ТЕОРИЯ ИГР

1.1 МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной **стратегии**, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются **конфликтными**.

Приведем несколько примеров конфликтных ситуаций: борьба фирм за рынок сбыта, аукцион, спортивные состязания, военные операции, парламентские выборы (при наличии нескольких кандидатов), карточные игры.

Простейшим примером конфликтной ситуации является игра с нулевой суммой (или антагонистическая игра), в которой выигрыш одной стороны конфликта в точности совпадает с проигрышем другой стороны.

Рассмотрим конфликт двух участников с противоположными интересами, математической моделью которого является **игра с нулевой суммой**. Участники игры – лица, принимающие решения, – называются *игроками*. *Стратегия* игрока – это осознанный выбор одного из множества возможных вариантов его действий. Будем рассматривать конечные игры, в которых множества стратегий игроков конечны; стратегии первого игрока пронумеруем числами от 1 до m, а стратегии второго игрока — числами от 1 до n.

Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок – свою j-ю стратегию, то результатом такого совместного выбора будет платеж a_{ij} второго игрока первому (это не обязательно денежная сумма, а любая оценка полезности результата выбора игроками своих стратегий i и j). Таким образом, конечная игра с нулевой суммой однозначно определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

которая называется *платежной матрицей* (или *матрицей выигрышей*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго игрока. Конечные игры с нулевой суммой называются *матричными*, так как целиком определяются своими платежными матрицами.

Игра происходит партиями. *Партия* игры состоит в том, что игроки **одновременно** называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы **A** (по своему выбору или случайно), а второй – некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору или случайно). После этого происходит «расплата». Пусть, например, первый игрок назвал номер i, а второй – j. Тогда второй игрок платит первому сумму a_{ij}. На этом партия игры заканчивается. Если $a_{ij} > 0$, то это означает, что при выборе первым игроком i-й стратегии, а вторым j-й выигрывает первый игрок; если же $a_{ij} < 0$, то это значит, что при данном выборе стратегий в выигрыше оказывается второй игрок. **Цель** каждого игрока – выиграть как можно бóльшую сумму в результате большого числа партий.

Смысл названий «конфликт с противоположными интересами» и «игра с нулевой суммой» состоит в том, что выигрыш каждого из игроков противоположен выигрышу противника, или, иначе, что сумма выигрышей игроков равна нулю.

Стратегия называется *чистой*, если выбор игрока неизменен от партии к партии. У первого игрока, очевидно, есть m чистых стратегий, а у второго – n.

При анализе игр противник считается сильным, т.е. разумным.

Рассмотрим описанную конфликтную ситуацию с точки зрения первого игрока. Если мы (т. е. первый игрок) выбираем свою i-ю стратегию (i-ю строку матрицы **A**), то второй игрок, будучи разумным, выберет такую стратегию j, которая обеспечит ему наибольший выигрыш (а нам, соответственно, наименьший), т. е. он выберет такой столбец j матрицы **A**, в котором платеж a_{ij} (второго игрока первому) минимален. Переберем все наши стратегии $i = 1, 2, \ldots, m$ и выберем ту из них, при которой второй игрок, действуя максимально разумно, заплатит нам наибольшую сумму. Величина

$$\alpha = \max_{i=1,2\ldots m} \min_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}$$

называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ей стратегия первого игрока – *максиминной*. Аналогичные рассуждения (но уже с точки зрения второго игрока) определяют *верхнюю цену игры*

$$\beta = \min_{i=1,2\ldots m} \max_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}$$

и соответствующую ей *минимаксную стратегию* второго игрока. Подчеркнем, что по своему определению нижняя цена игры α представляет собой **максимальный гарантированный выигрыш** первого игрока (т. е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший α), а верхняя цена – величину, противоположную минимальному гарантированному проигрышу второго игрока (т.е. применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше чем β, или, по-другому, выиграет не меньше чем (–β)).

Если α = β, то говорят, что игра имеет *седловую точку в чистых стратегиях*, общее значение α и β называется при этом *ценой игры* и обозначается v = α = β . При этом стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее n, а второму игроку – гарантированный проигрыш не более (–v), и отклоняться игрокам от этих стратегий невыгодно.

ПРИМЕР 1.1. В платежной матрице $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

указано, какую долю рынка выиграет предприятие у своего единственного конкурента, если оно будет действовать согласно каждой из возможных трех стратегий, а конкурент – согласно каждой из своих возможных трех стратегий. Требуется определить, имеет ли данная игра седловую точку в чистых стратегиях.

Решение. Припишем справа от строк платежной матрицы минимальные элементы этих строк (соответствующие выигрышу первого игрока в том случае, когда он выберет стратегию, соответствующую данной строке, а второй игрок при этом выберет стратегию, соответствующую наилучшему для него выигрышу); под столбцами платежной матрицы напишем максимальные элементы этих столбцов (соответствующие проигрышу второго игрока в том случае, когда он выберет стратегию, соответствующую данному столбцу, а первый игрок при этом выберет стратегию, соответствующую наилучшему для него выигрышу):

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & \boxed{0{,}3} \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0{,}1 \\ \boxed{0{,}3 = \alpha} \\ 0{,}1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 0{,}5 & 0{,}4 & \boxed{0{,}3 = \beta} \end{array} & \end{array}$$

Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = max\{0{,}1, 0{,}3, 0{,}1\} = 0{,}3$$

соответствует второй стратегии первого игрока, а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{i=1,2,3} \max_{j=1,2,3} a_{ij} = \min\{0{,}5, 0{,}4, 0{,}3\} = 0{,}3$$

соответствует третьей стратегии второго игрока, поэтому если первый игрок будет действовать со второй стратегией, а второй игрок — с третьей стратегией, то игроки могут гарантировать себе: первый – выигрыш не менее v=α=β=0,3=30% рынка, а второй – что первый выиграет не более v=30% рынка.

Таким образом, данная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях (в платежной матрице седловая точка обведена рамкой), при этом оптимальная чистая стратегия первого игрока – вторая, оптимальная чистая стратегия второго игрока – третья, а цена игры равна v = 0,3.

Если первый игрок будет следовать своей оптимальной чистой стратегии (второй), а второй игрок **<u>отклонится</u>** от своей оптимальной чистой стратегии (от третьей) и выберет первую или вторую, то он только ухудшит свое положение – будет проигрывать не 30%, а 50% рынка (при выборе первой стратегии) или 40% рынка (при выборе второй стратегии).

Первому игроку также невыгодно отклоняться от своей второй стратегии, если второй игрок будет придерживаться третьей стратегии.

Матричная игра совершенно не обязательно имеет седловую точку в чистых стратегиях, в чем можно убедиться из рассмотрения следующего примера.

ПРИМЕР 1.2 (ИГРА «УГАДЫВАНИЕ МОНЕТЫ»). Правила игры таковы. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб. по своему выбору и незаметно от второго игрока, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб. Требуется доказать, что данная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях.

Решение. Платежная матрица, очевидно, имеет вид $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверим, есть ли в игре седловая точка в чистых стратегиях. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = max\{-1, -5\} = -1$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} a_{ij} = min\{3, 3\} = 3$$

и седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет.

ТЕОРЕМА. *В любой матричной игре нижняя цена не превосходит верхней*: $\alpha \leq \beta$.

Как же поступать, когда нижняя цена матричной игры α **строго меньше** верхней цены β, т. е. когда в игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях?

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots p_m)$, где все $p_i \geq 0$ (i=1, 2 ,…, m), а $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. При этом p_i – вероятность, с которой первый игрок выбирает свою i-ю стратегию. Аналогично определяется смешанная стратегия $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots q_n)$ второго игрока. Чистая стратегия также подпадает под определение смешанной – в этом случае все вероятности равны нулю, кроме одной, равной единице.

Если игроки играют со своими смешанными стратегиями $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots p_m)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots q_n)$ соответственно, то математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$M(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

(и совпадает с математическим ожиданием проигрыша второго игрока).

