

Кинетическую энергию материальной точки можно также выразить через ее импульс $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{v}$:

$$\boxed{K = \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}}{2} = \frac{p^2}{2m}.} \qquad (4.4.3)$$

Если $\vec{F} \equiv 0$ (система замкнута), то работа сил равна нулю, следовательно, равно нулю приращение кинетической энергии. Иными словами, кинетическая энергия в этом случае сохраняется: $K = const$.

4.5. Консервативные силы

Кроме контактных взаимодействий, возникающих между соприкасающимися телами, наблюдаются также взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Примерами могут служить взаимодействие между Солнцем и Землей, Землей и Луной, Землей и поднятым над ее поверхностью телом, взаимодействие между наэлектризованными телами. Подобные взаимодействия осуществляются посредством ***физических полей***, которые представляют собой особую форму материи. Каждое поле создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое ***силовым полем.***

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалась частица, а зависит лишь от начального и конечного положений частицы, называются ***консервативными.***

Легко показать, что работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю.

Если силы, действующие на частицу, во всех точках поля одинаковы по модулю и направлению, поле называется однородным. Если, кроме того, поле не изменяется со временем, оно называется стационарным. В случае однородного стационарного поля $\vec{F}$ = const.

Можно доказать, что силы, действующие на частицу в однородном стационарном поле, консервативны.

Примером однородного стационарного поля может служить поле силы тяжести в ограниченной области вблизи поверхности Земли. Согласно (4.5.2) работа, совершаемая над частицей силой тяжести, независимо от формы траектории, равна:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2), \qquad (4.5.3)$$

где $h_1 — h_2$ есть проекция перемещения s_{12} на направление силы, т. е. на направление вниз по вертикали. Следовательно, сила тяжести $F_т = mg$ консервативна.

Поле, в любой точке которого направление силы, действующей на частицу, проходит через неподвижный центр, а модуль силы зависит только от расстояния r до этого центра, называется центральным.

Направлена сила либо от центра (как на рис. 4.5.2), либо к силовому центру.

Найдем работу, совершаемую над частицей в центральном стационарном, т. е. не изменяющемся со временем, силовом поле. В таком поле модуль силы определяется функцией F(r). Представим элементарную работу в виде:

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = F(r)ds_F,$$

где F(r) — модуль силы, а ds_F — проекция перемещения на направление силы. Из рис. 4.5.2, выполненного для силы, направленной от центра (т. е. для случая отталкивания частицы от силового центра), следует, что ds_F можно положить равной dr. Очевидно, что для силы, направленной к центру (т. е. для случая притяжения частицы к центру), ds_F будет равна -dr (приращению r, взятому с обратным знаком). Соответственно dA равна F(r)dr в случае отталкивания и -F(r)dr в случае притяжения.

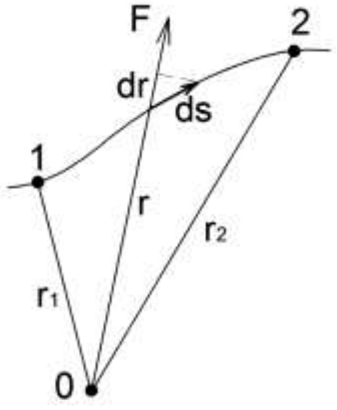


Рис. 4.5.2.

Работу на всем пути от точки 1 до точки 2 найдем, взяв интеграл от dA, В результате получим выражение:

$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr$ - для случая отталкивания (4.5.4)

$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr$ - для случая притяжения (4.5.5)

Оба интеграла зависят только от вида функции F(r) и от пределов интегрирования r_1 -и r_2; от формы траектории они никак не зависят. Отсюда заключаем, что силы центрального стационарного поля являются консервативными.

4.6. Потенциальная энергия

Сопоставим каждой точке поля консервативных сил значение некоторой функции координат П(x,y,z), которую определим следующим образом. Произвольно выбранной точке О припишем значение функции $П_0$, взятое также произвольно. Значение функции в любой другой точке В положим равным сумме $П_0$ и работы $A_{во}$, совершаемой силами поля при перемещении частицы из точки В в точку О:

$$П_В = П_0 + A_{В0} \tag{4.6.1}$$

Поскольку работа $A_{во}$ не зависит от пути, значения функции П во всех точках поля определяются однозначно. Функция (4.6.1) имеет, как и кинетическая энергия К, размерность работы и называется ***потенциальной энергией частицы во внешнем силовом поле***.