Стратегии $\overrightarrow{p^*} = (p_1^*, p, \dots, p_n^*)$ и $\overrightarrow{q^*} = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ называются *оптимальными смешанными стратегиями* соответственно первого и второго игрока, если

$$\mathrm{M}(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}) \le M(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}) \le M(\overrightarrow{p^*}, \vec{q})$$

Если у обоих игроков есть оптимальные смешанные стратегии, то пара $(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*})$ называется *решением игры* (или *седловой точкой в смешанных стратегиях*), а число *v*= $M(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*})$ – *ценой игры*.

ПРИМЕР 1.3. Требуется найти решение игры из примера 1.2 в смешанных стратегиях.

Решение. Платежная матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ была построена ранее.

Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью $p \in [0,1]$ а вторую стратегию — соответственно с вероятностью (1 – *p*), т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией $\vec{p} = (p, 1-p)$.

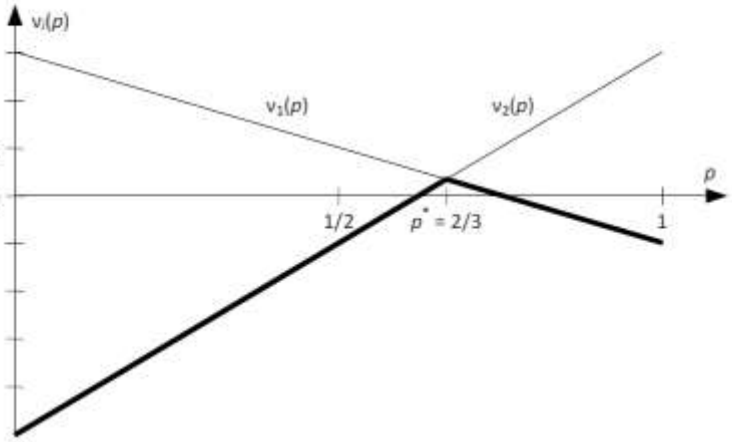
Обозначим $v_j(p)$ ожидаемый выигрыш (т. е. математическое ожидание выигрыша) первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае $v_1(p) = (-1)p + 3(1-p)$, $v_2(p) = 3p + (-5)(1-p)$. Построим графики этих функций на рис. 1.1, *а* (удобно строить эти графики, последовательно подставляя вместо p нуль и единицу, например, для первой функции при *p* = 0 получаем $v_1(0) = 3$, а при *p* = 1 будем иметь $v_1(1) = -1$).

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш:

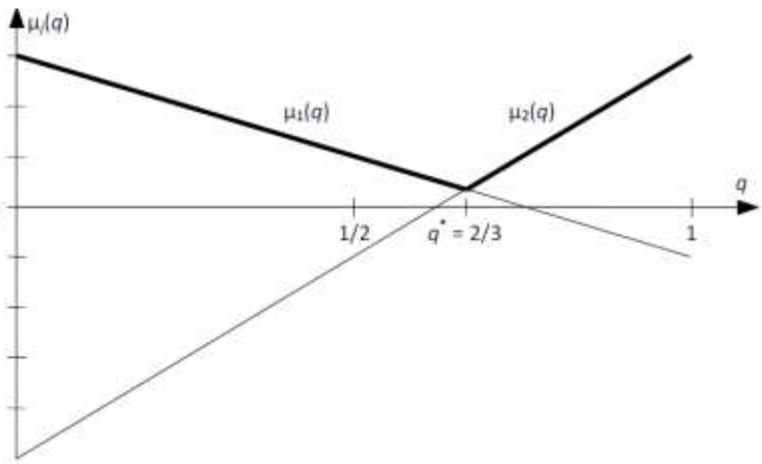
$$v(p) = min\{v_1(p),\ v_2(p)\}$$

(эта функция отмечена на рис. 1.1, *а* жирной линией). Иными словами, второй игрок в любом случае заставит первого выиграть как можно меньше, т. е. в рассматриваемой игре при $p \le p^*$, (где p^*соответствует максимуму функции $v(p)$) второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $v_2(p)$, при $p \ge p^*$ второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $v_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор соответствует $v = \max_{p\in[0,1]} v(p)$, т.е. $p = p^*$, при этом цена игры равна v.

В нашем случае $p^* = \frac{2}{3}$ (эта точка определяется из условия $v_1(p) = v_2(p)$ или $-p + 3(1-p) = 3p - 5(1-p)$. Таким образом, оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия $\overrightarrow{p^*} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, при этом цена игры равна $v = v_1\left(\frac{2}{3}\right) = v_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$ – вне зависимости от того, какую стратегию выберет второй игрок, первый игрок будет выигрывать в среднем за большое число партий по 1/3 руб. за одну партию.



а) гарантированный выигрыш первого игрока в зависимости от его смешанной стратегии



б) *верхняя граница проигрыша второго игрока в зависимости от его смешанной стратегии*

Рис. 1.1. *Гарантированный выигрыш первого игрока и верхняя граница проигрыша второго игрока в игре «Угадывание монеты» в зависимости от их смешанных стратегий*

Найдем теперь оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Пусть второй игрок выбирает первую стратегию с вероятностью $q \in [0,1]$, а вторую – с вероятностью $(1 - q)$, т. е. вектор смешанной стратегии второго игрока имеет вид $\vec{q} = (q, 1 - q)$. Тогда проигрыш второго игрока равен $\mu_1(q) = -q + 3(1 - q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q) = 3q - 5(1 - q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию (см. рис. 1.1, *б*).

Наилучшее с точки зрения второго игрока значение q определяется из условия $\min_{q \in [0,1]} max\{\mu_1(q), \mu_2(q)\}$. Как видно из рис. 1.1, *б*, это означает в данном случае, что $\mu_1(q) = \mu_2(q)$, откуда $q* = 2/3$. Поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна $\overrightarrow{q^*} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

ПРИМЕР 1.4. Рассмотрим игру с платежной матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков.

Решение. Вначале проверим, имеет ли данная игра седловую точку в чистых стратегиях. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = max\{-2, -4\} = -2,$$

а верхняя цена

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2} a_{ij} = min\{2, 3, 4, 1\} = 1$$

т. е. $\alpha \neq \beta$, значит, седловой точки в чистых стратегиях в игре нет.

Пусть первый игрок играет со смешанной стратегией $\vec{p} = (p, 1-p)$.

Обозначим $v_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае

$$v_1(p) = -2p + 2(1-p), \qquad v_2(p) = 3p + (-4)(1-p),$$

$$v_3(p) = 4p + (-3)(1-p), \qquad v_4(p) = p + (-1)(1-p).$$

Графики этих функций построены на рис. 1.2.

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш: $v(p) = min\{v_1(p), v_2(p), v_3(p), v_4(p)\}$ (эта функция отмечена на рис.1.2 жирной линией). Иными словами, при $p \in [0,\, p^*)$, (где $p^* = 6/11$ определяется из условия $v_1(p) = v_2(p)$) второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $v_2(p)$, при $p \in (p^*, 1]$ второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать $v_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует $v = \max_{p \in [0,1]} v(p)$. Итак, оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия $\overrightarrow{p^*} = (\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$, при этом цена игры $v = v_1\left(\frac{6}{11}\right) = v_2\left(\frac{6}{11}\right) = -\frac{2}{11}$.

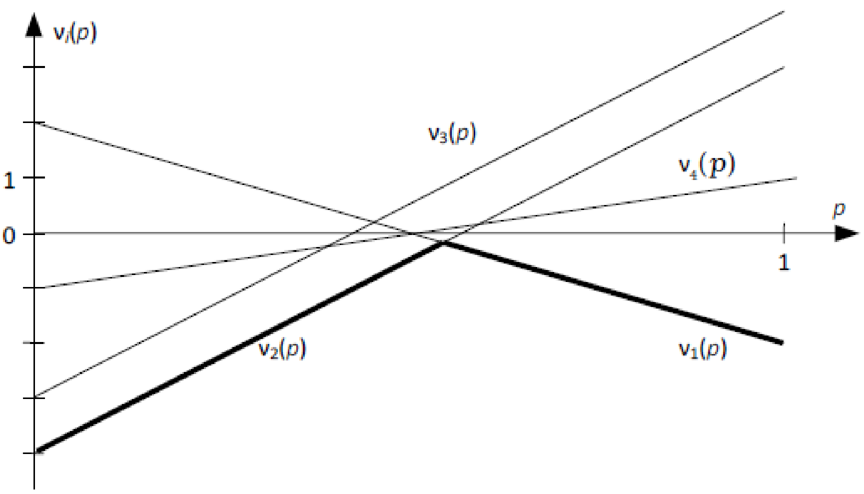


Рис. 1.2.

Гарантированный выигрыш первого игрока в примере 1.4 при различном выборе смешанной стратегии

Отметим, что второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока имеет вид (q,1–q, 0, 0) .

Тогда проигрыш второго игрока равен $\mu_1(q) = -2q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q) = 2q - 4(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию. Значение q^* определяется из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$, оно равно $q^* = 7/11$. Итак, оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна $\overrightarrow{q^*} = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, 0, 0)$.

В матричных играх, в которых у первого игрока ровно две стратегии (а у второго игрока произвольное количество стратегий: две или более) можно решать графическим способом. Сформулируем теорему, дающую способ решения матричных игр, в которых и у первого, и у второго игрока произвольное количество стратегий. Оказывается, что в общем случае любая матричная игра с произвольным числом стратегий у игроков может быть сведена к паре взаимно двойственных задач линейного программирования, и эти задачи имеют оптимальные решения.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР. *В любой матричной игре у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.*

Доказательство. Пусть рассматривается игра с платежной матрицей

$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, все элементы которой строго положительны;

$\vec{p} = (p_{1,}, p_2, \dots, p_m)$ и $\vec{q} = (q_{1,}, q_2, \dots, q_m)$ – смешанные стратегии первого и второго игрока.

Математическое ожидание выигрыша первого игрока

$$M(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \, q_j$$

при любом выборе игроками своих смешанных стратегий $\vec{p}$ и $\vec{q}$ будет положительным, так как все элементы платежной матрицы положительны, среди неотрицательных pi есть хотя бы одно строго положительное число и среди неотрицательных qj также есть хотя бы одно строго положительное.

Пусть первый игрок выбирает такую стратегию $\vec{p}$, чтобы математическое ожидание его выигрыша независимо от того, какую стратегию выберет второй игрок, было не меньше некоторой гарантированной величины r (нижняя цена игры $\alpha = \max_{\mathrm{i=1,2\dots m}} \min_{\mathrm{j=1,2,\dots n}} \mathrm{a_{ij}} > 0$, поскольку все платежи $a_{ij} > 0$, а r, очевидно, не меньше α, поэтому $r > 0$):

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq r, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geq r, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geq r \end{cases} \tag{1.2}$$

При этом $p_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,$ $\qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1.$

Введем новые обозначения $x_i = \frac{p_i}{r},\ i = 1, 2, \dots, m$ и разделим все неравенства системы (1.2) на положительное число r, получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

При этом $\qquad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{r} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{r} = \frac{1}{r}.$$

Причем, если бы r было нулем или отрицательным числом, то переход от (1.2) к (1.3) был бы **невозможен**: при делении неравенства на отрицательное число знак меняется на противоположный, а на нуль делить нельзя.

Цель первого игрока — максимизировать свой гарантированный выигрыш r или, что то же самое, минимизировать величину

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{r} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{r} = \frac{1}{r}$$

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования для первого игрока

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{1.4}$$

Аналогичные рассуждения с позиции второго игрока приводят к задаче линейного программирования, двойственной к задаче для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{m} y_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$y_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{1.5}$$

Поскольку все $a_{ij} \geq 0$, можно подобрать такие достаточно большие положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_m$, чтобы для всех j = 1, 2, …, n выполнялись неравенства $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1$, значит, задача (1.4) имеет допустимое решение.

Допустимым решением задачи (1.5) является, очевидно, нулевой вектор.

Так как каждая из пары двойственных задач (1.4) – (1.5) имеет допустимое решение, то согласно теории двойственных задач линейного программирования обе эти задачи имеют некоторые оптимальные решения $\overrightarrow{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ и $\overrightarrow{y^*} = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$; при этом оптимальные значения целевых функций данных задач равны:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^*$$

Цена игры $v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_i^*},$

а оптимальные смешанные стратегии игроков равны соответственно

$$\overrightarrow{p^*} = v\overrightarrow{x^*} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} x_k^*}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) = \left(\frac{x_1^*}{\sum_{k=1}^{m} x_k^*}, \frac{x_2^*}{\sum_{k=1}^{m} x_k^*}, \dots, \frac{x_m^*}{\sum_{k=1}^{m} x_k^*}\right)$$

$$\overrightarrow{q^*} = v\overrightarrow{y^*} = \frac{1}{\sum_{l=1}^{n} y_l^*}(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) = \left(\frac{y_1^*}{\sum_{l=1}^{n} y_l^*}, \frac{y_2^*}{\sum_{l=1}^{n} y_l^*}, \dots, \frac{y_n^*}{\sum_{l=1}^{n} y_l^*}\right)$$

$$M(\vec{p},\overrightarrow{q^*}) \le v,\ M(\overrightarrow{p^*},\vec{q}) \ge v,\ M(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}) = v.$$

Пара $(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*})$ образует седловую точку данной игры в смешанных стратегиях, и $M(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}) = v$ – цена данной игры.

Если же в платежной матрице **A** = (a_{ij}) есть **отрицательные элементы** или **нули**, то можно добавить ко всем элементам матрицы одно и то же достаточно большое положительное число b, так чтобы все элементы матрицы $A'(a_{ij} + b)$ были положительными.

Обозначим математическое ожидание выигрыша первого игрока в игре с платежной матрицей **A:**

$$M(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i\, q_j$$

а математическое ожидание выигрыша первого игрока в игре с платежной матрицей $\boldsymbol{A'}$**:**

$$M'(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}p_i\, q_j$$

При этом

$$M'(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}p_i\, q_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b)p_i\, q_j = M(\vec{p},\vec{q}) + b\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j =$$

$$= M(\vec{p},\vec{q}) + b$$

игра с платежной матрицей $\boldsymbol{A'}$имеет седловую точку $(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*})$ в смешанных стратегиях:

$$M(\vec{p},\overrightarrow{q^*}) \le M(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}) \le M(\overrightarrow{p^*},\vec{q})$$

Значит, игра с платежной матрицей **A** также имеет седловую точку $(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*})$ в смешанных стратегиях, а цена игры с матрицей **A** равна $v = M(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}) = M'(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}) - b$.

ПРИМЕР 10.1.5. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии в игре из примера 1.4, сведя эту игру к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

Решение. От платежной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

путем добавления положительного числа b = 5 перейдем к матрице

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

все элементы которой положительны.

Сведем данную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования (согласно теореме 1.2):

$$x_1 + x_2 \to min \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \ge 1 \\ 8x_1 + x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 4y_4 \le 1 \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + 6y_4 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \qquad\qquad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

Решая задачу симплекс-методом, получим оптимальные решения:

$$\overrightarrow{x^*} = \left(\frac{6}{53}, \frac{5}{53}\right), \overrightarrow{y^*} = \left(\frac{7}{53}, \frac{4}{53}, 0{,}0\right).$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков

$\overrightarrow{p^*} = \frac{1}{\frac{6}{53}+\frac{5}{53}}\left(\frac{6}{53}, \frac{5}{53}\right) = (\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$ и $\overrightarrow{q^*} = \frac{1}{\frac{7}{53}+\frac{4}{53}+0+0}\left(\frac{7}{53}, \frac{4}{53}, 0{,}0\right) = \left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, 0{,}0\right).$

Цена игры $\quad v = \frac{1}{\frac{6}{53}+\frac{5}{53}} - 5 = -\frac{2}{11}$

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами $i = 1, 2, \ldots, m$. Ситуация является *полностью неопределенной*, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $j = 1,2,\ldots, n$.

Если будет принято i-е решение, а состояние внешней среды соответствует j-й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход q_{ij}.