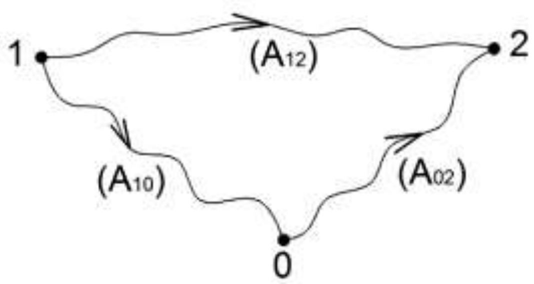


Рис. 4.6.1

Посчитаем разность значений потенциальной энергии для точек 1 и 2 (рис. 4.6.1). Согласно формуле (4.6.1):

$$П_1 - П_2 = (П_0 + A_{10}) - (П_0 + A_{20}) = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{20}$$

(мы воспользовались тем, что $A_{20} = -A_{02}$). Правая часть полученного соотношения дает работу, совершаемую над частицей силами поля на пути из точки 1 в точку 2, проходящем через точку О. Вследствие независимости работы от формы пути такая же работа A_{12} совершается на любом другом пути. Следовательно, мы приходим к выводу, работа консервативных сил равна разности значений функции П в начальной и конечной точках пути, т.е. убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = П_1 - П_2 \tag{4.6.2}$$

Из (4.6.1) следует, что потенциальная энергия определяется с точностью до неизвестной аддитивной постоянной $П_0$. Однако, это не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит либо разность значений потенциальной энергии в двух точках, либо производная функции П по координатам.

Ранее мы нашли, что работа силы тяжести равна:

$$А_{12} = mgh_1 - mgh_2 \qquad (4.6.3)$$

Сопоставление формул (4.6.2.) и (4.6.3) дает, что потенциальная энергия частицы массы m в поле сил тяжести определяется выражением:

$$П = mgh, \qquad (4.6.4)$$

где h отсчитывается от произвольного уровня.

В отличие от кинетической энергии, которая всегда положительна, потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть частица движется в поле консервативных сил. При переходе из точки 1 в точку 2 над ней совершается работа (4.6.2). Эта работа равна приращению кинетической энергии частицы. Приравняв оба выражения для работы, получим соотношение $П_1$ - $П_2$ = $К_2$ – $К_1$, из которого следует, что:

$$К_1 + П_1 = К_2 + П_2 \qquad (4.6.5)$$

Величина Е, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется ***полной механической энергией частицы.***

Формула (4.6.5) означает, что $Е_1$ = $Е_2$, т. е. что ***полная механическая энергия частицы, движущейся в поле консервативных сил, остается постоянной.*** Это утверждение выражает закон сохранения механической энергии для системы, состоящей из одной частицы.

В случае поля сил тяжести полная энергия определяется выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh \qquad (4.6.6)$$

.

Кинетическая и потенциальная энергии могут превращаться друг в друга. Однако, если на частицу не действуют никакие силы, кроме обусловивших потенциальную энергию консервативных сил, полная энергия остается постоянной. Пусть частица свободно падает с высоты h. Первоначально ее кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия равна mgh. Формулы кинематики дают для скорости в конце падения значение $v = \sqrt{2gh}$. Следовательно, в конце падения кинетическая энергия частицы равна:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh$$

.

Потенциальная же энергия в конце падения равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия превратилась в эквивалентное количество кинетической энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц. Силы, с которыми частицы действуют друг на друга, будем предполагать направленными вдоль проходящей через обе частицы прямой и зависящими только от расстояния между частицами. Эти силы для данной системы являются внутренними. Отметим, что указанными свойствами обладают гравитационные и электрические кулоновские (т. е. подчиняющиеся закону Кулона) силы.

Найдем работу внутренних сил, совершаемую при перемещении первой частицы на $d\vec{r}_1$ а второй частицы на $d\vec{r}_2$ (напомним, что перемещение частицы равно приращению ее радиус-вектора). Из рис. 4.6.2 вытекает, что эту работу можно представить в виде:

$$dA = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}(d\vec{r}_1 + d\vec{r}_{12})$$
$$= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_{12}$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, так что $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Поэтому выражение для работы внутренних сил упрощается следующим образом:

$$dA = \vec{F}_{21}d\vec{r}_{12}. \qquad (4.6.7)$$

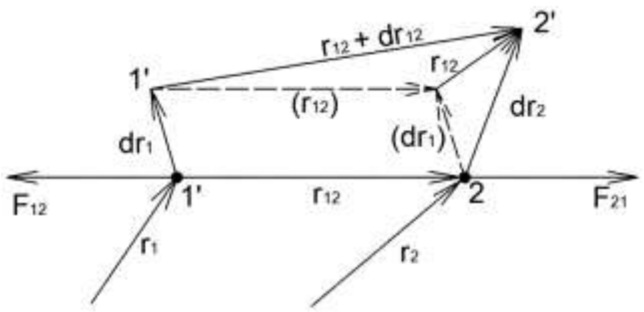


Рис. 4.6.2.