Матрица

$$Q = (q_{ij}) \in R^{m\times n}$$

называется *матрицей последствий* (от реализации возможных решений). В **ситуации с полной неопределенностью** могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера относительно того, какое решение нужно принять. Эти рекомендации не обязательно будут приняты. Многое будет зависеть, например, от склонности к риску лица, принимающего решение. Но как **оценить** риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы знали, что осуществляется j-е состояние внешней среды, то выбрали бы наилучшее решение, т. е. приносящее наибольший доход

$$q_j = \min_{k=1,2,\ldots,m} q_{kj}$$

Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т. е. если мы примем i-е решение, а во внешней среде реализуется j-е состояние, то мы будем сожалеть о недополученном доходе в размере

$$r_{ij} = q_j - q_{ij} = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{kj} - q_{ij} \tag{2.1}$$

(по сравнению с тем, как если бы мы знали точно, что реализуется j-е состояние внешней среды, и выбрали бы решение, приносящее наибольший доход $q_j = \max_{i=1,2,\ldots,m} q_{ij}$). Матрица

$$R = (r_{ij}) \in R^{m\times n},$$

где сожаления r_{ij} рассчитаны по формуле (2.1), называется *матрицей сожалений* (или *матрицей рисков*).

Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Неопределенность – более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, а массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации. Существуют следующие правила – рекомендации по принятию решений в таких ситуациях.

ПРАВИЛО ВАЛЬДА (правило крайнего писсимизма). Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация, наихудшая с нашей точки зрения (т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min_{i=1,2,\dots,m} q_{ij}$) и выберем решение i_0 с наибольшим a_i. Итак, *правило Вальда рекомендует принять такое решение i_0, что*

$$a_{i0} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_i = \max_{i=1,2,\dots,m} (\min_{j=1,2,\dots,n} q_{ij})$$

ПРАВИЛО СЭВИДЖА (правило минимальных сожалений). При применении этого правила анализируется матрица сожалений **R**. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений

$$b_i = \max_{j-1,2,\dots,n} r_{ij}$$

и выберем решение i_0 с наименьшим b_i. Итак, *правило Сэвиджа рекомендует принять такое решение i_0, что*

$$b_{i0} = \min_{i=1,2,\dots,m} b_i = \min_{i=1,2,\dots,m} (\max_{j=1,2,\dots,n} r_{ij})$$

ПРАВИЛО ГУРВИЦА взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации. По правилу Гурвица, *принимается решение i_0, на котором достигается максимум выражения*

$$\lambda \min_{j=1,2,\dots,n} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=1,2,\dots,n} q_{ij}$$

где $\lambda \in [0; 1]$. Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к нулю правило Гурвица приближается к правилу **розового оптимизма.**

ПРИМЕР 2.1. Сидя в отправляющемся поезде, пассажир вдруг вспомнил, что, кажется, забыл выключить дома утюг. Можно еще успеть сойти с поезда и исправить ошибку, но тогда пропадет оплаченный отдых (100 000 руб.). Если же уехать, утюг, если он действительно включен, может стать причиной пожара, и тогда придется ремонтировать квартиру (1 500 000 руб.). Пассажир не уверен, включен утюг или выключен. Составить матрицу последствий и матрицу сожалений. Определить решения, рекомендуемые критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Решение. У пассажира есть две стратегии: поехать отдыхать или вернуться домой. У внешней среды также есть два состояния: утюг выключен либо утюг включен.

Матрица последствий имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1\,500\,000 \\ -100\,000 & -100\,000 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен

$$q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0$$

по второму –

$$q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = -100\,000$$

поэтому матрица сожалений

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1\,400\,000 \\ 100\,000 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальные элементы строк матрицы последствий a_1 = –1 500 000, a_2 = –100000. Теперь из двух чисел (–1 500 000), (–100 000) находим наибольшее. Это (–100 000). Значит, правило Вальда рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Максимальные элементы строк матрицы сожалений b_1 = 1 400 000, b_2 = 100 000. Из чисел 1 400 000, 100 000 находим наименьшее. Это 100 000. Значит, правило Сэвиджа, как и правило Вальда, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Правило Гурвица при λ = 0,5 тоже, как и правила Вальда и Сэвиджа, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Предположим, что в рассмотренной схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется **частичной неопределенностью**. При принятии решений в таких ситуациях можно выбрать одно из следующих правил.

ПРАВИЛО МАКСИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА. Доход, получаемый при принятии i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

Q	q_{i1}	q_{i2}	…	i_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Ожидаемый доход при принятии i-го решения оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}Q_i$ соответствующей случайной величины Q_i. *Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход*

$$MQ_{i0} = \max_{i=1,2,..,m} MQ_i = \max_{i=1,2,\ldots,m} (\sum_{j=1}^{n} q_{ij} p_j)$$

ПРАВИЛО МИНИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМЫХ СОЖАЛЕНИЙ. Сожаления при реализации i-го решения представляются случайной величиной R_i с рядом распределения

R_i	r_{i1}	r_{i2}	…	r_{in}
p	p_1	p_2	…	p_n

Ожидаемые сожаления оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}R_i$ соответствующей случайной величины R_i. *Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления*

$$MR_{i0} = \min_{i=1,2,..,m} MR_i = \min_{i=1,2,\ldots,m} (\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j)$$

ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРАВИЛ МАКСИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА И МИНИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМЫХ СОЖАЛЕНИЙ. *Решения, рекомендуемые правилами максимизации ожидаемого дохода и минимизации ожидаемых сожалений, всегда совпадают.*

***ПРИМЕР* 2.2.** Владелец груза должен выбрать одну из двух альтернатив: страховать груз или не страховать. Риск заключается в том, что с вероятностью 0,1 возможна катастрофа, в результате которой груз будет утрачен. Если груз застрахован, то в случае его утраты владелец получает компенсацию его стоимости (100 000 руб.). Стоимость страхового полиса 5000 руб. Требуется определить, стоит ли страховать груз?

Решение. У владельца груза есть две стратегии: страховать груз или не страховать его. У внешней среды также есть два состояния: катастрофа произойдет либо не произойдет.

Матрица последствий имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -5000 & -5000 \\ -100000 & 0 \end{pmatrix}$$

Вероятности состояний внешней среды известны ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}9$), поэтому ряды распределения дохода при выборе первой и второй стратегии таковы:

Q_1	*0*	*–5000*
p	*0,1*	*0,9*

Q_2	*–950000*	*0*
p	*0,1*	*0,9*

При этом

$$\boldsymbol{M}Q_1 = -5000\cdot 0{,}1 + (-5000)\cdot 0{,}9 = -5000,$$

аналогично

$$\mathbf{M}Q_2 = -10\,000.$$

Таким образом, правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять первое решение, т. е. застраховать груз.

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен

$$q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0$$

по второму

$$q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = 0$$

поэтому матрица сожалений

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 5000 \\ 95\,000 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим ожидаемые сожаления при указанных выше вероятностях. Получаем $\mathbf{M}R_1 = 4500$, $\mathbf{M}R_2 = 9500$. Минимальные ожидаемые сожаления равны 4500, они соответствуют первому решению — застраховать груз.

ПРИМЕР 2.3. Исследуем ситуацию принятия решений в условиях неопределенности в случае, когда матрица последствий

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим матрицу сожалений. Имеем:

$$q_1 = \max_{k=1,2,\dots,m} q_{k1} = 8$$

$$q_2 = 5, \quad q_3 = 8, \quad q_4 = 12.$$

поэтому матрица сожалений

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии i-го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т. е. приносящая наименьший доход по строкам матрицы $a_i = \min_j q_{ij}$, и выберем решение i_0 с наибольшим a_i. Имеем:

$$a_1 = 2, \;\; a_2 = 2, \;\; a_3 = 3, \;\; a_4 = 1.$$

Из этих чисел: 2, 2, 3, 1 находим максимальное: это 3. Значит, правилоВальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений

$$b_i = \max_j r_{ij}$$

и выберем решение i_0 с наименьшим b_i. Имеем:

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 5, \; b_4 = 7.$$

Из этих чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное: это 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять третье решение.

Если известны вероятности состояний внешней среды:

1/2, 1/6, 1/6, 1/6,

то правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$\mathbf{M}Q_1 = 23/6, \quad \mathbf{M}Q_2 = 25/6, \quad \mathbf{M}Q_3 = 7, \quad \mathbf{M}Q_4 = 17/6.$$

Максимальный ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$\mathbf{M}R_1 = 20/6, \quad \mathbf{M}R_2 = 4, \quad \mathbf{M}R_3 = 7/6, \quad \mathbf{M}R_4 = 32/5,$$

т. е. опять третье решение.

В заключение следует отметить, что решения, предлагаемые различными правилами, не всегда совпадают. Лицу, принимающему решение, следует понимать, что оно будет нести ответственность за последствия.

Поэтому к правилам следует относиться не как к рецептам действий, а как к средствам, позволяющим задуматься о последствиях принятия решений и проанализировать возможные варианты.

3. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Не все конфликтные ситуации можно представить как игры с нулевой суммой, потому что интересы участников таких конфликтов не всегда противоположны. Обобщением игр с нулевой суммой на случай непротивоположных интересов участников являются **игры с ненулевой суммой**.

Рассмотрим <u>конечную</u> игру с ненулевой суммой, т. е. такую, в которой множества стратегий игроков конечны: будем считать, что первый игрок может выбрать одну из m своих стратегий, обозначенных номерами $i = 1,2, \ldots, m$, а второй игрок – одну из n своих стратегий, обозначенных номерами $j = 1, 2, \ldots, n$. Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок – свою j-ю стратегию, то в результате такого совместного выбора первый игрок получает выигрыш a_{ij} , а второй игрок – выигрыш b_{ij} . При этом совершенно не обязательно, чтобы $b_{ij} = a_{ij}$, как в матричных играх.

Таким образом, конечная игра с ненулевой суммой полностью определяется двумя матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{m\,n} \end{pmatrix},$$

и называется *биматричной*.

Биматричная игра, как и матричная, происходит партиями. Цель каждого игрока – выиграть как можно бо́льшую сумму в результате большого числа партий. Понятия чистых и смешанных стратегий игроков в биматричных играх вводятся аналогично тому, как это было сделано в матричных играх.

Если матричные игры являются играми со строгим соперничеством, поскольку выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, то в биматричных играх интересы игроков могут быть в большей или меньшей степени близки.

В зависимости от того, запрещено или разрешено сотрудничество игроков, различают некооперативные и кооперативные игры.

Анализ биматричной игры в некооперативном варианте сводится к поиску *максиминных стратегий* игроков, т.е. стратегий, которые обеспечивают игрокам получение максимально возможного гарантированного выигрыша вне зависимости от действий противника.

Множество всевозможных пар смешанных стратегий игроков обозначим

$$S = \{(\vec{p}\,,\vec{q})|\vec{p} \in S_1, \vec{q} \in S_2,\},$$

где

$$S_1 = \left\{\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)|p_i \geq 0, i = 1,2,\dots, m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\right\}$$

$$S_2 = \left\{\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)|q_i \geq 0, j = 1,2,\dots, n, \sum_{j=1}^{n} q_i = 1\right\}$$

Если два игрока выбрали смешанные стратегии

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \text{ и } \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны

$$\text{M}_1(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j$$

и

$$\text{M}_2(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i\, q_j$$

Важным в теории игр является понятие равновесия. Говорят, что стратегии игроков $\overrightarrow{p^*}$ и $\overrightarrow{q^*}$ образуют *равновесие Нэша*, если никому из игроков не выгодно от них отклоняться при условии, что другой игрок не следует своей равновесной стратегии, т. е. если для любых стратегий $\overrightarrow{p^*}$ и $\overrightarrow{q^*}$.

$$M_1\left(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}\right) \geq M_1\left(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}\right)$$
$$M_2\left(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}\right) \geq M_2\left(\overrightarrow{p^*}, \vec{q}\right)$$

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЙ. *В любой биматричной игре существует хотя бы одно равновесие Нэша.*

КРИТЕРИЙ РАВНОВЕСИЯ. *Стратегии игроков* $\overrightarrow{p^*}$ и $\overrightarrow{q^*}$ образуют *равновсие Нэша тогда и только тогда, когда при условии использования первым игроком стратегии* $\overrightarrow{p^*}$ *любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая* $q_j^* > 0$, *приносит второму игроку один и тот же выигрыш μ, а любая чистая стратегия второго игрока, со-*

ответствующая $q_j^* = 0$, *приносит второму игроку выигрыш, не больший* μ, *а при условии использования вторым игроком стратегии* $\overrightarrow{q^*}$ *любая чистая стратегия первого игрока, соответствующая* $p_i^* > 0$, *приносит второму игроку один и тот же выигрыш* v, *а любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая* $p_i^* = 0$, *приносит второму игроку выигрыш, не больший* v.

Максиминные смешанные стратегии первого и второго игроков обеспечивают им гарантированные выигрыши

$$\alpha = \max_{p \in S_1} \min_{q \in S_2} M_1(\vec{p}, \vec{q})$$

$$\beta = \max_{q \in S_2} \min_{p \in S_1} M_2(\vec{p}, \vec{q})$$

соответственно вне зависимости от поведения противника.

По-другому максиминные стратегии называются *осторожными* – смысл этого названия очевиден, и в некооперативном случае игрокам имеет смысл придерживаться своих осторожных стратегий.

ПРИМЕР 3.1 (ИГРА «ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННЫХ»). Двое преступников (первый и второй игроки), подозреваемые в совместном совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Прямые улики у следствия отсутствуют, поэтому успех обвинения зависит от того, признаются ли заключенные. У каждого из заключенных есть две стратегии: признаться u1088 ð(первая стратегия) или не признаваться (вторая стратегия). Если оба преступника признаются, то они будут признаны виновными и приговорены к восьми годам заключения. Если ни один из них не признается, то по обвинению в основном преступлении они будут оправданы, но суд все-таки признает их вину в менее значительном преступлении (например, в ношении оружия), в результате чего оба будут приговорены к одному году заключения. Если же признается только один и них, то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а другой преступник будет приговорен к максимальному сроку заключения — к десяти годам. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

Решение. Матрицы выигрышей игроков таковы:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков представим в виде $\vec{p} = (p, 1-p)$ и $\vec{q} = (q, 1-q)$, где $p \in [0,1]$, $q \in [0,1]$. При этом математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$M_1\left(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}\right) = -8pq - 10(1-p)q - (1-p)(1-q) = (p-9)q + p - 1.$$

Аналогично определяется математическое ожидание выигрыша второго игрока:

$$M_2\left(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}\right) = -8pq - 10p(1-q) - (1-p)(1-q) = (q-9)p + q - 1.$$

С учетом того, что $p \in [0,1]$, $p - 9 < 0$, наилучший гарантированный выигрыш первого игрока равен

$$\alpha = \max_{p \in [0,1]} \min_{q \in [0,1]} M_1(\vec{p}, \vec{q}) =$$

$$= \max_{p \in [0,1]} \min_{q \in [0,1]} \left((p-9)q + p - 1\right) =$$

$$= \max_{p \in [0,1]} \left((\mathrm{p} - 9) \cdot 1 + \mathrm{p} - 1\right) = \max_{p \in [0,1]} (2\mathrm{p} - 10) = -8$$

а максиминная стратегия первого игрока, соответствующая этому наилучшему гарантированному выигрышу, $\overrightarrow{p^*} \in (1,0)$, т. е. максиминная стратегия первого игрока – признаться и получить восемь лет заключения. Аналогично находим наилучший гарантированный выигрыш второго игрока

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(\vec{p},\vec{q}) =$$

$$= \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} \big((q-9)p + q - 1\big) =$$

$$= \max_{q\in[0,1]} \big((\mathrm{q}-9)\cdot 1 + \mathrm{q} - 1\big) = \max_{q\in[0,1]} (2\mathrm{p} - 10) = -8$$

и его максиминную стратегию $\vec{q} = (1{,}0)$ – признаться. Очевидно, максиминные стратегии образуют равновесие Нэша.