Такая же работа была бы совершена, если бы первая частица была неподвижна и находилась в начале координат, а вторая частица получила перемещение перемещение $d\vec{r}_{12}$, равное приращению ее радиус-вектора $\vec{r}_{12}$.

Отсюда следует, что работу, совершаемую внутренними силами при движении обеих частиц, можно вычислять, считая одну из частиц неподвижной, а вторую движущейся в центральном поле сил, создаваемом первой частицей.

В предыдущем параграфе было выяснено, что центральные силы консервативны, вследствие чего их работу можно вычислять как убыль потенциальной энергии. В рассмотренном случае эта энергия обусловлена взаимодействием частиц, входящих в систему; поэтому ее называют ***потенциальной энергией взаимодействия или взаимной потенциальной энергией.***

Когда первая частица неподвижна и находится в начале координат, в выражении) (4.6.7) можно опустить индексы и написать его в виде:

$$dA = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (4.6.8)$$

Здесь $\vec{F}$ — центральная сила, действующая на вторую частицу, $\vec{r}$ - радиус-вектор этой частицы.

Если частица притягивается к силовому центру, работа на произвольном пути от точки 1 до точки 2 определяется выражением (4.5.5). Приравняв эту работу убыли потенциальной энергии (см. (4.6.2)), получим:

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \Pi_1 - \Pi_2 \qquad (4.6.9)$$

В случае гравитационного притяжения частиц:

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (4.6.9)$$

Следовательно,

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = -Gm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r_2} - \frac{Gm_1 m_2}{r_1}. \qquad (4.6.10)$$

Сопоставление соотношений (4.6.9) и (4.6.10) дает для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух частиц выражение:

$$\Pi = \frac{Gm_1 m_2}{r}. \qquad (4.6.11)$$

Потенциальная энергия взаимодействия, как и потенциальная энергия во внешнем силовом поле, определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Действительно, прибавление к выражению (4.6.11) произвольной константы не изменяет значения работы, вычисленного по формуле (4.6.10). Обычно эту константу принимают равной нулю, тем самым полагая, что при бесконечно большом расстоянии между частицами (т.е. когда они не взаимодействуют) потенциальная энергия обращается в нуль. При такой нормировке потенциальная энергия оказывается отрицательной. Это согласуется с тем, что при сближении частиц сила притяжения между ними совершает положительную работу и соответственно убыль потенциальной энергии также должна быть положительной.

Выражение, аналогичное (4.6.11), получается и для взаимной энергии двух точечных зарядов q_1 и q_2, модуль силы взаимодействия между которыми изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что в этом случае:

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r}. \qquad (4.6.12)$$

Можно показать, что взаимная потенциальная энергия системы, состоящей из N частиц, силы взаимодействия между которыми консервативны, слагается из энергий взаимодействия частиц, взятых попарно. Например, в случае трех частиц:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ (i\neq k)}}^{3} \Pi_{ik}. \qquad (4.6.13)$$

где Π_{12} — энергия взаимодействия первой и второй частиц и т. д. Это выражение можно представить в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \Pi_{ik} \qquad (4.6.14)$$

- где индексы i и k принимают, независимо друг от друга, значения 1, 2, 3; случай i = k исключается. В этом выражении содержится 3·2 = 6 слагаемых. Множитель 1/2 появился вследствие того, что энергия взаимодействия, скажем, первой и второй частиц содержится в сумме два раза в виде Π_{12} и Π_{21}.

В случае любого N:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \Pi_{ik}. \qquad (4.6.14)$$

В этой сумме имеется N (N—1) слагаемых (каждая из N частиц взаимодействует с N—1 частицей).

Взаимная энергия системы частиц зависит только от их взаимного расположения (от конфигурации системы). Если при движении частиц конфигурация системы не изменяется, то потенциальная энергия остается неизменной и внутренние силы работы не совершают.