ПРИМЕР 3.2 (ИГРА «СЕМЕЙНЫЙ СПОР»). Два игрока (муж и жена) выбирают, где провести вечер. У каждого из них есть две стратегии: выбрать посещение футбольного матча (первая стратегия) или оперного спектакля (вторая стратегия). Полезность совместного похода в театр муж оценивает в одну единицу, а жена в две, полезность совместного похода на футбол, наоборот, жена оценивает в одну единицу, а муж в две. Если же супруг иидут в разные места, вечер оказывается испорченным, что соответствует нулевым полезностям для обоих игроков. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

Решение. Составим матрицы выигрышей игроков:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\vec{p} = (p, 1-p)$ и $\vec{q} = (q, 1-q)$, где $p\in[0,1]$, $q\in[0,1]$ – смешанные стратегии игроков. При этом математические ожидания выигрышей игроков равны

$$M_1\big(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\big) = 2pq + (1-p)(1-q) = (3p-1)q - p + 1$$

$$M_2\big(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\big) = pq + 2(1-p)(1-q) = (3q-2)p - 2q + 2.$$

наилучшие гарантированные выигрыши игроков

$$\alpha = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} M_1(\vec{p},\vec{q}) =$$

$$= \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} \big((3p-1)q - p + 1\big) = \max\left\{\max_{p\in[0,1/3]} (2\mathrm{p}), \max_{p\in[1/3,1]} (1-p)\right\} = 2/3$$

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(\vec{p},\vec{q}) =$$

$$= \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} \big((3q-2)p - 2q + 2\big) = = \max\left\{\max_{q\in[0,2/3]} q, \max_{q\in[2/3,1]} (2-2q)\right\} = 2/3$$

а соответствующие максиминные стратегии таковы: $\vec{p} = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ и $\vec{q} = (\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. Это означает, что муж должен в 1/3 вечеров выбирать футбол и в 2/3 вечеров театр, а жена должна в 2/3 вечеров выбирать футбол и в 1/3 вечеров театр, тогда в среднем и муж, и жена будут выигрывать по 2/3 за одну партию. Равновесий Нэша в данной игре целых три:

$$\Big(\overrightarrow{p^*} = (1{,}0), \overrightarrow{q^*} = (1{,}0)\Big), \qquad (\overrightarrow{p^{**}} = (0{,}1), \overrightarrow{q^{**}} = (0{,}1))$$

$$\left(\overrightarrow{p^{***}} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{q^{***}} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$$

В отличие от матричных игр, в биматричных играх может оказаться так, что совместное отклонение двумя игроками от равновесий Нэша (или от максиминных стратегий) приводит к увеличению выигрыша обоих игроков. Это иллюстрируется следующими примерами.

Если в примере 3.1 один из игроков будет придерживаться максиминной стратегии и признается, а другой игрок отклонится от своей максиминной стратегии и признаваться не будет, то тот, кто не признается, получит десять лет заключения вместо восьми (в результате его положение ухудшится, а положение его соучастника улучшится).

Существенным отличием биматричных игр от матричных являются то, что возможны ситуации, когда отклонение обоих игроков от максиминных стратегий приводит к увеличению их выигрышей: если в примере 3.1 оба преступника не признаются, то оба получат всего по одному году. Это и является основой дилеммы, которая стоит перед каждым из заключенных: поскольку переговоры друг с другом невозможны, каждый из двух заключенных делает выбор, признаваться или нет, не зная, сознался ли его соучастник.

В примере 3.2 ситуация еще сложнее: участники могут увеличить свои выигрыши, совместно отклонившись от максиминных стратегий, в нескольких ситуациях. Например, если вместо максиминных стратегий $\overrightarrow{p^{***}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{q^{***}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ игроки выберут соответственно стратегии $\overrightarrow{p^{*}} = (1{,}0), \overrightarrow{q^{*}} = (1{,}0)$, то их выигрыши составят 2 для мужа и 1 для жены (оба эти выигрыша больше 2/3). Но есть и другая ситуация: если вместо максиминных стратегий игроки выберут стратегии $\overrightarrow{p^{**}} = (0{,}1), \overrightarrow{q^{**}} = (0{,}1)$, то их выигрыши составят 1 для мужа и 2 для жены (что опять превышает максиминные выигрыши). Если переговоры между участниками невозможны, отклоняться от максиминных стратегий опасно, так как даже если есть возможность выиграть больше, эта возможность сопряжена с риском уменьшения выигрыша (если муж выберет театр: $\overrightarrow{p^{**}} = (0{,}1)$, а жена футбол: $\overrightarrow{q^{*}} = (1{,}0)$, или наоборот, то выигрыши обоих игроков будут равны нулю).

Выходом в таких ситуациях является *кооперация* игроков, т. е. сотрудничество, состоящее в том, что игроки могут договориться о совместном выборе стратегий. Перейдем к обсуждению возможностей кооперативного поведения игроков. Ранее предполагалось, что в процессе игры отсутствует явный обмен информацией между участниками. Каждый игрок определял свою линию поведения, исходя из своей функции выигрыша, и, безусловно, основываясь на том, что другие игроки действуют аналогично. При этом считалось, что игроки знают функции выигрыша друг друга, но в непосредственный контакт не вступают.

Между тем в реальных экономических ситуациях участники конфликтов активно взаимодействуют друг с другом: вступают в переговоры, заключают соглашения, создают коалиции, применяют угрозы и подкупы и т. д. Все эти процессы могут в различной степени получать отражения в игровых моделях.

Игры, в которых возможны непосредственные контакты между участниками, называются *кооперативными*. В этой главе изучается вопрос: если игроки могут вступать в переговоры и образовывать коалиции, то какие исходы могут стать результатом переговоров.

Обсудим подходы к анализу биматричных игр в кооперативном варианте.

Рассмотрим биматричную игру, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы матрицами $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ и $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$.

Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – смешанные стратегии игроков. Так как $p_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1,\ q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n,\ q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ множество всех возможных вариантов пар выигрышей

$$\left(\mathrm{M}_1(\vec{p},\vec{q}),\mathrm{M}_2(\vec{p},\vec{q})\right)=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m1}^{n}a_{ij}p_i\,q_j,\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_i\,q_j\right)$$

представляет собой выпуклую оболочку точек плоскости с координатами (a_{ij},b_{ij}), $ij\ i=1,2,..,m,j=1,2,\dots,n$; эти точки (a_{ij},b_{ij}), соответствуют парам выигрышей игроков в случае выбора ими своих чистых стратегий.

При этом точка (M'_1,M'_2) *доминирует* точку (M''_1,M''_2), если

$$\begin{cases}M'_1>M''_1\\ M'_2\geq M''_2\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}M'_1\geq M''_1\\ M'_2>M''_2\end{cases}$$

это означает, что при переходе от первой точки ко второй выигрыш каждого из игроков не уменьшится, и при этом хотя бы у одного из игроков выигрыш увеличится.

Множество точек, *оптимальых по Парето* (т. е. не доминируемых другими), описывается так:

$$T=\left\{\overrightarrow{(p^*},\overrightarrow{q^*})\,|\,\overrightarrow{p^*}\in S_1,\overrightarrow{q^*}\in S_2,\forall\vec{p}\in S_1\ M_1\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)\geq M_1\left(\vec{p},\overrightarrow{q^*}\right),\forall\vec{q}\in S_2\ \ M_2\left(\overrightarrow{p^*},\vec{q}\right)\geq M_2\left(\vec{p},\overrightarrow{q^*}\right)\right\}$$

Если выбрать из множества точек, оптимальных по Парето, те точки, в которых выигрыши первого и второго игроков окажутся не меньше их максиминных выигрышей α и β, то получится *переговорное множество*

$$V=\left\{\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)\in T\mid M_1\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)\geq\alpha,\ \ M_2\left(\overrightarrow{p^*},\overrightarrow{q^*}\right)\geq\beta\right\}$$

Игрокам, естественно, имеет смысл выбирать свои оптимальные стратегии, соответствующие точкам из переговорного множества.

Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества. Самый простой из них заключается в выборе таких чистых стратегий, которые приносят игрокам наибольший суммарный доход, из которого один из игроков платит другому оговоренную сумму. Этот способ, конечно же, предполагает полностью доверительные отношения между игроками.

Если же договориться о выборе точки из переговорного множества игрокам не удается, то можно предложить им применить одну из так называемых арбитражных схем. Например, **арбитражная схема Нэша** предлагает игрокам выбрать из переговорного множества *решение Нэша* – такую пару смешанных стратегий, которая доставляет максимум *функции Нэша*, которая равна произведению превышений выигрышей игроков над гарантированными (минимаксными) выигрышами.

Реализация алгоритма Нэша предполагает решение задачи математического программирования $N=(M_1(\vec{p},\vec{q})-\alpha)(M_2(\vec{p},\vec{q})-\beta)\to max,\ \ (\vec{p},\vec{q})\in V.$ (3.1)

Целевая функция этой задачи называется *функцией Нэша*, а оптимальное решение задачи (3.1) – *решением Нэша*.