Потенциальной энергией обладают не только системы обособленных взаимодействующих частиц, но и сплошные деформированные тела (например, растянутая или сжатая пружина). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между витками пружины). В п. 3 мы установили, что как для растяжения, так и для сжатия пружины на величину x нужно совершить работу $A = kx^2/2$. Эта работа идет на приращение потенциальной энергии пружины. Следовательно, зависимость потенциальной энергии пружины от удлинения x имеет вид:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.6.15}$$

(мы предположили потенциальную энергию недеформированной пружины равной нулю).

4.7. Закон сохранения энергии

Рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих друг с другом частиц, находящихся под воздействием внешних как консервативных, так и неконсервативных сил. Силы взаимодействия между частицами предполагаются консервативными. Определим работу, совершаемую над частицами при перемещении системы из одного места в другое, сопровождающемся изменением конфигурации системы.

Работа внешних консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы П' во внешнем силовом поле:

$$A_{12,\ \text{внеш., консерв.}} = \Pi_1' - \Pi_2'$$

где П' определяется формулой (4.6.2).

Работа внутренних сил равна убыли взаимной потенциальной энергии частиц:

$$A_{12,\ \text{внутр.}} = \Pi_1'' - \Pi_2'' \tag{4.6.15}$$

где П´´ определяется формулой (4.6.14).

Работу неконсервативных сил обозначим A_{12}^*.

Суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической энергии системы К, которая равна сумме кинетических энергий частиц:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}\ . \tag{4.7.1}$$

Следовательно,

$$(\Pi_1' - \Pi_2') + (\Pi_1'' - \Pi_2'') + A^*_{12} = K_2 - K_1$$

Перегруппируем члены этого соотношения следующим образом:

$$(К_2 + П_2' + П_2'') – (К_1 + П_1' + П_1'') = A^*_{12}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий представляет собой полную механическую энергию системы Е:

$$Е = К + П' + П''. \qquad (4.7.2)$$

Таким образом, мы установили, что работа неконсервативных сил равна приращению полной энергии системы:

$$Е_2 – Е_1 = A^*_{12} \qquad (4.7.3)$$

Из (4.7.3) следует, что в случае, когда неконсервативные силы отсутствуют, полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$Е = К + П' + П'' \qquad (4.7.4)$$

Мы пришли ***к закону сохранения механической энергии,*** который гласит, что полная механическая энергия системы материальных, точек, находящихся под действием только консервативных сил, остается постоянной.

Если система замкнута и силы взаимодействия между частицами консервативны, то полная энергия содержит лишь два слагаемых: Е = К + П (П— взаимная потенциальная энергия частиц).

В этом случае закон сохранения механической энергии заключается в утверждении, что: ***полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.***

В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, т. е. равнозначность всех моментов времени, заключающаяся в том, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы. Поведение системы, начиная с момента t_2, будет таким же, каким оно было бы, начиная с момента t_1.

При наличии неконсервативных сил полная механическая энергия системы не сохраняется (см. формулу (4.7.3)). Неконсервативными, в частности, являются силы трения и силы сопротивления среды. Работа этих сил, как правило, отрицательна. Поэтому при наличии сил трения и сил сопротивления среды полная механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их нагреванию. Такой процесс называется диссипацией энергии (латинское слово «диссипация» означает «рассеяние»). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными. Отметим, что неконсервативные силы не обязательно являются диссипативными.

Закон сохранения энергии имеет всеобщий характер. Он применим ко всем без исключения процессам, происходящим в природе. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда остается постоянным; энергия лишь может переходить из одной формы в другую. Этот факт является проявлением неучтожимости материи и ее движения.

4.8. Закон сохранения момента импульса

Сохранения момента импульса вытекает из уравнения (3.4.7). Если система замкнута (т. е. внешних сил нет), правая часть этого равенства равна нулю и, следовательно, вектор $\vec{L}$ не изменяется со временем.

Отсюда вытекает ***з а к о н с о х р а н е н и я м о м е н т а и м п у л ь с а***, который гласит, что ***момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным только консервативные силы, остается постоянной.***

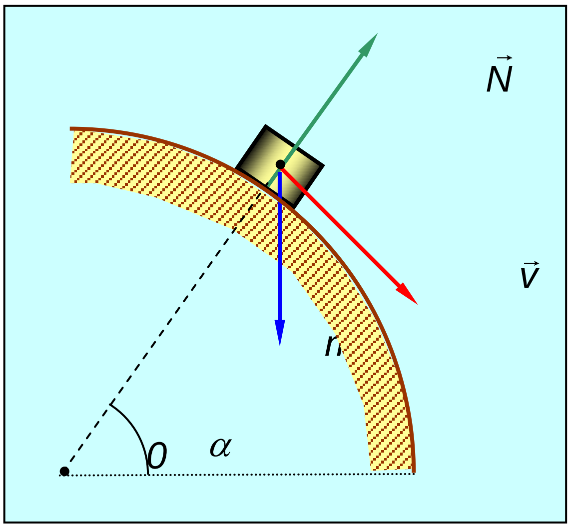
Разумеется, будет оставаться постоянным и момент импульса замкнутой системы относительно любой оси, проходящей через точку О.

Момент импульса сохраняется и для незамкнутой системы, если сумма моментов внешних сил равна нулю. Согласно (3.4.8) сохраняется момент импульса системы относительно оси z при условии, что сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю.

В основе закона сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Поворот замкнутой системы частиц без изменения их взаимного расположения (конфигурации) и относительных скоростей не изменяет механических свойств системы. Движение частиц друг относительно друга после поворота будет таким же, каким оно было бы, если бы поворот не был осуществлен.

Примеры решения задач

Задача 1. С вершины гладкой сферы соскальзывает небольшое тело (см. рис.). На какой высоте оно оторвется от поверхности сферы, если радиус сферы *2 м*?



Решение:

По мере движения тела по поверхности сферы его скорость увеличивается, а сила нормального давления на сферу со стороны тела уменьшается. Когда сила нормального давления обратится в нуль, тело оторвется от поверхности сферы.

При скольжении тела по гладкой сфере сохраняется его полная механическая энергия, что позволяет определить скорость тела в любой точке траектории.

Второй закон Ньютона для тела имеет вид:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Условие отрыва тела от поверхности имеет вид:

$$\vec{N} = 0.$$

Подставив значение силы реакции а точке отрыва во второй закон Ньютона для тела и спроецировав полученное уравнение на радиальное направление, получим, принимая во внимание, что тело движется по окружности,

$$mg\sin\alpha_* = \frac{mv^2}{R}.$$

Подставив в полученное уравнение найденную из закона сохранения энергии скорость тела, можно определить угол α_*, при котором произойдет отрыв, а затем и высоту, на которой он произойдет.

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии тела центр *0* сферы. Тогда закон сохранения энергии для тела принимает вид:

$$mgR = mgR\sin\alpha + \frac{mv^2}{2},$$

откуда:

$$v^2 = 2gR(1 - \sin\alpha).$$

Подставив найденное значение скорости в уравнение второго закона Ньютона, получим:

$$\sin\alpha_* = \frac{2}{3}.$$

Тогда находим высоту (отсчитываемую от центра сферы), на которой произойдет отрыв тело от поверхности:

$$h_* = R\sin\alpha_* = \frac{2R}{3} = \frac{2\cdot 2}{3} = 1.33\ м.$$

Задача 2. Два шара массами $m_1=2.5\ кг$ и $m_2=1.5\ кг$ движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1=6\ м/с$ и $v_2=2\ м/с$. Определить кинетическую энергию шаров после удара и энергию, затраченную на деформацию шаров при ударе. Удар считать центральным и абсолютно неупругим.

Решение:

При абсолютно неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса. Часть механической энергии переходит в процессе столкновения во внутреннюю энергию шаров.

После неупругого соударения шары движутся совместно с одинаковой скоростью $\boldsymbol{u}$. Эта скорость определяется из закона сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Проецируем векторы скоростей на направление скорости первого шара, считая его положительным. Тогда скорость второго шара будет отрицательной, и мы получим:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Отсюда находим скорость шаров после удара:

$$u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2.5\cdot 6 - 1.5\cdot 2}{2.5 + 1.5} = 3\ \frac{м}{с}.$$

Положительность и означает, что шары движутся в ту же сторону, куда двигался первый шар.

Кинетическая энергия шаров после удара равна:

$$K = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{4\cdot 3^2}{2} = 18\ Дж.$$

Энергия деформации равна разности энергий шаров до и после удара:

$$E = K_1 + K_2 - K = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} =$$

$$= \frac{2.5\cdot 6^2}{2} + \frac{1.5\cdot 2^2}{2} - 18 = 30\ Дж.$$

Задача 3. Шар массой m_1, движущейся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар центральный. Какую долю своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение:

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и полной механической энергии системы частиц. Поскольку удар центральный, то векторное уравнение закона сохранения импульса следует спроецировать на направление движения шаров.