Решение задачи (3.1) всегда существует, и если в переговорном множестве V есть хотя бы одна точка $(\vec{p},\vec{q})\in V$, такая что $M_1(\vec{p},\vec{q})>\alpha,\ \ M_2(\vec{p},\vec{q})>\beta$, то решение задачи (3.1) единственно.

ПРИМЕР 3.3 (ИГРА «ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННЫХ» В КООПЕРАТИВНОМ ВАРИАНТЕ). Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 3.1 при условии, что заключенные могут обмениваться информацией.

Решение. Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником *ABCD* на рис. 3.1.

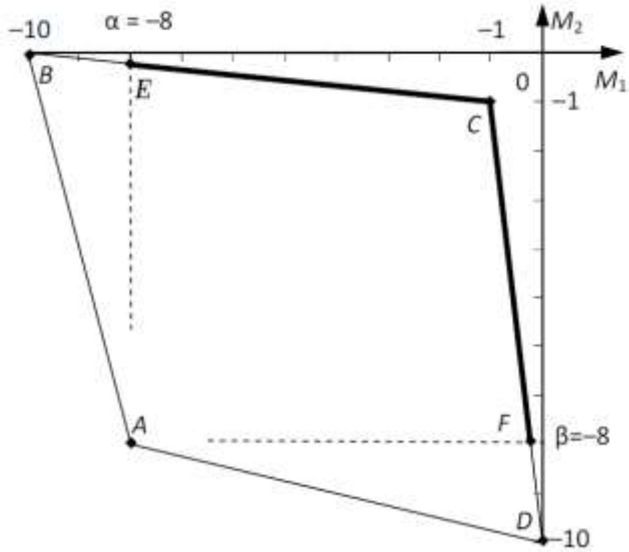


Рис. 3.1. *Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»*

Очевидно, множество Парето соответствует ломаной *BCD*, а переговорное множество – ломаной *ECF*.

Прямая, проходящая через точки *B*(–10, 0) и *C*(–1, –1), задается уравнением $M_2 = \frac{-M_1-10}{9}$, а прямая, проходящая через точки *C*(–1, –1) и *D*(0, –10), – уравнением $M_2 = -9M_1 - 10$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = (M_1+8)(M_2+8) = \begin{cases} (M_1+8)\left(8 - \dfrac{M_1+10}{9}\right), & M_1 \in [-8,-1] \\ (M_1+8)(8-9M_1-10), & M_1 \in \left[-1,-\dfrac{2}{9}\right] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-M_1^2+54M_1+496}{9}, & M_1 \in [-8,-1] \\ -9M_1^2-74M_1-16, & M_1 \in \left[-1,-\dfrac{2}{9}\right]. \end{cases}$$

Функцию Нэша мы рассматриваем на переговорном множестве, т. е. на ломаной *ECF*, при этом отрезок *EC* задается уравнением $M_2 = \frac{-M_1-10}{9}$ при $M_1 \in [-8,-1]$, а отрезок *CF* задается уравнением $M_2 = -9M_1 - 10$ при $M_1 \in [-8,-1]$ (или, что эквивалентно, при $M_1 \in \left[-1,-\frac{2}{9}\right]$).

Максимум функции Нэша на переговорном множестве достигается в точке $M_1^* = -1$ (график функции Нэша представлен на рис. 3.2).

При этом $M_2^* = -9M_1^* - 10 = -1$.

На рис. 3.1 решение Нэша соответствует точке *C*, поэтому если заключенные имеют возможность переговариваться, то они могут договориться оба не признаваться, и тогда получат всего по одному году заключения.

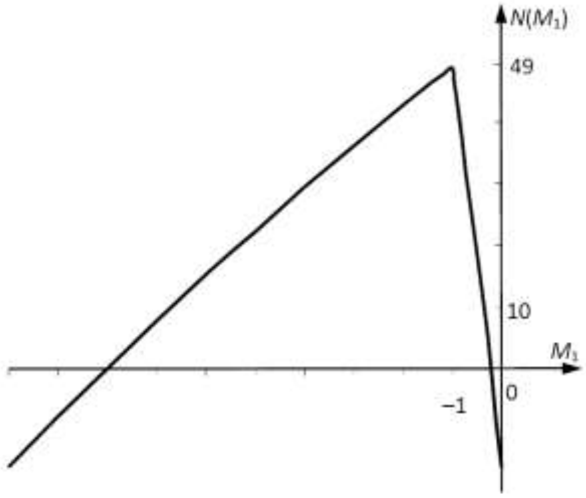


Рис. 3.2. *График функции Нэша*
в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»

ПРИМЕР 3.4 (ИГРА «СЕМЕЙНЫЙ СПОР» В КООПЕРАТИВНОМ ВАРИАНТЕ). Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 3.2 при условии, что игроки могут обмениваться информацией.

Решение. Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено треугольником *OAB* на рис. 3.3. Очевидно, и множество Парето, и переговорное множество соответствуют отрезку *AB*.

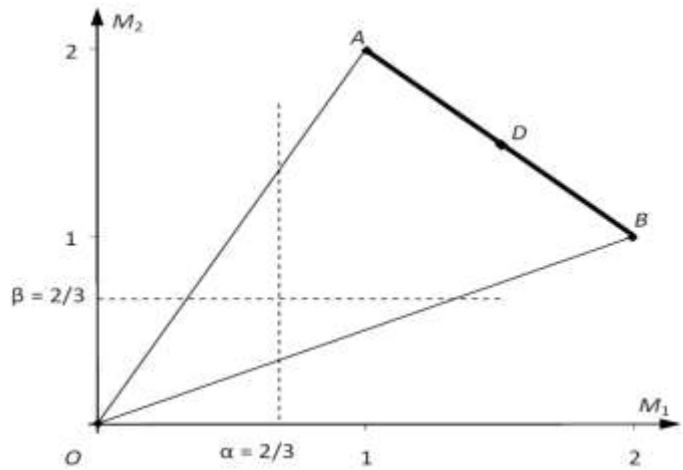


Рис. 3.3. *Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето*
и переговорное множество в кооперативном варианте игры «Семейный спор»

Прямая, проходящая через точки *A*(1, 2) и *B*(2, 1), задается уравнением $M_2 = 3 - M_1$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = \left(M_1 - \frac{2}{3}\right)\left(M_2 - \frac{2}{3}\right) = \left(M_1 - \frac{2}{3}\right)\left(3 - M_1 - \frac{2}{3}\right) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1\right) =$$
$$= -M_1^2 + 3M_1 - \frac{14}{9}.$$

Эта функция достигает максимума при $M_1^* = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = 1{,}5$. При этом $M_2^* = 3 - M_1^* = 1{,}5$.

Точка (M_1^*, M_2^*) на рис.3.3 обозначена D. Она находится ровно посередине отрезка AB, поэтому решение Нэша имеет вид: $\overrightarrow{p^*}$ =(1/ 2,1/ 2) и $\overrightarrow{q^*}$ = (1/ 2,1/ 2) .

Это означает, что игроки могут договориться выбирать (случайным образом и независимо друг от друга) в половине случаев театр, и в другой половине — футбол, тогда выигрыш каждого составит в среднем 1,5 единицы за один вечер.

ПРИМЕР 10.3.5. Требуется провести анализ биматричной игры, заданной матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $\vec{p}$=(p,1- p) и $\vec{q}$= (q,1- q) , где p∈[0,1], q∈[0,1] – смешанные стратегии игроков. Тогда математические ожидания выигрышей игроков равны соответственно

$$M_1\,(\vec{p},\vec{q}) = 6\,pq\; + \;9\,p(1-q) + \;8(1-p)q\; + 2(1-p)(1-q) = (6-9\,p)q\; + 7p + 2\,,$$

$$M_1(\vec{p},\vec{q}) = 9\,pq + 7p(1-q) + 4(1-p)q + 10(1-p)(1-\;q) = (8q-3)p - 6q + 10.$$

Максиминные стратегии игроков определяются из условий

$$\alpha = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} \big((6-3p)q + p + 2\big) = \max\left\{\max_{p\in[0,2/3]} (7\text{p} + 2),\; \max_{p\in[2/3,1]} (8-2p)\right\} = 20/3$$

(где максимум достигается при p* = 2/3),

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} \big((8q-3)p - 6q + 10\big) = \max\left\{\max_{q\in[0,3/8]} (2q+7),\; \max_{q\in[3/8,1]} (10-6q)\right\} = 31/4$$

(где максимум достигается при q* = 3/8).