Пусть u_1 и u_2 – скорости шаров после соударения. Кинетическая энергия первого шара до удара равна:

$$K_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2};$$

кинетические энергии шаров после удара равны, соответственно,

$$K_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2}; \quad K_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Доля энергии ε, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:

$$\varepsilon = \frac{K_2}{K_0} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2.$$

Для определения ε надо найти скорость второго шара после столкновения. При ударе абсолютно упругих тех одновременно выполняются два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения энергии в механике. Пользуясь этими законами, найдем u_2.

По закону сохранения импульса в проекции на направление движения шаров, учитывая, что второй шар до удара покоился, имеем:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

В этом уравнении две неизвестных скорости шаров после удара. Закон сохранения энергии в механике дает второе уравнение:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Решая совместно полученные уравнения, находим скорость второго шара после удара:

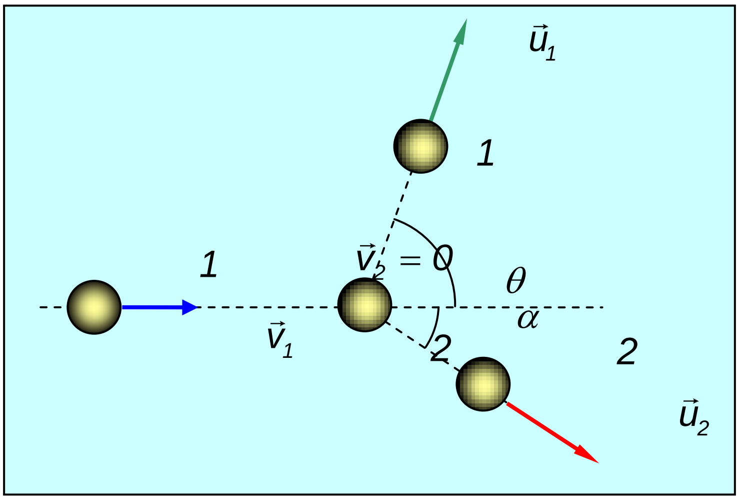
$$u_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя u_2 в выражение для доли переданной энергии, приходим к окончательному ответу:

$$\varepsilon = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Как видно из полученного соотношения, доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. При этом массы m_1 и m_2 входят совершенно симметрично: доля передаваемой энергии не зависит от того, какой именно шар первоначально покоился. Если массы шаров равны, то ε достигает максимального возможного значения: при $m_1=m_2$ получается $\varepsilon=1$. Иными словами, первый шар передает всю свою энергию второму и, стало быть, после удара остается в состоянии покоя.

Задача 4. Упруго сталкиваются два одинаковых шара, причем один из них покоится, а второй налетает на него со скоростью $v_1=0.5$ *м/с*. После соударения этот шар отлетает под углом $\theta=60°$ к первоначальному направлению движения (см рис.). Найти угол α между скоростью второго шара после удара и первоначальным направлением.



Решение:

Воспользоваться законами сохранения импульса и энергии системы шаров в векторной форме. Для нахождения угла между векторами применить формулу для скалярного произведения.

Запишем для системы шаров законы сохранения энергии и импульса (в векторной форме):

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2};$$

$$m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2.$$

Поскольку массы шаров одинаковы, закон сохранения энергии сводится к равенству суммы квадратов скоростей:

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

а закон сохранения импульса – к равенству суммы скоростей до и после соударения:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos(\theta + \alpha).$$

Вычитая из полученного соотношения преобразованное уравнение закона сохранения энергии, получаем:

$$2u_1u_2\cos(\theta + \alpha) = 0,$$

откуда

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Вывод: при столкновении одинаковых шаров, один из которых покоится, угол разлета всегда составляет *90°*. Следовательно, второй шар полетит под углом:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = 30°.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Запишите выражение для элементарной работы силы.
2. Запишите выражение для полной работы силы.
3. Запишите выражение для работы упругой деформации пружины.
4. Какой степени скорости пропорциональна кинетическая энергия тела?
5. Запишите выражение для кинетической энергии тела.
6. Сформулируйте свойства консервативных сил.
7. Чему равна потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести?
8. Запишите формулу для потенциальной энергия поля тяготения
9. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
10. Сформулируйте закон сохранения момента импульса системы частиц.
11. От каких величин зависит кинетическая энергия вращательного движения?
12. Работа силы, действующей на материальную точку, на любом пути равна нулю. Что можно сказать о взаимном направлении силы и скорости материальной скорости?
13. Являются ли силы трения консервативными?
14. Может ли обладать моментом импульса материальная точка, движущаяся по прямолинейной траектории?