Таким образом, максиминные стратегии первого и второго игрока равны $\overrightarrow{p^*}$= (2/3,1/3) и $\overrightarrow{q^*}$ = (3/8, 5/8) , а их гарантированные выигрыши составляют 20/3 и 31/4 соответственно.

Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником $ABCD$ на рис.3.4. Множество Парето соответствует отрезку BC, а переговорное множество — отрезку EF.

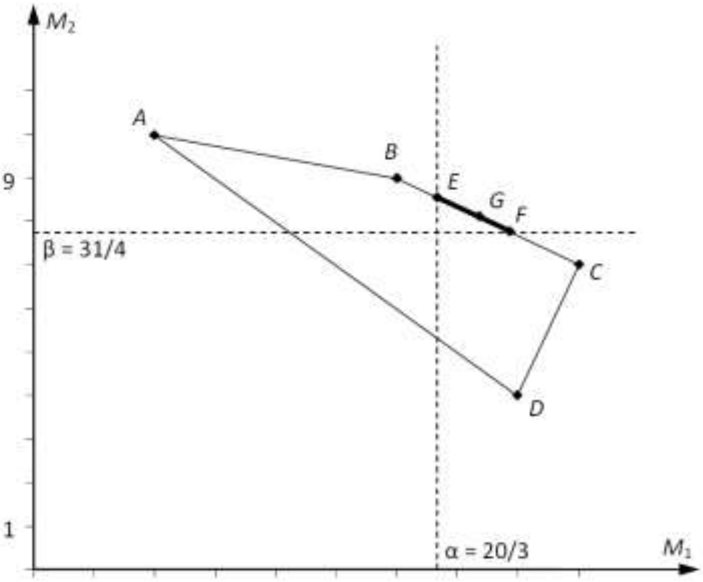


Рис. 3.4. *Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в примере 10.3.5*

Прямая, проходящая через точки $B(6, 9)$ и $C(9, 7)$, задается уравнением $M_2 = 13 - 2M_1/3$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(M_2 - \frac{31}{4}\right) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(13 - \frac{2}{3}M_1 - \frac{31}{4}\right) =$$

$$= \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1\right) = -\frac{2}{3}M_1^2 + \frac{349}{36}M_1 - 35$$

на отрезке $M_1 = \left[\frac{20}{3}, \frac{63}{8}\right]$ (т. е. на отрезке *EF*; при $M_2 = \frac{31}{4}$ значение $M_1 = \frac{3\left(13-\frac{31}{4}\right)}{2} = \frac{63}{8}$ достигает максимума в точке $M_1^* = \frac{349}{48}$. При этом $M_2^* = 13 - \frac{2M_1^*}{3} = \frac{587}{72}$. Эта точка на рис.3.4 обозначена *G*.

Точка $G(349/48, 587/72)$ является выпуклой комбинацией точек $B(6, 9)$ и $C(9,7)$, т. е.

$$\begin{cases} 6\lambda + 9(1-\lambda) = 349/48 \\ 9\lambda + 7(1-\lambda) = 587/72 \end{cases}$$

откуда $\lambda = 83/144$.

Точка *B* соответствует выбору обоими игроками своих первых чистых стратегий, точка *C* соответствует выбору первым игроком своей первой чистой стратегии, а вторым игроком — своей второй чистой стратегии, поэтому точка *G* соответствует тому, что первый игрок выбирает свою первую чистую стратегию, а второй игрок с вероятностью $q^* = \lambda = 83/144$ выбирает первую чистую стратегию, и с вероятностью $1 - q^* = 61/144$ — вторую чистую стратегию.

Таким образом, решение Нэша таково: $\overrightarrow{\boldsymbol{p}*} = (1, 0)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{q}*} = (83/144, 61/144)$. При этом средний выигрыш первого игрока равен $M_1^* = \frac{349}{48}$, а средний выигрыш второго игрока – $M_2^* = \frac{587}{72}$.

4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ

Игра с нулевой или ненулевой суммой называется *непрерывной*, если множества стратегий участников игры целиком заполняют некоторые отрезки.

Смешанные стратегии в непрерывных играх задаются уже не наборами вероятностей, а функциями (или плотностями) распределения непрерывных случайных величин на соответствующих отрезках. При этом математические ожидания выигрышей из сумм превращаются в интегралы.

Можно доказать, что если в непрерывной игре с нулевой суммой функция выигрыша первого игрока непрерывна по всем переменным, то у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.

Рассмотрим пример непрерывной игры с нулевой суммой.

ПРИМЕР 4.1 (ИГРА «ШУМНАЯ ДУЭЛЬ»). В дуэли принимают участие двое. В начальный момент дуэлянты находятся на расстоянии d_0 и по команде начинают сближаться. В распоряжении каждого дуэлянта имеется один выстрел, который он может произвести в противника с любого расстояния (конечно при условии, что дуэлянт жив), он может даже подойти к противнику вплотную. Пусть функции $p_k(d)$ задают вероятности поражения противника k-м игроком ($k = 1, 2$) с расстояния d. Предположим, что эти функции непрерывны и убывают на отрезке $[0, d_0]$. Рассматривается шумную дуэль, когда противники слышат выстрелы друг друга. Требуется формализовать поведение игроков в виде непрерывной игры с нулевой суммой и определить оптимальные чистые стратегии игроков (если такие стратегии существуют).

Решение. Стратегии первого и второго игроков определяются выбором чисел $x\epsilon[0,d_0]$, $y\in[0,d_0]$ – расстояний, с которых дуэлянты намечают произвести свои выстрелы.

Выигрышем $F(x, y)$ первого дуэлянта, если он стреляет с расстояния x, а его противник – с расстояния y, удобно считать вероятность того, что первый дуэлянт поразит второго. С учетом того, что если $x < y$, и второй игрок промахнется, то первый, услышав выстрел противника, стреляет в него с расстояния 0 вместо x, получим

$$F)x,y) = \begin{cases} p_1(x) \le p_1(d^*), & 0 \le y \le x \le d_0 \\ 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*), & 0 \le x < d^* \end{cases},$$

Шумная дуэль имеет решение в чистых стратегиях. Эти стратегии таковы: d_* для первого дуэлянта, d_* для второго, при этом цена игры равна $p_1(d_*)$ [здесь d_* — единственный корень уравнения $p_1(d_*)$ =1- $p_2(d_*)$], (d^*, d^*) — седловая точка данной игры.

В частности, если меткость игроков одинакова [т. е. $p_1(x) = p_2(x)$], то цена игры равна 1/2, а d^* является корнем уравнения $p_1(d^*) = 1/2$.

Переходя к рассмотрению непрерывных игр с непротивоположными интересами, отметим, что решение Нэша (и в конечных играх, и в непрерывных) имеет серьезный недостаток, который заключается в том, что оно не принимает в расчет угрозы. Это иллюстрирует пример **игры «Работодатель — работник»,** в которой работник имеет возможность установить интенсивность своей работы от 100% (полезность этой ситуации для работника оценивается нулем, а для работодателя прибылью 1 млн. руб.) до 0% (в этом случае работник будет голодать, и полезность этой ситуации для работника оценивается в – 500 000 руб., а работодатель получит нулевую прибыль). Работодатель может поделиться с работником частью прибыли (если захочет). Минимаксные выигрыши игроков равны нулю, а решение Нэша (в чем мы предлагаем убедиться читателю) состоит в том, что работодатель и работник делят прибыль поровну – по 500 тыс. руб. Однако при этом игнорируется тот факт, что работодатель находится в гораздо более выгодном положении, чем работник. Действительно, работник может воспрепятствовать работодателю, только решившись на очень трудный шаг; угроза прекратить работу с его стороны не очень правдоподобна, и в результате работник, скорее всего, будет продолжать работать за зарплату даже в том случае, если работодатель не будет делиться с ним прибылью. Угроза же работодателя уменьшить сумму, которой он делится с работником, вполне реальна.